

307.801

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI  
KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

I. ÉVFOLYAM, 1—2. FÜZET  
1956

★

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ I, ВЫПУСК 1—2.  
1956

★

PUBLICATIONS  
OF THE  
MATHEMATICAL INSTITUTE  
OF THE  
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME I., FASC. 1—2.  
1956



1956



## TARTALOMJEGYZÉK

RÉNYI A.: Előszó .....	3
BALATONI J.—RÉNYI A.: Az entrópia fogalmáról .....	9
PÁL L.: A neutronok lelassításának néhány kérdéséről .....	41
TAKÁCS L.: Atommag-reaktorok elméletével kapcsolatos néhány valószínűség-számítási kérdésről .....	55
PRÉKOPA A.—TÖRÖK F.: Lineáris metilszilikon-olajok átrendeződésének matematikai tárgyalása, I. ....	67
RÉNYI A.—SZENTÁGOTHAJ J.: Az ingerületátvitel valószínűsége egy egyszerű konvergens kapcsolású synapsis-modellben (Előzetes közlemény) .....	83
TAKÁCS L.: Egy részecskeszámlálással kapcsolatos valószínűség-számítási problémáról. — Megjegyzés Békéssy A. „Hibás skalerek (jelosztók) valószínűségeloszlásáról” című dolgozatához .....	93
TAKÁCS L.: Egy közlekedéssel kapcsolatos valószínűség-számítási problémáról ...	99
EGERVÁRY J.: Régi és új módszerek lineáris egyenletrendszerek megoldására ...	109
LOVASS-NAGY V.: Egerváry J. hipermatrix-algoritmusának alkalmazása többfázisú transzformátorok matematikai vizsgálatára .....	125
FREUD G.: A körlemezre vonatkozó Dirichlet-elv alkalmazhatóságáról .....	151
ADLER GY.—FREUD G.: Ahővezetés differenciálegyenletének maximum-elvről, I.	157
ADLER GY.: Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel, II. ....	167
CZIPSZER J.: Hővezetés végtelen rúdban, II. ....	185
FENYŐ I.: Megjegyzés a differenciálegyenlet-rendszerek egyik formális megoldási módszeréhez .....	193
FÉNYES T.: Transzformátorállomás villámvédelmével kapcsolatos matematikai problémákról .....	201
ARATÓ M.: Megjegyzések a „késés-függvénnyel” kapcsolatban .....	217
PÁL S.: Grafikus-numerikus módszer pontsoros és pontmezős nomogrammok tervezésére. — Függelék: CZIPSZER J.: A projektív értelemben általánosított konvex burkok számáról .....	223
BÉKÉSSY A.—TÓTH K.: Táblázat az exponenciális-integrál függvényre .....	273
A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET OSZTÁLYAINAK SZEMINÁRIUMAIBAN 1955-BEN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK KIVONATAI .....	295
AZ INTÉZET MUNKATÁRSAINAK AZ INTÉZET MUNKÁJÁNAK EREDMÉNYEIT TARTALMAZÓ, 1955. JANUÁR 1. ÓTA MÁSUTT MEGJELENT VAGY SAJTÓ ALATT LEVŐ DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE .....	311



A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI  
KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

I. ÉVFOLYAM

1956

★

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

TOM I.

1956

★

PUBLICATIONS  
OF THE  
MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE  
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME I.

1956



1957



# A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»  
CÍMŰ KIADVÁNSOROZAT FOLYTATÁSA

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD  
TECHNIKAI SZERKESZTŐ: LIPTÁK TAMÁS  
A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET  
BUDAPEST, VI., NÉPKÖZTÁRSASÁG ÚTJA 31. I.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb, főként a matematika gyakorlati alkalmazásaival kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden évfolyama 4 füzetből áll, és kb. 30 nyomdai ív terjedelmű. A dolgozatok vagy magyarul jelennek meg két világnyelven írott részletes kivonattal, vagy valamelyik világnyelven, magyar és még egy világnyelven írt kivonattal. Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük a szerkesztőséghez fordulni.

A folyóirat „A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei” című kiadvánsorozata folytatása, melynek 3 kötete jelent meg [I. kötet (1952); II. kötet (1953); III. kötet (1954)].

## ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ПРОДОЛЖЕНИЕ ИЗДАНИИ  
«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»  
(ТРУДЫ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ)

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI  
ТЕХНИЧЕСКИЙ РЕДАКТОР: TAMÁS LIPTÁK  
АДРЕС РЕДАКЦИИ: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
BUDAPEST, VI., NÉPKÖZTÁRSASÁG ÚTJA 31. I.

В ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие статьи по преимуществу связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала выходит в 4 выпусках, в 30 печатных листах приблизительно. Статьи опубликованы или на венгерском языке с подробным резюме на двух мировых языках, или на каком-то мировом языке с резюме на венгерском и каком-то другом языке. Заказы при нимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21.). Текущий счет № 45-790-057-50-032. По поводу отношения обмена просим обращаться непосредственно к редакции.

Журнал является продолжением издания «A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei» от которого вышли в свет 3 тома [том I. (1952); том II. (1953); том III. (1954)].

## PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

CONTINUING THE SERIES  
«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»  
(PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DE L'ACADÉMIE  
DES SCIENCES DE HONGRIE)

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI  
TECHNICAL EDITOR: TAMÁS LIPTÁK  
ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE  
BUDAPEST, VI., NÉPKÖZTÁRSASÁG ÚTJA 31.

THE PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of the scientific work of the Institute and other papers, especially on the practical applications of mathematics. The journal is published quarterly, 4 issues are forming one volume, consisting of about 30 printed lists. The papers appear in Hungarian with abstracts in two world-languages or in a world-language with abstracts in Hungarian and in another world-language. For subscription please write to the trade organization „Kultúra” (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21.). Cheque No. 45-790-057-50-032. For establishing exchange relations please write to the editor.

The journal continues the series „A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei” of which 3 volumes were published [Vol. I. (1952); Vol. II. (1953); Vol. III. (1954)].



## TARTALOMJEGYZÉK

RÉNYI A.: Előszó .....	3—4
ADLER GY.: Hővezetési és diffúziós feladatod összetett peremfeltételekkel, II.	167—183
ADLER GY.—FREUD G.: A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elvéről, I. ....	157—165
ADLER GY.: A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elvéről, II. ....	429—435
ARATÓ M.: Megjegyzések a „késés-függvénnyel” kapcsolatban .....	217—221
BALATONI J.—RÉNYI A.: Az entrópia fogalmáról .....	9—40
BÉKÉSSY A.—TÓTH K.: Táblázat az exponenciális-integrál függvényre ....	273—294
BÉRES E.: Centráliszimmetriával bíró térbeli keretek számítása hiper-matrixok alkalmazásával .....	577—592
BÉRES E.—LOVASS-NAGY V.—SZABÓ J.: Ciklikus szimmetriával bíró térbeli rácsos tartók rúderőinek meghatározása hipermatrixok alkalmazásával	559—576
BRÓDY A.—RÉNYI A.: Az árrendezés problémájáról .....	325—335
CZIPSZER J.: Hővezetés végtelen rúdban, II. ....	185—192
CZIPSZER J.: A projektív értelemben általánosított konvex burkok számáról. (Függelék PÁL S. dolgozatához) .....	268—272
EGERVÁRY J.: Régi és új módszerek lineáris egyenletrendszerek megoldására	109—123
EGERVÁRY J.: Az inverz matrix általánosítása .....	315—324
ÉLTETŐ Ö.: A minta-terjedelem és a csonkított minta-terjedelem alapján történő szórásbecslésről .....	391—398
FENYŐ I.: Megjegyzés a differenciálegyenlet-rendszerek egyik formális megoldási módszeréhez .....	193—200
FENYŐ I.: Lineáris integrálegyenletek sajátérték nélküli magjairól .....	423—427
FÉNYES T.: Transzformátorállomás villámvédelmével kapcsolatos matematikai problémákról .....	201—215
FONTÁNYI Á.—SÁRKADI K.—VAS É.: Kiegészítés az „A rendezett minták elméletének alkalmazása a statisztikai minőségellenőrzésben” című dolgozathoz .....	399—403
FREUD G.: A körlemezre vonatkozó Dirichlet-elv alkalmazásáról .....	151—155
FREUD G.: A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elvéről, III. ....	437—446
HEPPES A.—RÉVÉSZ P.: A latin négyzet és az ortogonális latin négyzet-pár fogalmának egy új általánosítása és ennek felhasználása kísérletek tervezésére .....	379—390
HORVÁTH F.: Új készülék síkbeli projektív transzformáció végrehajtására	457—463
KARDOS G.: Tömör félgömbben fellépő örvényáramvesztés meghatározásáról .....	405—421
KÖVÁRI T.: Kvázi-Zsukovszkij profil sorok áramlástan vizsgálatára .....	447—456
LOVASS-NAGY V.: Egerváry J. hipermatrix-algoritmusának alkalmazása többfázisú transzformátorok matematikai vizsgálatára .....	125—149
MEDGYESSY P.: Stablis valószínűség-sűrűségfüggvényekre fennálló parciális differenciálegyenletek és alkalmazásaik .....	489—518
MOGYORÓDI J.—NÉMETH G.: Atommagreaktorokban végbemenő neutron-lassítás-folyamattal kapcsolatos valószínűség-számítási problémákról ..	337—348



# IV

NICOLESCU, M.: Elliptikus vagy hiperbolikus típusú differenciálegyenletek megoldásainak szerkezete .....	465—479
OROSZ G.—TAKÁCS L.: Szuperponált véletlen jelzeteket alkalmazó dokumentációs rendszerek matematikai kérdéseiről .....	357—378
PALÁSTI I.—RÉNYI A.: A Monte-Carlo módszer mint minimax stratégia .....	529—545
PÁL L.: A neutronok lelassításának néhány kérdéséről .....	41—54
PÁL S.: Grafikus-numerikus módszer pontsoros és pontmezős nomogrammok tervezésére. (Függelék: CZIPSZER J.: A projektív értelemben általánosított konvex burkok számáról.) .....	223—272
PRÉKOPA A.—TÖRÖK F.: Lineáris metilszilikon-olajok átrendeződésének matematikai tárgyalása, I. ....	67—81
PRÉKOPA A.—RÉVÉSZ P.: Lineáris metilszilikon-olajok átrendeződésének matematikai tárgyalása, II. ....	349—356
RÉNYI A.: A Poisson-folyamat egy jellemzése .....	519—527
RÉNYI A.—SZENTÁGOTHAJ J.: Az ingerületátvitel valószínűsége egy egyszerű konvergens kapcsolási synapsis-modellben (Előzetes közlemény)....	83—91
RÓZSA P.: A matrix-számítás alkalmazása rudak és lemezek sztatikájában .....	593—621
SZABÓ J.: A mátrixelmélet alkalmazása egyes szilárdságtani problémákat leíró parciális differenciálegyenletek közelítő megoldásánál .....	623—631
TAKÁCS L.: Egy részecskeszámlálással kapcsolatos valószínűségyszámítási problémáról. — Megjegyzés Békéssy A. „Hibás scalerek (jelosztók) valószínűségeloszlásáról” című dolgozatához .....	93—98
TAKÁCS L.: Egy közlekedéssel kapcsolatos valószínűségyszámítási problémáról .....	99—107
TURÁN P.: Megjegyzés a kvázi-analitikus függvényosztályok elméletéhez .....	481—487
L. ZIERMANN M.: Néhány mezőgazdasági kérdés valószínűségyszámítási vizsgálata, I. ....	547—557
A Matematikai Kutató Intézet szemináriumai 1955-ben és 1956-ban elhangzott előadások kivonatai .....	295—310, 633—644
Az Intézet munkatársainak az Intézet munkájának eredményeit tartalmazó, 1955 január 1. óta másutt megjelent vagy sajtó alatt levő dolgozatainak jegyzéke (kiegészítésekkel) .....	311—314, 645—649

## СОДЕРЖАНИЕ

RÉNYI, A.: Предисловие .....	5—6
ADLER, Gy.: Смешанные краевые задачи для уравнений теплопроводности и диффузии, II. ....	167—183
ADLER, Gy.—FREUD, G.: О принципе максимума для дифференциального уравнения теплопроводности, I. ....	157—165
ADLER, Gy.: О принципе максимума для дифференциального уравнения теплопроводности, II. ....	429—435
ARATÓ, M.: Некоторые замечания о «функции опоздания» .....	217—221
BALATONI, J.—RÉNYI, A.: Замечания об энтропии .....	9—40
BÉKÉSSY, A.—TÓTH, K.: Таблицы интегральной показательной функции .....	273—294
BÉRES, E.: Вычисление центрально-симметричных пространственных рамок с применением гиперматриц .....	577—592
BÉRES, E.—LOVASS-NAGY, V.—SZABÓ, J.: Определение стрессовых сил пространственных решетчатых опор с циклической симметрией с помощью гиперматриц .....	559—576
BRÓDY, A.—RÉNYI, A.: О проблеме регулирования цен .....	325—335
CZIPSZER, J.: Теплопроводность в бесконечном стержне, II. ....	185—192
CZIPSZER, J.: Приложение к статье S. PÁL .....	268—272
EGERVÁRY, J.: Старые и новые методы решения систем линейных уравнений .....	109—123
EGERVÁRY, J.: Обобщение обратной матрицы .....	315—324
ÉLTETŐ, Ö.: Об оценке дисперсии на основании размаха выборки и урезанного размаха выборки .....	391—398
FENYŐ, I.: Замечания об одном формальном методе решения систем дифференциальных уравнений .....	193—200
FENYŐ, I.: О ядрах линейных интегральных уравнений, не имеющих собственных значений .....	423—427



FÉNYES, T.: О математических проблемах, связанных с защитой трансформаторных станций от молний .....	201—215
FONTÁNYI, A.—SARKADI, K.—VAS, E.: Добавление к работе «Применение теории вариационных рядов при статистическом контроле качества» ...	399—403
FREUD, G.: О применимости принципа Dirichlet для круга .....	151—155
FREUD, G.: О принципе максимума для дифференциального уравнения теплопроводности, III. ....	437—446
HEPPES, A.—RÉVÉSZ, P.: Одно обобщение метода латинских квадратов и его применения .....	379—390
HORVÁTH, F.: Проективное преобразование системы координат Descartes в плоскости с помощью нового инструмента .....	457—463
KARDOS, G.: Об определении потери токов Foucault в плотном металлическом шаре .....	405—421
KÓVÁRI, T.: Гидродинамическое исследование рядов профилей квази-Жуковского типа .....	447—456
LOVASS-NAGY, V.: Применение гиперматричного алгоритма J. Egervári к математическому исследованию многофазных трансформаторов .....	125—149
MEDGYESSY, P.: Дифференциальные уравнения с частными производными, связанные с плотностью устойчивого распределения и их применения ..	489—518
MOGYORÓDI, J.—NÉMETH, G.: О некоторых теоретико-вероятностных проблемах связанных с процессом замедления нейтронов, происходящих в атомных реакторах .....	337—348
NICOLESCU, M.: Структура решений дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического или гиперболического типа .....	465—479
OROSZ, G.—TAKÁCS, L.: О математических вопросах документационных систем с налагающимися случайными кодами .....	357—378
PALÁSTI, I.—RÉNYI, A.: Методы «Monte-Carlo» как минимаксные стратегии..	529—545
PÁL, L.: О некоторых вопросах замедления нейтронов .....	41—54
PÁL, S.: Графический-численный метод планирования номограмм из выравненных точек и номограмм из выравненных точек, с бинарными полями. (С приложением от J. Czipser) .....	223—272
PRÉKORA, A.—TÖRÖK, F.: Математическое исследование перегруппировки линейных метилсиликоновых масел, I. ....	67—81
PRÉKORA, A.—RÉVÉSZ, P.: Математическое исследование перегруппировки линейных метилсиликоновых масел, II. ....	349—356
RÉNYI, A.: Одна характеристика процесса Poisson .....	519—527
RÉNYI, A.—SZENTÁGOTNAI, J.: Вероятность переноса раздражения в случае простой модели интернейронного синапса со сходящейся связью ....	83—91
RÓZSA, P.: Применение матричного исчисления в статике стержней и пластинок	593—621
SZABÓ, J.: Применение матричного исчисления к приближенному решению дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих некоторые проблемы теории упругости .....	623—631
TAKÁCS, L.: Об одной проблеме теории вероятностей, связанной с регистрацией частиц — Замечание к работе A. Békéssy .....	93—98
TAKÁCS, L.: Об одной проблеме теории вероятностей связанной с транспортом	99—107
TURÁN, P.: Замечания к теории классов квазианалитических функций .....	481—487
L. ZIERMANN, M.: Теоретико-вероятностное исследование некоторых сельскохозяйственных вопросов, I. ....	547—557
Резюме докладов произнесенных на семинарах отделений Института	295—310, 633—644
Список работ сотрудников Института, опубликованных в других журналах или находящихся в печати .....	311—314, 645—649

## CONTENTS

RÉNYI, A.: Introduction .....	7—8
ADLER, GY.: Problèmes de conduction de la chaleur et de diffusion avec conditions aux limites composées, II. ....	167—183
ADLER, GY.—FREUD, G.: Sur le principe du maximum de l'équation de la chaleur, I. ....	157—165



ADLER, Gy. : Sur le principe du maximum de l'équation de la chaleur, II. .	429—435
ARATÓ, M. : A note on the „retardation function” .....	217—221
BALATONI, J.—RÉNYI, A. : Remarks on entropy .....	9—40
BÉKÉSSY, A.—TÓTH, K. : Tafel der $\bar{E}_i(x)$ Funktion .....	273—294
BÉRES, E. : Über eine Anwendung der Hypermatrizen zur Berechnung von räumlichen Stabwerken mit zyklischer Symmetrie .....	577—592
BÉRES, E.—LOVASS-NAGY, V.—SZABÓ, J. : Über eine Anwendung der Hyper- matrizen bei der Berechnung von räumlichen Fachwerken mit zykli- scher Symmetrie .....	559—576
BRÓDY, A.—RÉNYI, A. : On the regulation of prices .....	325—335
CZIPSZER, J. : Sur la propagation de la chaleur dans une barre infinie, II.	185—192
CZIPSZER, J. : Anhang zur Arbeit von S. PÁL .....	268—272
EGERVÁRY, J. : Old and new methods for solving linear equations .....	109—123
EGERVÁRY, J. : On a generalized inverse for matrices .....	315—324
ÉLTETŐ, Ö. : On the estimation of the standard deviation based on range and quasi-ranges .....	391—398
FENYŐ, I. : Bemerkungen über eine formelle Lösungsmethode von Systemen von Differentialgleichungen .....	193—200
FENYŐ, I. : Über die Kerne linearer Integralgleichungen welche keine Eigen- werte besitzen .....	423—427
FÉNYES, T. : Sur un problème mathématique concernant la protection des lignes à haute tension contre la foudre .....	201—215
FONTÁNYI, Á.—SARKADI, K.—VAS, É. : Ergänzung zur Arbeit über „Anwen- dung der Theorie der geordneten Stichproben in der statistischen Qualitätskontrolle” .....	399—403
FREUD, G. : Über die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips für den Kreis	151—155
FREUD, G. : Sur le principe du maximum de l'équation de la chaleur, III.	437—446
HEPPES, A.—RÉVÉSZ, P. : A new generalization of the method of Latin squares and orthogonal Latin squares and its application to the design of experiments .....	379—390
HORVÁTH, F. : Neues Gerät zur projektiven Transformation eines ebenen Koordinatensystems .....	457—463
KARDOS, G. : De la perte de courant d'induction dans une sphère conductrice	405—421
KÓVÁRI, T. : Hydrodynamical investigation of quasi-Žukowsky profile-rows	447—456
LOVASS-NAGY, V. : On an application of J. Egerváry's hypermatrix algorithm to the mathematical investigation of polyphase transformers .....	125—149
MEDGYESSY, P. : Partial differential equations for stable density functions and their applications .....	489—518
MOGYORÓDY, J.—NÉMETH, G. : On probabilistic problems connected with the proves of slowing down of neutrons in nuclear reactors .....	337—348
NICOLESCU, M. : La structure de solutions des équations aux dérivées partiel- les du type elliptique ou du type parabolique .....	465—479
OROSZ, G.—TAKÁCS, L. : Über gewisse mathematische Probleme der Doku- mentationssysteme mit zufallsartig gewählten superponierten Koden	357—378
PALÁSTI, I.—RÉNYI, A. : Monte-Carlo methods as minimax strategies .....	529—545
PÁL, L. : Some problems concerning the slowing down of neutrons .....	41—54
PÁL, S. : Eine numerische und graphische Methode zur Konstruktion von Fluchtentafeln und birnäeren Leitertafeln. (Mit einem Anhang von J. CZIPSZER) .....	223—272
PRÉKOPA, A.—TÖRÖK, F. : Mathematical treatment of the rearrangement of linear methylsilicone oils, I. ....	67—81
PRÉKOPA, A.—RÉVÉSZ, P. : Mathematical treatment of the rearrangement of linear methylsilicone oils, II. ....	349—356
RÉNYI, A. : A characterization of Poisson processes .....	519—527
RÉNYI, A.—SZENTÁGOTHAJ, J. : The probability of synaptic transmission in simple models of interneuronal synapses with convergent coupling	83—91
RÓZSA, P. : Die Anwendung des Matrizenkalküls auf die Statik von Balken und Platten .....	593—621
SZABÓ, J. : Über eine Anwendung der Matrizenrechnung zur Näherungslösung von gewissen partiellen Differentialgleichungen der Festigkeitslehre ..	623—631
TAKÁCS, L. : On some probabilistic problems concerning the counting of particles. — A note on a paper of A. Békéssy .....	93—98



TAKÁCS, L. : On a probabilistic problem arising in some traffic investigations	99—107
TURÁN, P. : Remark on the theory of quasianalytic function-classes.....	481—487
L. ZIERMANN, M. : Wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchung einiger landwirtschaftlicher Probleme, I. ....	547—557
Abstracts of lectures delivered in the seminars of the Institute ..	295—310, 633—644
List of papers of the members of the Institute published or in print in another periodical .....	311—314, 645—649



A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

---

40815/57 — Akadémiai Nyomda, V., Gerlőczy u. 2. — Felelős vezető: Bernát György



A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI  
KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

I. ÉVFOLYAM, 1—2. FÜZET  
1956

★

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ I., ВЫПУСК 1—2.  
1956

★

PUBLICATIONS  
OF THE  
MATHEMATICAL INSTITUTE  
OF THE  
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME I., FASC. 1—2.  
1956



1956



# A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»  
CÍMŰ KIADVÁNYSOROZAT FOLYTATÁSA

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐ: LIPTÁK TAMÁS

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET  
BUDAPEST, VI., SZTÁLIN ÚT 31. I.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb, főként a matematika gyakorlati alkalmazásaival kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden évfolyama 4 füzetből áll, és kb. 30 nyomdai ív terjedelmű. A dolgozatok vagy magyarul jelennek meg két világnyelven frott részletes kivonattal, vagy valamelyik világnyelven, magyar és még egy világnyelven írt kivonattal. Cserkapcsolatok felvétele érdekében kérjük a szerkesztőséghez fordulni.

A folyóirat «A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei» című kiadványsorozat folytatása, melynek 3 kötete jelent meg [I. kötet (1952); II. kötet (1953); III. kötet (1954)].

## ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ПРОДОЛЖЕНИЕ ИЗДАНИИ

«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»  
(ТРУДЫ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ)

РЕДАКТОР: АЛФРЕД РЕНЬИ

ТЕХНИЧЕСКИЙ РЕДАКТОР: ТАМАШ ЛИПТАК

АДРЕС РЕДАКЦИИ: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
BUDAPEST, VI., SZTÁLIN ÚT 31. I.

В ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие статьи по преимуществу связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала выходит в 4 выпусках, в 30 печатных листах приблизительно. Статьи опубликованы или на венгерском языке с подробным резюме на двух мировых языках, или на каком-то мировом языке с резюме на венгерском и каком-то другом языке. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest, VI., Sztálin út 21.) Текущий счет № 45-790-057-50-032. По поводу отношения обмена просим обращаться непосредственно к редакции.

Журнал является продолжением издания «A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei» от которого вышли в свет 3 тома [том I. (1952); том II. (1953); том III. (1954)].

## PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

CONTINUING THE SERIES

«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»  
(PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DE L'ACADÉMIE  
DES SCIENCES DE HONGRIE)

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITOR: TAMÁS LIPTÁK

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE  
BUDAPEST, VI. SZTÁLIN ÚT 31. I.

THE PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of the scientific work of the Institute and other papers, especially on the practical applications of mathematics. The journal is published quarterly, 4 issues are forming one volume, consisting of about 30 printed lists. The papers appear in Hungarian with abstracts in two world-languages or in a world-language with abstracts in Hungarian and in an other world-language. For subscription please write to the trade organization «Kultúra» (Budapest, VI., Sztálin út 21.). Cheque No. 45-790-057-50-032. For establishing exchange relations please write to the editor.

The journal continues the series «A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei» of which 3 volumes were published [Vol. I. (1952); Vol. II. (1953); Vol. III. (1954)].



## ELŐSZÓ

A „Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei” rendszeresen megjelenő folyóirat, folytatása a „Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei” című kiadványsorozatnak, amelynek három kötete jelent meg. (Az I. kötet, amely 462 oldal terjedelemben az Intézet 1952. évi munkájáról számol be, 1953-ban; a II. kötet, amely 528 oldal terjedelemben az Intézet 1953. évi munkájáról számol be, 1954-ben; a III. kötet, amely két részben (1—2. és 3—4. füzetek) összesen 453 oldal terjedelemben az Intézet 1954. évi munkájáról számol be, 1955-ben jelent meg.) Közleményeink címének megváltoztatása az Intézet elnevezésének megváltoztatásának következménye. A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete, amely 1950 augusztus 1-én létesült, 1955 augusztus 1-én átalakult a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetévé. Az Intézet átszervezését és azzal együttjáró névváltoztatását az Intézet feladatkörének kibővítése tette szükségessé, amelynek eredményeképpen az Intézet ma már nemcsak a matematika gyakorlati alkalmazásával, hanem általában a matematika és annak alkalmazásai művelésével és fejlesztésével foglalkozik.

Az Intézet átszervezése tehát a legcsekélyebb mértékben sem jelenti azt, hogy az Intézet a matematika gyakorlati alkalmazásaitól elfordult volna. Éppen ellenkezőleg: az átszervezés a matematika gyakorlati alkalmazásaira irányuló, az Intézetben folyó munka színvonalának felemelését is szolgálja. A matematika gyakorlati alkalmazásainak sikere ugyanis nem kis részben a matematika fejlődésétől függ. Azáltal, hogy Intézetünk az átszervezés után az elméleti kutatómunkának nagyobb teret biztosít, ezzel a matematika gyakorlati alkalmazásainak jövőbeli új lehetőségeit is megteremti. Természetesen az elméleti kutatásoknak a gyakorlati alkalmazásokra gyakorolt megtermékenyítő hatásának érvényesülését nem bízhatjuk pusztán a spontán fejlődésre, hanem igyekeznünk kell ezt elősegíteni. E célból kívánatos, hogy az elméleti kutatómunkával foglalkozó matematikusok is kapcsolatba kerüljenek a matematika gyakorlati alkalmazásaival, a gyakorlati alkalmazásokkal foglalkozó matematikusok pedig megismerkedjenek a matematika legújabb kutatási irányjaival. Minderre bő lehetőséget nyújt, ha mind a két irányt ugyanabban az intézetben művelik. E lehetőségek minél nagyobb mértékű megvalósítása érdekében az Intézet osztályainak szoros együttműködésére van szükség. E célkitűzést különböző eszközökkel, így többek között összintézeti szemináriumok szervezésével igyekszik az Intézet fokozottabban megvalósítani.

Az Intézet átszervezése óta az Intézetben két új osztály létesült: a komplex függvénytan osztály, TURÁN PÁL akadémikus vezetésével és a funkcionálanalízis osztály, amely Szegeden működik, SZÓKEFALVI-NAGY BÉLA akadémikus vezetésével. Ezek egyike sem kizárólag elméleti kutatásokkal foglalkozik, hanem — ugyanúgy, mint az Intézet többi, már régebben létesült és az átszervezés után változatlanul továbbműködő osztályai — részben elméleti kutatási feladatokat, részben a matematika gyakorlati alkalmazásainak közvetlen vagy közvetett előbbrevitelét tűzte ki céljául. Az Intézet egyetlen osztálya sem tekinthető teljes egészében elméleti, sem pedig teljes egészében az alkalmazásokkal foglalkozó osztálynak: a különbség e tekintetben az egyes osztályok között legfeljebb abban áll, hogy a kutatómunka és a gyakorlati alkalmazásokkal való foglalkozás mindegyiknél más-más súllyal szerepel. A közeljövőben további osztályok létesítését vette tervbe az Intézet, abban az ütemben, ahogy ennek előfeltételeit sikerül biztosítani. Az Intézet fejlesztési tervének megvalósítása esetén az Intézet osztályainak kutatási területei együttvéve nagyjából át fogják fogni a matematika egész mai problematikáját.

Az Intézet Közleményei — bár címéből az „alkalmazott” jelző elmaradt — továbbra is elsősorban a matematika gyakorlati alkalmazásaival foglalkozó vagy azokkal kapcsolatos dolgozatokat fog közölni. E célkitűzést természetesen nem kívánjuk mereven



érvényesíteni, és szándékunk elméleti jellegű dolgozatoknak is helyt adni a Közleményeinkben, különösen olyanoknak, melyek az alkalmazásokkal kapcsolatban felmerült elvi problémákat tárgyalnak.

Jelen szám is mutatja, hogy Közleményeink — ugyanúgy, mint eddig — nemcsak matematikusoknak szól, hanem arra is törekszik, hogy a természettudományok és a technika szakembereinek felhívja a figyelmét a matematikai módszerek gyakorlati alkalmazásának újabb lehetőségeire és ezek jelentőségére.

Közleményeink elsősorban természetesen az Intézet kutatóinak munkáit közlik, de rendelkezésére állnak mindazoknak, akár hazánkban, akár külföldön, akik a matematika gyakorlati alkalmazásaival kapcsolatos új eredményeiket közzé kívánják tenni. Közleményeink e számában minden dolgozat magyar nyelvű, két világnyelven írott kivonattal. Nincs akadálya azonban annak sem, hogy egyes dolgozatok a jövőben Közleményeinkben ne magyarul, hanem valamelyik világnyelven jelenjenek meg, ez esetben természetesen az egyik kivonat magyar nyelvű lesz.

Közleményeink egy további célkitűzése — úgy, mint eddig —, hogy képet adjon az Intézet munkájáról; ezért közöljük a szemináriumokban elhangzott előadások felsorolását, és az új és még másutt nem közölt eredményt tartalmazó vagy megoldatlan problémát felvető előadások rövid kivonatait. Ez módot ad arra, hogy az előadók dolgozatuk végleges sajtó alá rendezését megelőzve egyes újabb eredményeik elérését — mintegy előzetes közlésként — ezúton nyomatásban lerögzítsék.

Az Intézet kutatóinak másutt megjelent, illetve sajtó alatt lévő dolgozatainak jegyzékét szintén azért közöljük rendszeresen, hogy ezáltal közleményeink teljesebben tükrözzék vissza az Intézet munkáját. Persze, e kép így sem teljes. Igyekezni fogunk, hogy megtaláljuk a módját annak, hogy az Intézet egyéb tevékenységéről is beszámoljunk. Még néhány szót munkánk további célkitűzéseiről.

A dogmatizmus nyűgét lerázó, szabad, alkotó gondolat friss levegője, amelyet a Szovjetunió Kommunista Pártjának XX. kongresszusa áraszt magából, a mi számunkra azt is jelentette, hogy lényegében elhárultak azok a megesontosodott előítéleteken alapuló akadályok, amelyek a matematikai módszerek gyakorlati felhasználását számos tudományterületen eddig akadályozták (gondolok itt például a biológiára, a kibernetikára és a közgazdaságtudományra). Reméljük, ez meg fogja teremteni gyümölcsét, és ez Közleményeink következő kötetiben már tükröződni is fog.

Az eddig általunk is elhanyagolt alkalmazási területek művelésének megindítása mellett a matematika gyakorlati alkalmazásaira irányuló munkánk középpontjában továbbra is természetesen az ipar műszaki fejlesztésével kapcsolatos feladatok, továbbá ezzel összefüggésben a természettudományok és ezen belül is elsősorban a modern fizika által a matematikusok elé tűzött feladatok, valamint a mezőgazdasággal kapcsolatos problémák állnak és fognak is állni.

Évről évre egyre több megbízást kap Intézetünk üzemektől, tervező és kutató-intézetektől stb. matematikai problémák megoldására, és e megbízásokkal az Intézet a jövőben is — ugyanúgy, mint eddig — készséggel fog foglalkozni. Ez a munka azonban csak úgy válhat igazán eredményessé, ha azoknak az üzemeknek és egyéb intézményeknek, ahol matematikai problémák rendszeresen felmerülnek, megvan a maguk matematikusa, aki segít a problémákat felismerni, és a matematikai számítások eredményeinek tényleges felhasználását a helyszínen folyamatos munkával biztosítani. Intézetünk fontos feladatának tekinti az üzemekben és egyebütt dolgozó fiatal matematikusok támogatását, és ugyanakkor igen sokat is vár munkájuktól a matematikai módszerek újabb alkalmazási lehetőségeinek felkutatását illetően. Közleményeinkben a jövőben módot kívánunk nyújtani arra, hogy a másutt dolgozó matematikusok is beszámolhassanak munkájukról, eredményeikről és problémáikról.

Közleményeinkkel készségesen lépünk cserekapcsolatra mind hazai, mind pedig külföldi szakfolyóiratokkal. Ez úton könyvtárunk fejlesztését és az Intézet hazai és külföldi tudományos kapcsolatainak elmélyítését, továbbá a külföldi cserekapcsolatokkal a matematikusok nemzetközi tudományos együttműködését kívánjuk elősegíteni.

Közleményeink fent vázolt célkitűzéseinek megvalósításához kérjük olvasóink támogatását. Közöljék velünk, hogy mit várnak Közleményeinktől, mit nyújtott nekik a folyóirat, és mit hiányolnak munkánkban. Szeretnénk, ha folyóiratunk eleven kapcsolata volna mindazok között, akiknek a matematika művelése, a tudomány és a természet fejlesztése érdekében való gyakorlati felhasználása a szívén fekszik.

RÉNYI ALFRÉD

a Magyar Tudományos Akadémia  
Matematikai Kutató Intézetének igazgatója



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Регулярно выходящий журнал «Труды Математического Института Академии Наук Венгрии» является продолжением серии публикаций «Труды Института Прикладной Математики Академии Наук Венгрии», вышедших в трех томах. (Том I, отчитывающийся на 462 страницах о работе института в 1952 году, вышел в 1953 году, том II, отчитывающийся на 528 страницах о работе института в 1953 году вышел в 1954 году, том III, состоящий из двух частей [выпуск 1—2 и 3—4] и отчитывающийся на 453 страницах о работе института в 1954 году, вышел в 1955 году.) Изменение названия наших публикаций является следствием изменения названия института. Институт Прикладной Математики Академии Наук Венгрии, образованный 1-го августа 1950-го года, 1-го августа 1955-го года был переобразован в Математический Институт Академии Наук Венгрии. Реорганизация института и связанное с ней изменение названия было вызвано расширением круга задач, стоящих перед институтом, вследствие чего институт в настоящее время занимается не только практическими применениями математики, а вообще математикой и ее применениями.

Реорганизация института ни в какой мере не означает того, что институт отвернулся от практических применений математики. Как раз наоборот: реорганизация имеет своей целью и повысить уровень работы института, связанной с практическими приложениями математики. Успех практического применения математики в значительной мере зависит от развития математики. Уделяя после реорганизации больше внимания теоретической исследовательской работе, институт тем самым создает и новые возможности для практического применения математики в будущем. Конечно, плодотворное влияние теоретических исследований на практические применения не может быть доверено самотеку, мы должны содействовать этому. В этих целях желательно, чтобы и математики, занимающиеся теоретическими исследованиями, вступили в контакт с практическими применениями математики, а математики, занимающиеся практическими приложениями математики, познакомились с новейшими направлениями математических исследований. Для всего этого имеются богатые возможности, если оба направления объединены в одном институте. Для возможно более полного использования этих возможностей необходимо тесное сотрудничество отделов института. Эту целевую установку институт старается реализовать различными средствами, в частности, с помощью общеинститутских семинаров.

Со времени реорганизации института, было создано два новых отдела: отдел теории функций комплексной переменной, руководимый академиком П. Туран, и отдел функционального анализа, находящийся в Сегеде, под руководством академика Б. С. Надь. Ни один из них не занимается исключительно теоретическими исследованиями, а, также как и остальные отделы института, без изменений продолжающие свою работу после реорганизации, поставили себе целью частично теоретические задачи, частично непосредственное или косвенное содействие практическим приложениям математики. Ни один из отделов Института не может считаться ни полностью теоретическим, ни занимающимся лишь практическими приложениями математики: в этом отношении разница между отделами заключается разве лишь в том, что исследовательская работа и занятие практическими приложениями имеет место в неоднородных соотношениях. Институт планирует создание в будущем новых отделов в таком темпе, в каком удастся обеспечить предпосылки для этого. В случае выполнения плана развития института, области исследования отделов института в основном охватят всю сегодняшнюю проблематику математики. Труды института, хотя из их заглавия опущено определение «прикладная», будет и в дальнейшем помещать в первую очередь работы, занимающиеся практическими приложениями математики или связанные с ними. Эту установку мы, конечно, не собираемся жестко соблюдать и в наши цели входит предоставление места и для работ теоре-



тического характера, особенно для таких, которые изучают принципиальные проблемы, возникающие в связи с приложениями.

И настоящий выпуск показывает, что наши Труды, как и раньше, адресованы не только математикам, а стремятся также привлечь внимание специалистов естественных наук и техники на новые возможности практического применения математических методов и на их значение.

Естественно, что наши «Труды» в первую очередь публикуют работы сотрудников института, но предоставляются и в распоряжении всех, как у нас на родине, так и за границей, кто хочет опубликовать свои новые результаты, связанные с приложениями математики. Все работы настоящего выпуска опубликованы на венгерском языке с резюме на двух иностранных языках. Но нет никаких препятствий к тому, чтобы некоторые работы в будущем были опубликованы не на венгерском, а на каком-нибудь другом языке, в этом случае, естественно, одно резюме будет венгерским.

Одна из дальнейших задач наших Трудов — также, как и раньше — дать представление о работе института; по этому публикуем перечень докладов, сделанных на наших семинарах, и короткие резюме докладов, содержащих новые еще не опубликованные результаты или ставящие нерешенные задачи. Этим докладчикам предоставляется возможность опубликовать в печати — как бы в виде предварительного сообщения — некоторые новые результаты еще до окончательной публикации их работ.

Чтобы наши труды более полно освещают работу института, мы также систематически помещаем список работ сотрудников института, опубликованных в других журналах или находящихся в печати. Конечно, эта картина и так неполная. Мы будем стараться найти возможность сообщать и о прочей деятельности института.

Еще несколько слов о наших планах на будущее.

Свежий ветер стряхнувшей с себя иго догматизма, свободной, творческой мысли, которым веет XX съезд Коммунистической Партии Советского Союза, означает для нас и то, что в сущности устраняются и те основанные на косных предассудках препятствия, которые до сих пор мешали практическому применению математических методов во многих областях науки (я имею в виду, например, биологию, кибернетику, политическую экономию). Мы надеемся, что это будет иметь свой результат и отразится уже в следующих томах наших трудов.

Наряду с началом освоения запущенных и нами областей приложения, в центре нашей работы по практическому приложению математики будут, конечно, и в дальнейшем находиться вопросы, связанные с техническим развитием промышленности, и в связи с этим, задачи, которые ставят перед математиками естественные науки, в первую очередь современная физика, и вопросы связанные с развитием земледелия.

С года на год все больше поручений получает наш институт от заводов, конструкторских бюро, научно-исследовательских институтов и т. д. на решение математических задач. Этими поручениями институт и в будущем — также, как и до сих пор — будет заниматься. Но эта работа станет вполне продуктивной лишь тогда, когда на больших заводах и в прочих учреждениях, где систематически встречаются математические задачи, будет свой математик, который будет помогать в нахождении задач и непрерывной работой на месте обеспечит фактическое использование результатов математических вычислений. Наш институт считает своей важной задачей помогать молодым математикам, работающим на заводах и в других учреждениях и в то же время очень много ожидает от их работы в отношении нахождения новых возможностей для приложения математических методов. В будущем мы хотим дать возможность сообщать в наших Трудах о своей работе, результатах и проблемах математикам, работающим в других местах.

Мы готовы обмениваться нашими трудами как с отечественными, так и с зарубежными специальными журналами. Таким образом мы хотим развивать нашу библиотеку, углублять связь института с отечественными и зарубежными научными учреждениями, а с помощью заграничного обмена укреплять международное научное сотрудничество математиков.

Для осуществления очерченных выше задач наших Трудов просим поддержку наших читателей. Просим сообщить им, что они ждут от наших трудов, что дает им журнал и какие недостатки они видят в нашей работе. Мы хотели бы, чтобы журнал связал всех, кому лежит на сердце культивирование математики, и ее практическое применение в целях развития науки и промышленности.

АЛФРЕД РЕНЬИ  
директор математического института  
Академия Наук Венгрии



## INTRODUCTION

The „Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences” is a periodical, published quarterly, continuing the series „Publications de l'Institut des Mathématiques Appliquées de l'Académie des Sciences de Hongrie”, of which three volumes have been published [Vol. I. (1952), Vol. II. (1953), Vol. III. (1954)]. The change of the title of our Publications is a consequence of the corresponding change of the name of our Institute. The Institute for Applied Mathematics of the Hungarian Academy of Sciences established on the 1<sup>st</sup> August 1950 has been reorganized and changed into the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences on the 1<sup>st</sup> August 1955. The reorganization and the change of name of the Institute were made necessary owing to the extension of the scope of the Institute. The Institute is now working not only in the field of applied mathematics, but in mathematics in general, including its applications. The reorganization of the Institute does not mean at all that the Institute works less on the practical applications of mathematics. On the contrary: one of the purposes of the reorganization of the Institute was to continue our work on applied mathematics on a larger theoretical basis and consequently on a higher level. Our aim is that pure mathematicians should come into contact with practical applications of mathematics and conversely, applied mathematicians with parts of pure mathematics necessary for their work. The possibility for such mutual contact and collaboration is much greater if both directions of research are cultivated in the frame of the same institute.

Since the reorganization two new research-groups have been organized in the Institute: one on the theory of functions under Prof. P. TURÁN, the other on functional analysis under Prof. B. SZÓKEFALVI-NAGY. The creation of other research-groups is also planned. We hope that after some years the fields of research of the various research-groups will together cover almost the whole of contemporary mathematics.

Our Publications intend — in spite of the omission of the attribute „applied” from its title — to publish in the future, similarly as in the past, in the first place original papers connected with the practical applications of mathematics. Of course, we don't intend to apply this principle rigidly and will occasionally publish also papers of more or less theoretical character. Our Publications are written not only for mathematicians, but intend also to call the attention of the experts of other sciences and different branches of engineering to new possibilities of the application of mathematics in their fields.

Our Publications are publishing in the first place papers written by members of the Institute, but are also at the disposal of anybody in our country or abroad wishing to publish new results connected with the applications of mathematics. In the present issue all papers are written in Hungarian with summaries in two world-languages, but we intend to publish also papers in any of the world-languages with two summaries, one of them being written in Hungarian.

Our Publications intend also to give insight in the work of our Institute. For this purpose we regularly intend to publish short summaries of lectures given in the Institute as well as a list of recent papers of members of the Institute published elsewhere.

The refreshing atmosphere brought by the XX. Congress of the Communist Party of the Soviet Union brushed aside many prejudices which hindered the applications of mathematical methods in some fields, e. g. biology and economics. We intend to increase our work in this directions and hope that this will be reflected in forthcoming issues of our Publications. Of course, the mathematical problems connected with physical and chemical problems, further with the technical development of industry and agriculture remain in the centre of our work. In this latter work our Institute closely collaborates with those young mathematicians, who after finishing the University are



now working in factories. We intend to give them opportunity in our Publications to report on their results and problems.

We are ready to establish exchange relations with any scientific periodical abroad publishing regularly original papers on pure and applied mathematics. In this way we hope to contribute to the further development of the international scientific collaboration of mathematicians.

We hope that our Publications will be a living tie between all those who are interested in the cultivation of mathematics and its applications.

A. RÉNYI

Director of the Mathematical  
Institute of the Hungarian  
Academy of Sciences



## AZ ENTRÓPIA FOGALMÁRÓL

BALATONI JÁNOS és RÉNYI ALFRÉD

### Bevezetés

Az entrópia fogalma száz évvel ezelőtt a termodinamikában alakult ki és R. CLAUSIUS nevéhez fűződik [1]. Ugyancsak CLAUSIUS-tól származik a termodinamika második főtétele, amely szerint egy zárt rendszer entrópiája állandóan növekszik. Az entrópia fogalmát és a második főtétele egyaránt új megvilágításba helyezte L. BOLTZMANN [2], aki egyrészt kimutatta, hogy az entrópia az állapot valószínűségének logaritmusával arányos, és ennek alapján bebizonyította, hogy egy zárt rendszer entrópiája nem bizonyosan, hanem csak igen nagy valószínűséggel növekszik, feltéve, hogy a rendszer kicsiny valószínűségű állapotban tartózkodik. BOLTZMANN másik nagy érdeme az általa  $H$ -függvénynek nevezett fogalom bevezetése. BOLTZMANN eredményei a termodinamikai entrópia-fogalmat lényegében teljesen tisztázták. BOLTZMANN zseniális gondolatait azonban az ő korában kevesen értették meg, és elmélete körül hosszú ideig folyt a vita; a felmerült ellenvetésekről, amelyek közül a legismertebb az úgynevezett LOSCHMIDT-féle „Umkehrwand” (irreverzibilitási ellenvetés; erről az alábbiakban lesz még szó), kiderült, hogy félreértésen alapulnak. A kérdés tisztázásához nagyban hozzájárultak P. és T. EHRENFEST munkái [3]. Az 1. §-ban röviden kitérünk a kérdésnek a valószínűségszámítás alapján való megvilágítására. Jelen dolgozat főcélja azonban nem a statisztikus mechanika entrópia-fogalmának tisztázása — ezt lényegében BOLTZMANN elvégezte — hanem a valószínűségszámítási entrópia-fogalom tisztázása. Ez a kérdés a legutóbbi években az információelmélettel kapcsolatban került az érdeklődés homlokterébe.

Az információelméletbe az entrópia fogalmát elsőnek C. SHANNON [4], [5] vezette be és mutatta ki annak alapvető jelentőségét az információ továbbításának matematikai tárgyalásával kapcsolatban.

A BOLTZMANN-féle  $H$ -függvény és az információelméleti entrópia egy általánosabb fogalom, a valószínűségszámítási entrópia-fogalom speciális alkalmazásai. Dolgozatunkban az általános valószínűségszámítási entrópia-fogalommal foglalkozunk. A statisztikus mechanika entrópia-fogalma, a BOLTZMANN-féle  $H$ -függvény és a valószínűségszámítási entrópia-fogalom összefüggésével az 1. §-ban foglalkozunk.

SHANNON meg gondolásai matematikai szempontból nem voltak teljesen kidolgozottak. A kérdés első, matematikailag teljesen szabatos tárgyalását A. J. HINCSIN adta meg [6], a diszkrét valószínűség-eloszlásokra vonat-



kozólag. Tetszőleges valószínűség-eloszlások entrópiájával HINC SIN nem foglalkozik, bár SHANNON vizsgálataiban és általában az információelméletben folytonos eloszlások entrópiája szerepet játszik, és ezzel kapcsolatban a kérdés tüzetes matematikai tisztázásának hiánya még szembetűnőbb, mint a diszkrét valószínűség-eloszlások esetében.

Jelen dolgozat szerzői azt a célt tűzték ki maguk elé, hogy HINC SIN dolgozatából kiindulva az ő általa megadott tárgyalásmódot kiterjesszék tetszőleges valószínűség-eloszlásokra. A vizsgálatok során kitűnt, hogy ehhez a valószínűség-számítási entrópia-fogalom lényeges továbbfejlesztésére van szükség. Mielőtt a kapott eredményeket röviden összefoglalnánk, néhány szóval meg kívánjuk világítani a valószínűség-számítási entrópia-fogalom jelentését. Egy tetszőleges valószínűség-eloszlás úgy fogható fel, hogy megadja, hogy valamely, a véletlentől függő szituáció (kísérlet, megfigyelés, stb.) lehetséges kimenetelei (a lehetséges események) között a bizonyosság egységnyi valószínűsége hogyan oszlik meg. Minden valószínűség-eloszlás felfogható mint egy mérték a lehetséges események terében. Mi itt csak olyan valószínűség-eloszlásokkal foglalkozunk, amelyeknél a bekövetkezendő esemény egy vagy több valós számmal, tehát az  $n$ -dimenziós euklidesi tér egy pontjával jellemezhető. Másszóval, kizárólag valószínűségi változók vagy általában vektor-változók valószínűség-eloszlásával, vagyis véges-dimenziós euklidesi terekben megadott valószínűség-eloszlásokkal foglalkozunk. A vizsgálatok kiterjesztése tetszőleges elemekből álló eseményterek valószínűség-eloszlásaira elég kézenfekvő; erre a kérdésre egy további dolgozatban kívánunk visszatérni.

Vizsgáljuk először egy  $\xi$  valószínűségi változó eloszlását. Ha ez az eloszlás nem elfajult, vagyis  $\xi$  nem egyenlő bizonyosan (1 valószínűséggel) egy  $c$  állandóval, akkor  $\xi$  értékére vonatkozólag bizonyos *bizonytalanság* áll fenn. A kérdés, amelyre a valószínűség-számítási entrópia-fogalom választ ad, a következő: hogyan lehet a  $\xi$  értékére vonatkozó bizonytalanságot egy olyan mérőszámmal jellemezni, amely csak  $\xi$  valószínűség-eloszlásától függ, olymódon, hogy bármely két valószínűségi változó (illetve bármely két valószínűség-eloszlás) bizonytalanságát össze tudjuk hasonlítani és meg tudjuk mondani, hogy melyikre vonatkozólag nagyobb a bizonytalanság. Egy valószínűség-eloszlás entrópiáján az illető eloszlással bíró valószínűségi változó véletlentől függő értékére vonatkozó bizonytalanság mértékét értjük, vagyis röviden: *a valószínűség-számításban az entrópia a bizonytalanság mértékszám.*

Ha  $\xi$  véges diszkrét eloszlású, mégpedig az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  értékeket ( $x_i \neq x_j$ , ha  $i \neq j$ ) rendre  $p_1, p_2, \dots, p_n$  valószínűséggel veszi fel (vagyis  $P(\xi = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots, n$ , és így  $p_k \geq 0$  és  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ ), akkor, mint HINC SIN kimutatta, bizonyos egyszerű és természetes követelményekből kiindulva a  $\xi$  változó értékére vonatkozó „bizonytalanság” mértékének, amelyet  $H_0(\xi)$ -vel jelölünk és  $\xi$  entrópiájának nevezünk, a következőnek kell lennie:

$$H_0(\xi) = -\lambda \sum_{k=1}^n p_k \log p_k,$$

ahol  $\lambda$  pozitív szám, amelynek megválasztása önkényes, konvenció kérdése.  $\lambda$  megválasztása tulajdonképpen az entrópia egységének megválasztásával



ekvivalens, ami ugyanabban a mértékben konvenció kérdése, mint egy fizikai mennyiség mértékegységének megválasztása. Az információelméletben  $\lambda$ -nak az  $1/\log 2$  értékét szokták adni, ami azt jelenti, hogy egy diszkrét valószínűségeloszlás entrópiáját a

$$(1) \quad H_0(\xi) = - \sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k$$

SHANNON-féle képlettel definiálják, ahol  $\log_2$  a 2 alapú logaritmust jelöli. Ez azt jelenti, hogy az entrópia (bizonytalanság) egységéül az egyszerű alternatívában rejlő bizonytalanságot<sup>1)</sup> választják, tehát annak a  $\xi$  valószínűségi változónak tulajdonítanak egységni entrópiát, amely az  $a$  és  $b$  értéket ( $a \neq b$ )  $1/2$  valószínűséggel vesz fel.

Ilyen módon például egy pénzdarab feldobásának (a „fej vagy írás” kísérletnek) vagy egy a  $(0,1)$  intervallumban találomra (egyenletes eloszlással) választott szám diadikus kifejtése meghatározott sorsszámú jegyének az entrópiája 1-gyel egyenlő.

Az (1)-gyel definiált entrópia a bizonytalansági mértékszámától megkívánható összes tulajdonságokkal rendelkezik.

Ezek a tulajdonságok a következők:

1. Ha  $\mathbf{P}(\xi = c) = 1$ , vagyis ha  $\xi$  1 valószínűséggel állandó, akkor  $H_0(\xi) = 0$ , minden más esetben  $H_0(\xi) > 0$ ; ha  $\xi$  és  $\eta$  egyforma eloszlású valószínűségi változók,  $H_0(\xi) = H_0(\eta)$ , vagyis  $H_0(\xi)$  csak  $\xi$  eloszlásától függ.

2.1. Ha  $\eta = f(\xi)$ , ahol  $f(x)$  egyrétű függvény, vagyis ha  $x \neq x'$ , akkor  $f(x) \neq f(x')$ , akkor  $H_0(\eta) = H_0(\xi)$ , vagyis  $\xi$  értékei közömbösek az entrópia szempontjából, csak az számít, hogy a különböző értékeknek mekkora a valószínűsége.

2.2. Ha  $\eta = f(\xi)$ , ahol  $f(x)$  egy tetszőleges függvény, akkor  $H_0(\eta) \leq H_0(\xi)$ , mégpedig, ha legalább két érték, pl.  $x_k$  és  $x_l$  olyan, hogy  $x_k \neq x_l$ ,  $p_k > 0$  és  $p_l > 0$ , továbbá  $f(x_k) = f(x_l)$ , akkor  $H_0(\eta) < H_0(\xi)$ <sup>2)</sup>.

3.1. Legyen  $\xi$  és  $\eta$  két diszkrét, véges valószínűségi változó,  $\mathbf{P}(\xi = x_j) = p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) és  $\mathbf{P}(\eta = y_k) = q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), és az  $\eta = y_k$  feltétel mellett  $\xi$  feltételes valószínűség-eloszlásának entrópiája legyen

$$(2) \quad H_0(\xi|\eta = y_k) = - \sum_{j=1}^m p_{j|k} \log_2 p_{j|k},$$

ahol  $p_{j|k} = \mathbf{P}(\xi = x_j|\eta = y_k)$ , és jelölje  $H_0(\xi, \eta)$  a  $\xi$  és  $\eta$  változók együttes eloszlásának, vagyis az

$$r_{j,k} = \mathbf{P}(\xi = x_j, \eta = y_k) \quad (j = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n)$$

<sup>1)</sup> Az entrópia (bizonytalanság) egységét az angol nyelvű szakirodalomban „bit”-nek nevezik, ami a „binary digit” (diadikus számjegy) rövidítése.

<sup>2)</sup> Ez abból következik, hogy ha  $x > 0$ ,  $y > 0$  és  $x + y \leq 1$ , akkor

$$x \log \frac{1}{x} + y \log \frac{1}{y} \geq (x + y) \log \frac{1}{x + y}.$$



valószínűség-eloszlásnak (másszóval a  $\vec{\zeta} = (\xi, \eta)$  síkbeli valószínűségi vektor-változó eloszlásának) az entrópiáját, vagyis legyen

$$(3) \quad H_0(\xi, \eta) = - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n r_{j,k} \log_2 r_{j,k}.$$

Legyen továbbá  $\chi = H_0(\xi|\eta)$  az a valószínűségi változó, amely a  $H_0(\xi|\eta = y_k)$  értéket  $q_k$  valószínűséggel veszi fel ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), és legyen  $\overline{H_0(\xi|\eta)}$  a  $\chi$  valószínűségi változó várható értéke, vagyis legyen

$$(4) \quad \overline{H_0(\xi|\eta)} = \sum_{k=1}^n q_k H_0(\xi|\eta = y_k),$$

akkor

$$(5) \quad H_0(\xi, \eta) = H_0(\eta) + \overline{H_0(\xi|\eta)}.$$

Speciálisan, ha  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek, akkor

$$H_0(\xi|\eta = y_k) = H_0(\xi), \quad (k = 1, 2, \dots, n) \text{ és így } \overline{H_0(\xi|\eta)} = H_0(\xi).$$

vagyis ez esetben

$$(6) \quad H_0(\xi, \eta) = H_0(\xi) + H_0(\eta).$$

Ebből következik, hogy ha  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  független valószínűségi változók és  $H_0(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  jelöli a  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  valószínűségi változók együttes eloszlásának entrópiáját, akkor

$$(7) \quad H_0(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{k=1}^n H_0(\xi_k),$$

vagyis *független valószínűségi változók együttes eloszlásának entrópiája egyenlő az egyes változók entrópiáinak összegével.*

3.2. Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  tetszőleges véges diszkrét eloszlású valószínűségi változók, amelyek azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy értékkészleteik idegenek, vagyis

$$P(\xi_i = x) P(\xi_j = x) = 0,$$

ha  $i \neq j$ , bármely  $x$ -re ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), vagyis bármely  $x$  számot a  $\xi_k$  változók közül legfeljebb az egyik vehet fel pozitív valószínűséggel. Képezzük ezen eloszlások keverékét a  $q_1, q_2, \dots, q_n$  súlyokkal, vagyis az  $\eta$  valószínűségi változó legyen  $q_k$  valószínűséggel egyenlő  $\xi_k$ -val ( $k = 1, 2, \dots, n$ ); akkor

$$(8) \quad H_0(\eta) = \sum_{k=1}^n q_k H_0(\xi_k) - \sum_{k=1}^n q_k \log_2 q_k,$$

vagyis *a keverékeloszlás entrópiája egyenlő a keverék komponensei entrópiájának a keverő eloszlással súlyozott középértékének és a keverő eloszlás entrópiájának összegével, feltéve, hogy a kevert eloszlások idegenek a fenti értelemben (vagyis ha nincs olyan  $x$  szám, amelyet a  $\xi_k$  változók közül egy-nél több venne fel pozitív valószínűséggel).*



Megjegyzendő, hogy a 3.2. tulajdonság a 3.1. tulajdonságból következik. Ugyanis, ha  $\zeta = k$ , feltéve, hogy  $\eta = \xi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), akkor  $\eta$  és  $\zeta$  együttes eloszlása azonos  $\eta$  eloszlásával, és így (6) szerint

$$(9) \quad H_0(\eta) = H_0(\eta, \zeta) = H_0(\zeta) + \overline{H_0(\eta|\zeta)};$$

továbbá

$$(10) \quad \overline{H_0(\eta|\zeta)} = \sum_{k=1}^n q_k H_0(\xi_k)$$

és

$$(11) \quad H_0(\zeta) = - \sum_{k=1}^n q_k \log_2 q_k.$$

A (9), (10) és (11) összefüggésekből következik (8).

4.  $H_0(\xi)$  folytonosan függ  $\xi$  eloszlásától, vagyis bármely pozitív  $\varepsilon$ -hoz és bármely rögzített  $N$  természetes számhoz megadható olyan  $\delta > 0$  szám, hogy ha

$$\mathbf{P}(\xi = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (x_i \neq x_k, \text{ ha } i \neq k)$$

és

$$\mathbf{P}(\eta = y_k) = q_k, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (y_i \neq y_k, \text{ ha } i \neq k)$$

továbbá

$$|p_k - q_k| \leq \delta, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

akkor

$$|H_0(\xi) - H_0(\eta)| \leq \varepsilon.$$

5. Ha  $\xi$  lehetséges értékeinek száma,  $n$ , adott, akkor  $\xi$  entrópiája akkor maximális, ha  $\xi$  az  $n$  különböző érték mindegyikét ugyanazzal a valószínűséggel (tehát  $1/n$  valószínűséggel) veszi fel, vagyis ha  $\xi$  lehetséges értékei  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , akkor

$$(12) \quad H_0(\xi) \leq \log_2 n.$$

HINCSIN bebizonyította, hogy a 2.1., 3.1., 4. és 5. tulajdonságok az entrópiát egy pozitív konstans faktortól eltekintve meghatározzák. A 3. §-ban meg fogjuk mutatni, hogy az 1., 2.1., 3.2. és 4. tulajdonságok is meghatározzák az entrópiát egy konstans faktortól eltekintve.

Ha  $\xi$  végtelen diszkrét eloszlású, vagyis  $\mathbf{P}(\xi = x_k) = p_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), definiálhatjuk  $\xi$  entrópiáját a

$$(13) \quad H_0(\xi) = - \sum_{k=1}^{\infty} p_k \log_2 p_k$$

képlettel, ha a (13) jobboldalán álló sor konvergens; ebben az esetben azonban lehetséges, hogy a (13) jobboldalán álló sor divergens lesz; legyen ekkor definíciószerűen  $H_0(\xi) = +\infty$ , vagyis ilyenkor azt mondjuk, hogy  $\xi$  entrópiája végtelen nagy.<sup>3)</sup>

Megemlítjük még az entrópia következő fontos tulajdonságait, amelyek elvezetnek az entrópia-fogalom információelméleti jelentőségének megértéséhez.

<sup>3)</sup> E dolgozatban nem foglalkozunk végtelen nagy entrópiájú valószínűségeloszlásokkal.



6.1. Ha  $\xi$  és  $\eta$  tetszőleges diszkrét eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$(14) \quad H_0(\xi, \eta) \leq H_0(\xi) + H_0(\eta);$$

egyenlőség csak akkor áll fenn, ha  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek.

Ez a tulajdonság a következő ekvivalens alakra is hozható:

6.2. Ha  $\xi$  és  $\eta$  tetszőleges diszkrét eloszlású valószínűségi változók

$$(15) \quad \overline{H_0(\xi|\eta)} \leq H_0(\xi).$$

A

$$(16) \quad \Delta(\xi, \eta) = H_0(\xi) + H_0(\eta) - H_0(\xi, \eta) = H_0(\xi) - \overline{H_0(\xi|\eta)}$$

mennyiség információelméleti jelentősége a következő: Ha a  $\xi$  valószínűségi változó a leadott jel, és  $\eta$  a felvett jel (amely nem azonos  $\xi$ -vel zavaró körülmények, pl. zaj folytán), akkor  $\Delta(\xi, \eta) = H_0(\xi) - \overline{H_0(\xi|\eta)}$  megadja, hogy mennyivel csökken a  $\xi$  értékére vonatkozó bizonytalanság átlagban azáltal, hogy  $\eta$  értékét megfigyeljük;  $\Delta(\xi, \eta)$  tehát a  $\xi$ -re vonatkozólag  $\eta$ -ból nyert információ mennyiségeként értelmezhető. A (15) egyenlőtlenség tehát úgy értelmezhető, hogy  $\eta$  megfigyelése mindig nyújt valami információt  $\xi$ -re nézve, a  $\xi$  értékére vonatkozó bizonytalanság  $\eta$  megfigyelésével átlagban csak csökkenhet. Ha  $\eta = f(\xi)$ , ahol  $f(x) \neq f(x')$ , ha  $x \neq x'$ , vagyis, ha különböző leadott jeleknek különböző felvett jelek felelnek meg (tehát  $\eta$  értékéből  $\xi$  értékére egyértelműen lehet következtetni), akkor  $H_0(\xi|\eta) = 0$ , hiszen adott  $\eta$  mellett  $\xi$  1 valószínűséggel állandó, tehát  $\Delta(\xi, \eta) = H_0(\xi)$ , vagyis  $\eta$  megfigyelése teljes információt nyújt  $\xi$ -re nézve. A másik véglet, amikor  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek; ez esetben  $H_0(\xi|\eta = y_k) = H_0(\xi)$ , tehát  $\overline{H_0(\xi|\eta)} = H_0(\xi)$  és így  $\Delta(\xi, \eta) = 0$ ; ez esetben tehát  $\eta$  megfigyelése  $\xi$ -re vonatkozólag semmi információt nem ad; ez szemléletesen is evidens, hiszen a függetlenség éppen azt jelenti, hogy semmilyen kapcsolat  $\xi$  és  $\eta$  értékei között nem áll fenn. Érdekes megjegyezni, hogy  $\Delta(\xi, \eta) = \Delta(\eta, \xi)$ , tehát  $\eta$  ugyanannyi információt nyújt  $\xi$ -re nézve, mint  $\xi$   $\eta$ -ra nézve.

7. Ha  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  tetszőleges, diszkrét eloszlású valószínűségi változók, és  $q_1, q_2, \dots, q_n$  tetszőleges pozitív súlyok,  $\sum_{k=1}^n q_k = 1$ , továbbá  $\xi$  eloszlása a  $\xi_k$  változók eloszlásainak  $q_k$  súlyokkal vett keveréke, akkor

$$(17) \quad H_0(\xi) \leq \sum_{k=1}^n q_k H_0(\xi_k) - \sum_{k=1}^n q_k \log_2 q_k$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a  $\xi_k$  változók tényleges értékkészletei idegenek.

(17) úgy látható be legegyszerűbben, hogy először a  $\xi_k$  változók értékkészletét úgy módosítjuk, hogy azok idegenek legyenek; ez esetben (17)-ben egyenlőség áll fenn; ezután visszatérünk az eredeti  $\xi_k$  változókra; eközben (17) jobboldala változatlan, baloldala azonban a 2.2. tulajdonság értelmében csökken.

8. Legyenek egy kísérlet lehetséges kimenetelei az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  események és legyen  $A_k$  valószínűsége  $p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Ha egyszer végre-



hajtjuk a kísérletet és annak eredménye az  $A_k$  esemény, az eredmény valószínűségének reciprok értékének 2 alapú logaritmus,  $-\log_2 p_k$  valószínűségi változónak tekinthető. Ennek várható értéke,  $-\sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k$ , éppen a kísérlet entrópiája. Az entrópia ilyen értelmezésének jelentőségét az alábbi megmondolás mutatja meg: Ismételjük meg a kísérletet egymásután  $N$ -szer és jelölje  $N_k$  azoknak a kísérleteknek a számát, amelyeknél az  $A_k$  esemény következett be. Egy ilyen kísérletsoroztnak az eredmények sorrendjét is figyelembevéve a valószínűsége nyilván  $P = p_1^{N_1} \cdot p_2^{N_2} \dots p_n^{N_n}$ . Mivel az  $N_1, N_2, \dots, N_n$  számok valószínűségi változók, maga  $P$  is annak tekinthető. Számítsuk ki  $\log_2 P$  várható értékét:

$$\overline{\log_2 P} = \sum \bar{N}_k \log_2 p_k = N \sum p_k \log_2 p_k = -NH_0,$$

ahol  $H_0$  jelenti a kísérlet entrópiáját. Mivel az  $N_k$  változók között negatív korreláció áll fenn, ha  $D^2(\xi)$  jelenti a  $\xi$  valószínűségi változó szorzásnégyzetét,

$$D^2(\log_2 P) \leq \sum D^2(N_k) \log_2^2 p_k = N \sum_{k=1}^n p_k (1 - p_k) \log_2^2 p_k.$$

Ennélfogva  $\log_2 P$  a  $-NH_0$  középérték körül általában  $\sqrt{N}$  nagyságrendű ingadozásokat végez, vagyis  $(\log_2 P)/N$  általában igen közel lesz  $-H_0$ -hoz, vagyis nagy valószínűséggel

$$P \sim 2^{-NH_0}.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazásával könnyen belátható, hogy körülbelül  $2^{NH_0}$ , egyenként közelítőleg  $2^{-NH_0}$  valószínűségű lehetséges eredményssorozat van, a többi  $n^N - 2^{NH_0}$  lehetséges eredményssorozat együttvéve is kicsiny valószínűségű. Röviden úgy lehetne jellemezni a helyzetet, hogy a kísérletet  $N$ -szer megismételve, ha  $N$  nagy szám, a helyzet közelítőleg olyan lesz, mintha minden egyes kísérletnek  $2^{H_0}$  számú lehetséges, egyforma valószínűségű kimenetele volna, vagyis a szóbanforgó kísérlet eredménye körülbelül ugyanannyira bizonytalan, mint egy olyan kísérlet eredménye, amelynek  $2^{H_0}$  számú egyformán valószínű eredménye lehetséges.

Megjegyzendő, hogy ha ahelyett, hogy  $-\log_2 P$  várható értékét vesszük, tekintjük  $P$  várható értékének reciprokának logaritmusát,  $H_0 = -\sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k$  helyett a  $q_0 = -\log_2 \sum_{k=1}^n p_k^2$  kifejezésre jutunk. Abban az esetben, ha  $p_k = 1/n$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $q_0 = H_0$ , egyébként (a logaritmusfüggvény konkávitása folytán)  $q_0 < H_0$ .  $q_0$  is tekinthető a bizonytalanság mértékének, ez azonban kevésbé érzékeny, mint  $H_0$ , és ezért nem olyan alkalmas a bizonytalanság mérésére, mint  $H_0$ .

Ha  $\xi$  abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó és  $\xi$  sűrűségfüggvénye  $f(x)$ , akkor SHANNON  $\xi$  entrópiáját a

$$(18) \quad - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x) dx$$



kifejezéssel definiálja. A (18) kifejezés bizonyos hasonlóságot mutat az (1) kifejezéssel, azonban attól sok szempontból különbözik. Így például a (18) definíció szerint a  $(0, a)$  intervallumban egyenletes valószínűség-eloszlás entrópiája  $\log_2 a$ , tehát egy folytonos eloszlás entrópiája *negatív* értékeket is felvehet, hiszen ha  $0 < a < 1$ , akkor  $\log_2 a < 0$ . Ebből a megjegyzésből is látszik, hogy a diszkrét és folytonos eloszlás entrópiái nem tekinthetők ugyanazon fajta mennyiségeknek és nem hasonlíthatók egyszerűen számértékük alapján össze, hiszen lehetetlen, hogy a  $(0, a)$  intervallumban egyenletes eloszlás bizonytalanságának mértéke, ha  $a < 1$ , kisebb legyen, mint egy konstans folytonos eloszlás entrópiája *magasabb* „dimenziójú”, mint egy diszkrét eloszlás entrópiája: bármely abszolút folytonos eloszlás entrópiája, tekintet nélkül a (18) képlet által megadott számértékre, „nagyobb”, mint bármely diszkrét eloszlás entrópiája, tekintet nélkül utóbbi számértékére.<sup>4)</sup> Erre való tekintettel a (18) kifejezés által definiált entrópiát egydimenziójú entrópiának nevezzük — szemben a diszkrét eloszlások entrópiájával, amelyet 0-dimenziójú entrópiának nevezünk, és a  $\xi$  abszolút folytonos eloszlású valószínűségű változó (18) által definiált entrópiáját  $H_1(\xi)$ -vel jelöljük; vagyis ha  $\xi$  sűrűségfüggvénye  $f(x)$ ,

$$(19) \quad H_1(\xi) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x) dx.$$

Ezen összehasonlításra való tekintettel jelöltük kezdettől fogva a diszkrét eloszlású valószínűségi változók entrópiáját  $H_0$ -lal.

A tüzetesebb vizsgálat kimutatta, hogy a 0 dimenziójú és 1 dimenziójú entrópián kívül még végtelen sok más fajta entrópia is van. Bármely  $\xi$  valószínűségi változóhoz, amelynek van entrópiája, tartozik egy meghatározott  $d$  szám ( $0 \leq d \leq 1$ ), amelyet  $\xi$  eloszlása dimenziójának nevezünk, továbbá tartozik egy  $H_d(\xi)$  számérték (ha  $d = 0$ ,  $0 \leq H_0(\xi) \leq +\infty$ , ha  $0 < d \leq 1$ , akkor  $-\infty \leq H_d(\xi) \leq +\infty$ ), amelyet  $d$ -dimenziójú entrópiának nevezünk. Ha  $\xi$  eloszlása  $d$ -dimenziójú és  $0 \leq c < d$ , akkor  $H_c(\xi) = +\infty$  ha pedig  $d < c \leq 1$ , akkor  $H_c(\xi) = -\infty$ . Minden 0 és 1 közé eső  $d$  számhoz tartoznak olyan valószínűségi változók, amelyek eloszlása pontosan  $d$  dimenziójú, rögzített  $d$  érték mellett a  $H_d(\xi)$  dimenziójú entrópia számértéke még  $-\infty$ -tól  $+\infty$ -ig változik; ha  $0 \leq d_1 < d_2 \leq 1$  és  $\xi$  és  $\eta$  két olyan valószínűségi változó, hogy  $\xi$  eloszlása  $d_1$  dimenziójú,  $\eta$  eloszlása pedig  $d_2$  dimenziójú, akkor  $\xi$  entrópiája — számértékre való tekintet nélkül — kisebbnek tekintendő, mint  $\eta$  entrópiája, tekintet nélkül utóbbi számértékére.

Ha  $\xi$  egy diszkrét eloszlású,  $\eta$  pedig abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó, és  $\zeta$  eloszlása  $\xi$  és  $\eta$  eloszlásának  $b$  és  $c = 1 - b$  súlyokkal való keverésével származtatható, akkor  $\zeta$  eloszlása  $c$ -dimenziójú.

<sup>4)</sup> Ezt megvilágítja például a következő megjegyzés is: a  $(0, 1)$  intervallum egy  $x$  pontjának meghatározásához végtelen sok diadikus jegy megadása szükséges; ha ezek mindegyike  $1/2$  valószínűséggel a 0 és  $1/2$  valószínűséggel az 1 értéket veszi fel, egymástól függetlenül, akkor, mint jól ismeretes, maga az  $x$  szám egyenletes eloszlású lesz a  $(0, 1)$  intervallumban. Az egyes jegyek entrópiájának össze kell adódnia, tehát egy a  $(0, 1)$ -ben egyenletes eloszlású  $\xi$  valószínűségi változóra  $H_0(\xi) = 1 + 1 + \dots + 1 + \dots = +\infty$ . Ezzel szemben  $H_1(\xi) = 0$ .



Ilyenmódon tehát a különböző valószínűség-eloszlások entrópiái ábrázolására nem elegendő egyetlen számskála, hanem kontinuum számosságú különböző számskálákra van szükség.

A 2. §-ban azzal foglalkozunk, hogyan lehet megállapítani, hogy egy valószínűség-eloszlásnak mi a dimenziója, s ha ez  $d$ , akkor  $d$ -dimenziójú entrópiájának mi az értéke.

A 3. §-ban azzal foglalkozunk, hogy kimutatjuk, hogyan lehet a dimenzió és az entrópia bizonyos plauzibilis tulajdonságainak posztulálásával az entrópia kifejezését levezetni, vagyis az entrópia általános definícióját ugyanolyan módon megalapozni, ahogyan ezt HINCSIN a 0-dimenziójú entrópiára vonatkozólag megtette.<sup>5)</sup>

Az entrópiafogalommal az elmúlt években SZILÁRD L. [7], GÁBOR D. [8] és D. BRILLOUIN [9] — [12] más vonatkozásban is foglalkoztak: a fizikai kísérlet bizonytalanságának és a megfigyelt rendszer entrópiájának összefüggését vizsgálták; új szempontokból vizsgálták a kérdést J. VILLE [13] és A. BLANC-LAPIERRE [14] is; túl messze vezetne, ha mindezekre a kérdésekre itt részletesen kitérnénk.

# I. §. A statisztikus mechanikai entrópia, a Boltzmann-féle $H$ -függvény és a valószínűségszámítás entrópia-fogalma közötti összefüggés<sup>6)</sup>

E § célja annak tisztázása, hogy a valószínűségszámítási entrópia-fogalom hogyan függ össze a statisztikus mechanika entrópia-fogalmával. A kérdést az egyszerűség kedvéért az ideális gáz példáján igyekszünk megvilágítani. Ha  $N$  számú, egyenként  $m$  tömegű atomból álló egyatomos gáz hőmérséklete  $T$ , és a gáz egy  $V$  köbtartalmú edénybe van bezárva, akkor — ha a gázt elegendő ideig magára hagyjuk — az atomok ütközése következtében egy olyan állapot fog kialakulni, amelyben az atomok eloszlása az edényben közel egyenletes lesz, és az atomok sebessége közelítőleg a Maxwell-eloszlást követi, vagyis az atomok sebességének komponensei egymástól függetlenek és külön-külön közelítőleg normális eloszlásúak, 0 várható értékkel és  $\sigma = \sqrt{kT/m}$  szórással, ahol  $k$  a BOLTZMANN-féle állandó. A gáz egy találatra „kiválasztott” atomjának helye tehát az egész edényben egyenletes eloszlású, 3-dimenziós valószínűségi vektorváltozónak, az atom sebességének komponensei egymástól és az atom helyétől független normális eloszlású valószínűségi változóknak tekinthetők.

A 3. §-ban meg fogjuk mutatni, hogy érvényes a következő két tétel (lásd: a (101) és (105) egyenleteket):

A) Ha a  $\vec{\xi}$   $n$ -dimenziós valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye  $f(\mathbf{x})$ , ahol  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , akkor  $n$ -dimenziós entrópiája

<sup>5)</sup> Jelen dolgozat nyomdába adása után jelent meg D. K. FAGGYEJEV egy dolgozata [Д. К. ФАДДЕЕВ: „К понятию энтропии конечной вероятностной схемы.” Успехи Математических Наук 11(1956) 227—231], melyben a 0-dimenziójú entrópiának néhány egyszerű tulajdonságával való jellemzését adja, valamivel kevesebb feltetéssel mint A. J. HINCSIN.

<sup>6)</sup> E §-ban mindenütt természetes logaritmust használunk 2 alapú logaritmus helyett, mert a statisztikus mechanikában ez a szokásos.



$$(20) \quad \mathbf{H}_n(\vec{\zeta}) = - \int f(\mathbf{x}) \log f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

ahol  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$  és az integrál az egész  $n$ -dimenziós térre terjesztendő ki. Speciálisan, ha  $\vec{\zeta}$  eloszlása egyenletes a  $V$  köbtartalmú  $n$ -dimenziós tartományban, (20)-ból következik, hogy

$$(21) \quad \mathbf{H}_n(\vec{\zeta}) = \log V.$$

*B)* Ha  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  független, abszolút folytonos eloszlású változók, együttes eloszlásuk  $n$ -dimenziós entrópiája egyenlő az egyes változók 1-dimenziós entrópiáinak összegével.

Az *A)* és *B)* tételeken kívül szükségünk lesz továbbá a normális eloszlás entrópiájának kifejezésére. Ha  $\xi$  normális eloszlású,  $m$  várható értékkel és  $\sigma$  szórással, akkor sűrűségfüggvénye  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ , tehát

$$(22) \quad \mathbf{H}_1(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left( \log \sqrt{2\pi}\sigma + \frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx = \log \sigma \sqrt{2\pi e}.$$

Ennélfogva, ha  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  jelölik egy atom sebességének koordinátáit és  $\vec{\zeta}$  a helyzetét jellemző vektort, akkor az atomok, illetve az azt jellemző  $\vec{a} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \vec{\zeta})$  6-dimenziós valószínűségi vektorváltozónak az entrópiája, (21) és (22), valamint *B)* szerint:

$$(23) \quad \mathbf{H}_6(\vec{a}) = \mathbf{H}_1(\xi_1) + \mathbf{H}_1(\xi_2) + \mathbf{H}_1(\xi_3) + \mathbf{H}_1(\vec{\zeta}) = 3 \log(\sigma \sqrt{2\pi e}) + \log V.$$

Figyelembe véve, hogy  $\sigma = \sqrt{\frac{kT}{m}}$ , következik, hogy

$$(24) \quad \mathbf{H}_6(a) = \frac{3}{2} \log T + \log V + \frac{3}{2} \log \frac{2\pi ek}{m}.$$

Mivel minden egyes atomnak ennyi az entrópiája, ha összesen  $N$  atom van jelen, az egész  $T$  gáz entrópiája

$$(24) \quad \mathbf{H}_{6N}(T) = N \left( \frac{3}{2} \log T + \log V + \frac{3}{2} \log \frac{2\pi ek}{m} \right).$$

Az entrópia termodinamikai definíciója, mint ismeretes, a logaritmus alapjának választásától és a  $k$  faktortól eltekintve, ugyanerre az eredményre vezet, vagyis, ha  $S$  jelöli a termodinamikai entrópiát,

$$(26) \quad S = kN \left( \frac{3}{2} \log T + \log V + c \right)$$



ahol a  $c$  konstans értéke nem függ sem a köbtartalomtól, sem a hőmérséklettől.<sup>7)</sup>

BOLTZMANN [2] az úgynevezett  $H$ -függvényt<sup>8)</sup> a

$$(27) \quad H = \int f(x) \log f(x) dx$$

képlettel definiálta, vagyis (a logaritmus alapjának megválasztásától eltekintve) a BOLTZMANN-féle  $H$ -függvény azonos a valószínűség-számítási entrópia ( $-1$ )-szeresével.

Az elmondottak a legvalószínűbb állapotra vonatkoztak; azt kapjuk, hogy a BOLTZMANN-féle  $H$ -függvény értékének  $(-1/\log 2)$ -szerese azonos a rendszer valószínűség-számítási entrópiájával. Most vizsgáljuk a statisztikus mechanikai entrópiát, amelyre a BOLTZMANN-féle  $S = k \log W = -H + C$  képlet érvényes, ahol  $W$  a pillanatnyi állapot valószínűsége,  $H$  meg az állapothoz tartozó  $H$ -függvény. Mivel maga a pillanatnyi állapot valószínűségi változó, az  $S$  entrópia és a  $H$ -függvény is az. A legvalószínűbb állapot entrópiája tehát az entrópiának, mint valószínűségi változónak a maximális értéke.

Nagy számú részecskékből álló rendszer esetében  $S$  általában (az idő legnagyobb részében) közel lesz a maximális értékhez. Ez az oka annak, hogy az entrópiát, mint állapothatározót, és ennek maximumát gyakran összecserélik; azonban a kérdés teljes tisztázása érdekében a két fogalom, az entrópia mint állapothatározó (amely tehát *valószínűségi változó*) és a maximális (vagy valószínűség-számítási) entrópia, mint a rendszert (az eloszlást) jellemző *konstans* adat között helyes különbséget tenni.

Nem segíti persze elő a fogalmak tisztázását, hogy mind a két mennyiséget entrópiának nevezik. Mivel nem akarunk a kialakult terminológiától eltérni, csak azt szögezzük le még egyszer, félreértések elkerülése végett, hogy a valószínűség-eloszlás entrópiájának a statisztikus mechanikában nem az entrópia, hanem egy konstans faktortól eltekintve annak maximuma: az egyensúlyi állapot entrópiája felel meg.

<sup>7)</sup> Ezt, mint ismeretes, a következőképpen bizonyítják be: Ha  $S$  jelöli a termodinamikai entrópiát, akkor

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

ahol  $dQ$  a gázzal (reverzibilisen) közölt hőmennyiséget jelenti;  $dQ = dE + p dV$ , ahol  $E$  a gáz kinetikus energiáját,  $p$  a nyomását és  $V$  a térfogatát jelenti. Ha a kinetikus gázelméletből jól ismert  $E = 3/2 kTN$  képletet, továbbá a  $pV = NkT$  gáztörvényt felhasználjuk, következik, hogy

$$dQ = \frac{3}{2} NkT + NkT \frac{dV}{V},$$

tehát

$$dS = \frac{3}{2} Nk \frac{dT}{T} + Nk \frac{dV}{V} \text{ és így } S = Nk \left( \frac{3}{2} \log T + \log V + c \right)$$

vagyis, mivel az additív állandó a termodinamikában önkényesen választható, tehát a termodinamikai entrópia egy konstans faktortól eltekintve egyenlő a gáz valószínűség-számítási entrópiájával.

<sup>8)</sup> A  $H$ -függvény elnevezés nem szerencsés, hiszen valójában egy eloszláshoz, illetve sűrűségfüggvényhez rendelt funkcionálról van szó, helyesebb volna a  $H$ -funkcionál elnevezés.



A helyzetet még bonyolítja, hogy míg a  $H$ -függvény kiszámításánál a folytonos eloszlással számolnak (egyenletes térbeli eloszlás, a sebesség Maxwell-eloszlása), ezzel szemben a  $W$  állapot-valószínűség kiszámításánál a fázisteret véges sok cellára bontják, és a rendszer (pl. egy ideális gáz) állapotát azzal jellemzik, hogy a rendszert alkotó részecskék a fázistér celláiban hogyan oszlanak meg. Ez az oka bizonyos additív tagok fellépésének. Ha a fázistér celláinak valószínűségei egyenlők, és a  $k$ -adik cellában  $N_k$  részecske van  $\sum_{k=1}^n N_k = N$ , akkor ennek az eloszlásnak a valószínűsége a polinomiális eloszlás képlete szerint

$$(28) \quad \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_n!} \frac{1}{n^N}$$

volna, ha az  $N_k$  számok nem volnának alávetve a  $\sum_{k=1}^n N_k E_k = E$  feltételnek, ahol  $E_k$  a  $k$ -adik cellához tartozó energiaérték,  $E$  pedig az egész rendszer összenergiája; ezért csak azok az  $(N_1, N_2, \dots, N_n)$  eloszlások lehetségesek, amelyekre a  $\sum_{k=1}^n N_k = N$  feltétel mellett a  $\sum_{k=1}^n N_k E_k = E$  feltétel is teljesül; a megengedett eloszláshoz tartozó valószínűség ezáltal csak egy állandó faktorral változik meg; minden tagot el kell osztani az összes megengedett eloszlások valószínűségeinek összegével, tehát

$$(29) \quad W = c \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_n!},$$

ahol  $c$  nem függ az  $N_k$  számoktól. Számítsuk ki  $W$  közelítő értékét, abban az esetben, ha az  $N_k$  számok mind igen nagyok. Legyen  $\frac{N_k}{N} = f_k$ , akkor a Stirling-formula szerint

$$(30) \quad \log W \sim -N \sum_{k=1}^n f_k \log f_k + \log c,$$

vagyis  $W$  logaritmus a egy additív állandótól eltekintve arányos az empirikus eloszlás entrópiájával, vagyis az állapotvalószínűség logaritmus a (az állapot entrópiája) közelítőleg arányos az empirikus eloszlás entrópiájával. Ennél fogva a legvalószínűbb állapot az, amelynél  $-\sum_{k=1}^n f_k \log f_k$  maximális; itt

természetesen a  $\sum_{k=1}^n f_k = 1$  és  $\sum_{k=1}^n f_k E_k = \frac{E}{N}$  mellékfeltételeket tekintetbe kell venni. Egyszerű számítással (az úgynevezett Lagrange-féle multiplikátor-módszerrel) adódik, hogy ez akkor következik be, ha

$$(31) \quad f_k = A e^{-\beta E_k},$$

ahol a  $A$  és  $\beta$  állandók a  $\sum_{k=1}^n f_k = 1$  és  $\sum_{k=1}^n f_k E_k = \frac{E}{N}$  egyenletekből határozhatók meg.



Ha most a vizsgált rendszer egy  $V$  köbtartalmú edénybe zárt,  $m$  tömegű atomokból álló ideális egyatomos gáz, felhasználva az  $E/N = \frac{3}{2} kT$  összefüggést (amelyet ebben a vonatkozásban a hőmérséklet *definíciójának* lehet tekinteni) és feltéve, hogy a fázistér egyenlő valószínűségű cellái egyenlő (egységnyi) köbtartalmú térrészeknek és a sebesség-komponensek terének egyenlő köbtartalmú térrészeinek felelnek meg, az összegeket közelítőleg integrálokkal helyettesítve adódik, hogy az  $A$  és  $\beta$  állandók a következő feltételeknek kell, hogy eleget tegyenek:

$$(32) \quad VA \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} m\beta(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = 1$$

$$(33) \quad \frac{1}{2} m VA \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + y^2 + z^2) e^{-\frac{1}{2} m\beta(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = \frac{3kT}{2}$$

A (32) egyenletből adódik, hogy

$$(34) \quad VA \left( \sqrt{\frac{2\pi}{m\beta}} \right)^3 = 1$$

A (33) egyenletből pedig

$$(35) \quad \frac{1}{2} m VA \left( \sqrt{\frac{2\pi}{m\beta}} \right)^3 \frac{3}{m\beta} = \frac{3kT}{2}.$$

Így nyerjük, hogy

$$(36) \quad \beta = \frac{1}{kT} \text{ és } A = \frac{(2\pi m/k)^{3/2}}{VT^{3/2}}.$$

Ezen összefüggések alapján az entrópia maximumára a

$$\begin{aligned} H &= -N \sum_{k=1}^n f_k \log f_k + \log c = -N \sum_{k=1}^n f_k (\log A - \beta E_k) + \log c = \\ &= -N \log A + \beta E + \log c \end{aligned}$$

tehát

$$(37) \quad H = N \left( \frac{3}{2} \log T + \log V \right) + C$$

eredményt kapjuk, ahol  $C$ -be foglaltuk össze az összes  $T$ -től és  $V$ -től nem függő tagokat. Így módon ezen az úton is eljutottunk az ideális gáz (maximális) entrópiájának jólismert kifejezéséhez.

A kérdés további megvilágítására foglalkozunk most a hőátadás úgynevezett EHRENFEST-féle modelljével.<sup>9)</sup> Ez a modell, mint ismeretes, a következő:

Két urnában összesen  $N$  számú golyó van, amelyek 1-től  $N$ -ig meg vannak számozva. Ugyanakkor egy dobozba  $N+1$  cédulát helyezünk,

<sup>9)</sup> Lásd például M. KAC [15].



melyek 0-tól  $N$ -ig vannak megszámozva.<sup>10)</sup> Kihúzzunk egy cédulát a dobozból. Ha a nullát húzzuk, nem változtatunk semmit, ha pozitív számot húztunk, megkeressük a kihúzott számmal megegyező számozású golyót és azt áttesszük a másik urnába. Ezután a kihúzott cédulát a dobozba visszahelyezzük, a cédulákat összekeverjük, egy újabb cédulát húzzunk, és így tovább. A stacionér eloszlás, mint ismeretes, a következő: ha  $W_k$  jelenti annak a valószínűségét, hogy az első urnában pontosan  $k$  golyó legyen, akkor

$$(38) \quad W_k = \binom{N}{k} \frac{1}{2^N},$$

vagyis a stacioner eloszlás  $N$ -edrendű binomiális eloszlás  $N/2$  várható értékkel.

Könnyen be lehet látni, hogy ez a sztochasztikus folyamat *reverzibilis* Markov-lánc, tehát, ha  $A_k^{(n)}$  azt az eseményt jelöli, hogy az  $n$ -edik húzás után az első urnában  $k$  golyó van, akkor

$$(39) \quad \mathbf{P}(A_k^{(n)} A_l^{(n+m)}) = \mathbf{P}(A_l^{(n)} A_k^{(n+m)}),$$

vagyis  $\mathbf{P}(A_l^{(n+m)} | A_k^{(n)})$ -val jelölve annak a feltételes valószínűségét, hogy az  $(n+m)$ -edik húzás után az első urnában  $l$  golyó legyen, ha az  $n$ -edik húzás után ugyanott  $k$  golyó volt,

$$(40) \quad \mathbf{P}(A_l^{(n)}) \mathbf{P}(A_k^{(n+m)} | A_l^{(n)}) = \mathbf{P}(A_k^{(n)}) \mathbf{P}(A_l^{(n+m)} | A_k^{(n)});$$

mivel a folyamat stacioner, s így  $\mathbf{P}(A_k^{(n)}) = \binom{N}{k} \frac{1}{2^N} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$

és  $\mathbf{P}(A_k^{(n+m)} | A_l^{(n)}) = \mathbf{P}(A_k^{(m)} | A_l^{(0)})$ , tehát

$$(41) \quad \frac{\mathbf{P}(A_k^{(m)} | A_l^{(0)})}{\mathbf{P}(A_l^{(m)} | A_k^{(0)})} = \frac{\binom{N}{k}}{\binom{N}{l}} \quad (k, l = 0, 1, \dots, N; m = 1, 2, \dots).$$

(41)-et a következőképpen lehet belátni: legyen a rövidség kedvéért  $\mathbf{P}(A_l^{(m)} | A_k^{(0)}) = p_m(l|k)$ , akkor fennáll a következő két rekurziós formula:

$$(42) \quad p_m(l|k) = \frac{1}{N+1} ((N-l+1)p_{m-1}(l-1|k) + p_{m-1}(l|k) + (l+1)p_{m-1}(l+1|k))$$

és

$$(43) \quad p_m(k|l) = \frac{1}{N+1} (lp_{m-1}(k|l-1) + p_{m-1}(k|l) + (N-l)p_{m-1}(k|l+1)).$$

<sup>10)</sup> A modellnek az a módosítása, hogy egy 0-val számozott cédula is van a dobozban, VINCZE ISTVÁNTÓL származik. Ennek az az előnye, hogy a stacioner határeloszlás páros és páratlan számú húzás esetére ugyanaz.



Bevezetve a

$$(44) \quad Q_m(l|k) = \frac{p_m(l|k)}{\binom{N}{l}}$$

jelölést, a bizonyítandó (41) összefüggés nyilván

$$(45) \quad Q_m(l|k) = Q_m(k|l)$$

alakra hozható. Könnyen ellenőrizhető, hogy (45)  $m = 1$ -re fennáll (csak az  $l = k + 1$  és  $l = k - 1$  eseteket kell megvizsgálni). (45)-öt teljes indukcióval fogjuk bebizonyítani. Tegyük fel, hogy (45),  $m$  helyett  $m - 1$ -et írva, minden  $l$  és  $k$  értékre ( $l, k = 0, 1, \dots, N$ ) fennáll. Akkor, (42) szerint

$$(46) \quad \begin{aligned} Q_m(l|k) &= \frac{p_m(l|k)}{\binom{N}{l}} = \\ &= \frac{(N - l + 1)p_{m-1}(l - 1|k) + p_{m-1}(l|k) + (l + 1)p_{m-1}(l + 1|k)}{(N + 1)\binom{N}{l}} \end{aligned}$$

és így

$$(47) \quad \begin{aligned} Q_m(l|k) &= \frac{1}{N + 1} (l Q_{m-1}(l - 1|k) + Q_{m-1}(l|k) + \\ &+ (N - l) Q_{m-1}(l + 1|k)). \end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint tehát

$$(48) \quad Q_m(l|k) = \frac{l Q_{m-1}(k|l - 1) + Q_{m-1}(k|l) + (N - l) Q_{m-1}(k|l + 1)}{N + 1}$$

és így

$$(49) \quad Q_m(l|k) = \frac{l p_{m-1}(k|l - 1) + p_{m-1}(k|l) + (N - l) p_{m-1}(k|l + 1)}{\binom{N}{k} (N + 1)}$$

és így (43)-at felhasználva következik, hogy

$$(50) \quad Q_m(l|k) = \frac{p_m(k|l)}{\binom{N}{k}} = Q_m(k|l),$$

amivel kimutattuk, hogy (45)  $m - 1$ -ről  $m$ -re következik.

Ha tehát az  $l$ -edik állapot  $\lambda$ -szor valószínűbb, mint a  $k$ -edik állapot, akkor a  $k$ -edik állapotból az  $l$ -edik állapotba  $m$  lépésben való átmenet való-



színűsége  $\lambda$ -szor akkora, mint az  $l$ -edik állapotból a  $k$ -edik állapotba  $m$  lépésben való átmenet valószínűsége. Ebből világos, hogy miért látszik a valószínűsége reverzibilis folyamat irreverzibilisnek. Ez az úgynevezett LOSCHMIDT-féle ellenvetés legegyszerűbb cáfolata.

Vizsgáljuk meg az entrópia kérdését is az EHRENFEST-modell esetében.

Ha a rendszer a  $k$ -edik állapotban van, statisztikus mechanikai entrópiája

$$(51) \quad S = \log W_k = \log \frac{1}{2^N} \binom{N}{k}.$$

Mivel a Moivre—Laplace-tétel szerint, ha  $k$  közel van  $N/2$ -hez

$$(52) \quad W_k \sim \sqrt{\frac{2}{\pi N}} e^{-2N\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{2}\right)^2},$$

tehát (51)-ből és (52)-ből

$$(53) \quad S \sim -2N\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \log \frac{2}{\pi N}.$$

Természetesen itt is fennáll, hogy a statisztikus mechanikai entrópia egy additív állandótól eltekintve arányos az empirikus eloszlás valószínűség-számítási entrópiájával, ugyanis, ha  $x$  közel van  $1/2$ -hez Taylor-sorfejtéssel nyerjük, hogy

$$(54) \quad -x \log x - (1-x) \log (1-x) \sim \log 2 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Ennélfogva

$$(55) \quad -2N\left(\frac{k}{N} - \frac{1}{2}\right)^2 \sim -N \log 2 - N\left[\frac{k}{N} \log \frac{k}{N} + \frac{N-k}{N} \log \frac{N-k}{N}\right]$$

és így (53) és (55) összevetéséből

$$(56) \quad S \sim -N\left(\frac{k}{N} \log \frac{k}{N} + \frac{N-k}{N} \log \frac{N-k}{N}\right) - N \log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{2}{\pi N},$$

tehát

$$(57) \quad S \sim NH_e + C,$$

ahol  $H_e$  a pillanatnyi empirikus eloszlás entrópiáját jelöli. Mivel az entrópia csak egy additív állandótól eltekintve van meghatározva, feltehetjük, hogy  $C = 0$ , vagyis, hogy

$$(58) \quad S = NH_e.$$

Az empirikus eloszlás entrópiája természetesen akkor maximális, ha  $k = N/2$  illetve páratlan  $N$  esetében, ha  $k = (N \pm 1)/2$ , ez esetben

$$H_e = \log 2$$

és

$$S_{\max} = N \log 2.$$



Megjegyzendő, hogy  $S_{\max}$  nem azonos a  $\{W_k\}$  valószínűségeloszlás entrópiájával.  $S_{\max}$  ugyanis kizárólag a legvalószínűbb állapottól függ és azt fejezi ki, hogy a legvalószínűbb állapotban az egyes részecskék elhelyezkedésére vonatkozólag mekkora bizonytalanság áll fenn. Mivel a legvalószínűbb állapotban (páros  $N$  esetében) minden golyó egyforma valószínűséggel helyezkedhet el mindkét urnában, egy golyóra vonatkozólag a bizonytalanság  $\log 2$ ,  $N$  golyóra  $N \log 2$ .

A statisztikus mechanika entrópia-fogalma mindig egyetlen eloszlásra vonatkozik, és az egyes részecskéknél a fázistér celláiban való eloszlására vonatkozó bizonytalanság mértéke.

Az az összefüggés, hogy az eloszlás entrópiája egy additív állandótól eltekintve megegyezik az eloszlás valószínűségének logaritmusának maximumával és ugyanakkor megegyezik az empirikus eloszlás entrópiájának maximumával is, nemcsak a statisztikus mechanikában áll fenn, hanem megadható egy általános valószínűség-számítási tétel, amely ezt az összefüggést kifejezi.

Az egyszerűség kedvéért ezt az összefüggést nem teljes általánosságban vezetjük le.

Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  független valószínűségi változók, amelyek  $n$  különböző értéket, pl. az  $y_1, y_2, \dots, y_n$  értékeket egyforma valószínűséggel vesznek fel, vagyis

$$P(\xi_k = y_j) = \frac{1}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, n).$$

Akkor együttes eloszlásuk entrópiája:

$$(59) \quad H_0 = H_0(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = N \log n.$$

Figyeljük most meg a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  változók értékeit egy kísérletnél: legyenek ezek  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Jelölje  $N_k$  az  $x_1, x_2, \dots, x_N$  számok közül az  $y_k$ -val egyenlők számát és legyen  $f_k = N_k/N$  az  $y_k$  érték relatív gyakorisága ( $k = 1, \dots, n$ ). A kapott  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  empirikus eloszlás létrejöttének valószínűsége nyilván

$$(60) \quad W = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_n!} \frac{1}{n^N}.$$

Ha  $N$  nagy  $n$ -hez képest, az  $N_k$  számok nagy valószínűséggel közel lesznek  $N/n$ -hez, tehát mind nagy számok lesznek és így alkalmazható  $N_k!$  közelítő kifejezésére a Stirling-formula. Így kapjuk, hogy

$$(61) \quad \log W \sim -N \sum_{k=1}^n f_k \log f_k + C_1,$$

ahol

$$C_1 = -\log n^{\frac{n}{2}} (2\pi N)^{\frac{n-1}{2}}.$$



Másrészt figyelembe véve, hogy ha  $x - \frac{1}{n}$  igen kicsiny,

$$-x \log x \sim \frac{1}{n} \log n + \left(x - \frac{1}{n}\right) (\log n - 1) - \frac{\left(x - \frac{1}{n}\right)^2}{2} n$$

és így

$$(62) \quad -N \sum_{k=1}^n f_k \log f_k \sim N \log n - \frac{N}{2} \frac{\sum_{k=1}^n \left(f_k - \frac{1}{n}\right)^2}{\frac{1}{n}} = H_0 - \frac{\chi^2}{2},$$

ahol  $\chi^2$  a jólismert PEARSON-féle  $\chi^2$ -eltérés az  $(f_1, \dots, f_n)$  empirikus eloszlás és a megfelelő  $(1/n, \dots, 1/n)$  elméleti eloszlás között. Ennélfogva a következő összefüggésre jutottunk:

$$(63) \quad \log W \sim -N \sum_{k=1}^n f_k \log f_k + C_1 = H_0 - \frac{\chi^2}{2} + C_1,$$

vagyis a minta valószínűségének logaritmusai egy additív és a mintától nem függő konstansból eltekintve közelítőleg egyenlő a minta empirikus eloszlása entrópiájának  $N$ -szeresével (ahol  $N$  a megfigyelt értékek száma), továbbá ugyanazon additív állandótól eltekintve közelítőleg  $\chi^2/2$ -vel kisebb, mint a kísérlet entrópiája. Ezt az összefüggést a következőkben BOLTZMANN tételének fogjuk nevezni.

A valószínűségszámítás szempontjából kiemeljük (62) alábbi következményét:

Ha egy  $\xi$  valószínűségi változó  $n$  különböző értéket egyforma valószínűséggel vesz fel, és  $\xi$  értékére  $N$  számú megfigyelést végzünk, akkor, ha  $N$  elég nagy, 1-hez közeli valószínűséggel

$$H_0(\xi) - H_0(x) \sim \frac{\chi^2}{2N},$$

ahol  $H_0(\xi)$  jelöli  $\xi$  entrópiáját,  $H_0(x)$  az  $n$  megfigyelt érték empirikus eloszlásának entrópiáját és  $\chi^2$  a megfigyelt értékek empirikus eloszlása és  $\xi$  eloszlása közötti Pearson-féle  $\chi^2$ -eltérés. A nyert összefüggésből következik, hogy az empirikus eloszlás entrópiájának a megfigyelt változó entrópiájától való eltérése közelítőleg  $\chi^2$ -eloszlású valószínűségi változó, ha maga a  $\xi$  változó összes értékeit egyenlő valószínűséggel veszi fel.

## 2. § Valószínűség-eloszlások dimenziójának és entrópiájának értelmezése

Legyen  $\xi$  egy tetszőleges korlátos valószínűségi változó; legyen  $\xi^{(n)} = [n\xi]/n$ , másszóval  $\xi^{(n)} = k/n$ , ha  $k/n \leq \xi < (k+1)/n$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), vagyis  $\xi^{(n)}$ -et úgy kapjuk hogy  $\xi$  értékét lekerekítjük  $1/n$  legnagyobb  $\xi$ -nél még nem nagyobb többszörösére; ha például  $n = 10^5$ ,



akkor  $\xi^{(n)}$  értékét  $\xi$  értékéből úgy nyerjük, hogy  $\xi$  értékét végtelen tizedestörtben fejtjük és csak  $s$  tizedesjegyet tartunk meg.

Ha  $|\xi| \leq K$ , akkor  $\xi^{(n)}$  lehetséges értékeinek száma  $2Kn$  és így  $H_0(\xi^{(n)}) \leq \log_2 2Kn = \log_2 n + \log_2 2K$ . Ennélfogva

$$(64) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{H_0(\xi^{(n)})}{\log_2 n} \leq 1.$$

Ha létezik a

$$(65) \quad d(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_0(\xi^{(n)})}{\log_2 n},$$

határérték, akkor a  $d(\xi)$  számot ( $0 \leq d(\xi) \leq 1$ )  $\xi$  eloszlása dimenziójának nevezzük. Legyen  $d(\xi) = d$ ; ha létezik a (véges)

$$(66) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [H_0(\xi^{(n)}) - d \log_2 n] = H_d(\xi)$$

határérték is, akkor a  $H_d(\xi)$  számot  $\xi$  eloszlása  $d$ -dimenziós entrópiájának nevezzük.

Könnyen be lehet látni, hogy ha  $\xi$  eloszlása abszolút folytonos, és  $\xi$  sűrűségfüggvénye,  $f(x)$ , szakaszonként folytonos, akkor  $d(\xi) = 1$ , és

$$(67) \quad H_1(\xi) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log f(x) dx;$$

ugyanis

$$\begin{aligned} H_0(\xi^{(n)}) &= \sum_k \Delta_k F \log_2 \frac{1}{\Delta_k F} = - \sum_k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \log_2 \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx = \\ &= \sum_k \left[ f(z_k) \log_2 f(z_k) \frac{1}{n} \right] + \log_2 n. \end{aligned}$$

(Itt  $k/n \leq z_k < (k+1)/n$  és  $\Delta_k F = F((k+1)/n) - F(k/n)$ .) Ha  $\xi$  diszkrét eloszlású,  $P(\xi = x_k) = p_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), ahol  $x_j \neq x_k$ , ha  $j \neq k$ , akkor

$$H_0(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \log_2 p_k, \text{ feltéve, hogy utóbbi sor konvergens.}$$

Ha tekintünk egy  $\{p_k\}$  diszkrét eloszlást, amelynek létezik a (0-dimenziójú entrópiája és egy  $f(x)$  szakaszonként folytonos sűrűségfüggvényű korlátos és abszolút folytonos eloszlást, és képezzük ezeknek az eloszlásoknak a keverékét  $p$  és  $q$  súlyokkal, a kapott eloszlás entrópiája  $q$ -dimenziós lesz és értéke a következő képlettel fejezhető ki:

$$(68) \quad H_q = -q \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x) dx - p \sum_{k=1}^{\infty} p_k \log_2 p_k - p \log_2 p - q \log_2 q.$$



Igen általános feltételek mellett érvényes a következő összefüggés: ha a  $\xi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) korlátos valószínűségi változók értékkészletei idegenek<sup>11)</sup> és  $\xi_k$  eloszlásának dimenziója  $d_k = \mathbf{d}(\xi_k)$  és  $\xi_k$   $d_k$ -dimenziójú entrópiája,  $\mathbf{H}_{d_k}(\xi_k)$ , létezik, és vesszük a  $\xi_k$  változók eloszlásainak  $q_k$  súlyokkal a keverékét, továbbá  $\xi$  egy ilyen keverékeloszlású változó, akkor

$$(69) \quad d = \mathbf{d}(\xi) = \sum_{k=1}^n q_k \mathbf{d}(\xi_k)$$

és

$$(70) \quad \mathbf{H}_d(\xi) = \sum_{k=1}^n p_k \mathbf{H}_{d_k}(\xi_k) - \sum_{k=1}^n q_k \log_2 q_k,$$

vagyis a keverékeloszlás dimenziója az egyes eloszlások dimenzióinak a keverősúlyokkal súlyozott középértéke és a keverékeloszlás entrópiája egyenlő az egyes komponensek entrópiáinak a keverősúlyokkal súlyozott középértékének és a keverőeloszlás entrópiájának összegével.

A mondottakat megvilágítja a következő megjegyzés: Ha a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlása  $d = \mathbf{d}(\xi)$  dimenziójú és  $d$ -dimenziójú entrópiája  $\mathbf{H}_d(\xi) = H$ , akkor, ha  $n \rightarrow \infty$

$$(71) \quad \mathbf{H}_0\left(\frac{[n\xi]}{n}\right) = d \log_2 n + H + o(1).$$

Megfordítva, ha egy  $\xi$  valószínűségi változóra

$$(72) \quad \mathbf{H}_0\left(\frac{[n\xi]}{n}\right) = A \log_2 n + B + o(1),$$

ha  $n \rightarrow \infty$ , akkor  $A = \mathbf{d}(\xi)$  és  $B = \mathbf{H}_{\mathbf{d}(\xi)}(\xi)$ . Ha a  $\xi$  (korlátos) változóra nem érvényes (72) alakú aszimptotikus reláció, akkor  $\xi$  entrópiája nincsen értelmezve.

Eddig csak korlátos valószínűségi változók entrópiáját értelmeztük. A dimenzió és a entrópia értelmezését bizonyos, nem korlátos változókra is kiterjeszthetjük; e kérdéssel azonban itt nem foglalkozunk.

### 3. §. A dimenzió és az entrópia jellemző tulajdonságai

Nevezzük eleminek azokat a valószínűség-eloszlásokat, amelyek előállíthatók, mint egy véges diszkrét valószínűség-eloszlás és egy olyan abszolút folytonos valószínűség-eloszlás keveréke, amelynek sűrűségfüggvénye egy véges intervallumban szakaszonként folytonos és azon kívül eltűnik. Tegyük

<sup>11)</sup> Azon, hogy a  $\xi$  és  $\eta$  valószínűségi változók idegen értékkészletűek, azt értjük, hogy a számegegyenes bármely  $E$  Borel-halmaza felbontható olyan idegen  $E_1$  és  $E_2$  halmazokra, hogy  $\mathbf{P}(\xi \in E_1) = 0$  és  $\mathbf{P}(\eta \in E_2) = 0$  (ezt úgy szokták kifejezni, hogy a két változó által származtatott mérték *ortogonális*). Vegyük észre, hogy egy tetszőleges diszkrét eloszlású változó és egy tetszőleges abszolút folytonos eloszlású változó értékkészlete idegen.



fel, hogy minden  $\xi$  elemi valószínűség-eloszlású valószínűségi változóhoz hozzá van rendelve egy  $\mathbf{d}(\xi) = d$  és egy  $\mathbf{H}_d(\xi)$  szám, amelyek eleget tesznek az alábbi feltételeknek<sup>12)</sup>

1.a.  $0 \leq \mathbf{d}(\xi) \leq 1$ ;  $\mathbf{d}(\xi)$  csak  $\xi$  eloszlásától függ. Ha  $\mathbf{P}(\xi = a) = 1$ , akkor  $\mathbf{d}(\xi) = 0$ .

1.b.  $\mathbf{H}_d(\xi)$  csak  $\xi$  eloszlásától függ;  $\mathbf{H}_0(\xi) \geq 0$  és ha  $\mathbf{P}(\xi = a) = 1$ , akkor  $\mathbf{H}_0(\xi) = 0$ ,

2.a. Ha  $y = f(x)$  olyan függvény, hogy ha  $x \neq x'$ , akkor  $f(x) \neq f(x')$ , továbbá  $\xi$  olyan valószínűségi változó, amelyre  $\mathbf{d}(\xi) = 0$  és  $\eta = f(\xi)$ , akkor  $\mathbf{d}(\eta) = 0$  és  $\mathbf{H}_0(\eta) = \mathbf{H}_0(\xi)$ .

2.b. Ha  $\xi$  és  $\eta$  tetszőleges elemi valószínűségi változók és  $\eta = \xi + C$ , ahol  $C$  állandó, akkor  $\mathbf{d}(\eta) = \mathbf{d}(\xi) = d$  és  $\mathbf{H}_d(\eta) = \mathbf{H}_d(\xi)$ .

3.a. Ha  $\xi$  eloszlása a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  idegen értékészletű változók eloszlásának  $q_1, q_2, \dots, q_n$  súlyokkal vett keveréke, akkor

$$\mathbf{d}(\xi) = \sum_{k=1}^n q_k \mathbf{d}(\xi_k).$$

3.b. Ha  $\zeta$  eloszlása a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  idegen értékészletű valószínűségi változók eloszlásának  $q_1, q_2, \dots, q_n$  súlyokkal vett keveréke és  $\eta$  egy olyan valószínűségi változó, amely az  $1, 2, \dots, n$  értékeket rendre  $q_1, q_2, \dots, q_n$  valószínűséggel veszi fel, akkor bevezetve a  $d_k = \mathbf{d}(\xi_k)$  és  $d = \sum_{k=1}^n q_k d_k$  jelöléseket

$$\mathbf{H}_d(\zeta) = \sum_{k=1}^n q_k \mathbf{H}_{d_k}(\xi_k) + \mathbf{H}_0(\eta).$$

**Megjegyzés:** Az 1.a., 2.a. és 3.a. feltevésekből következik, hogy bármely  $\xi$  diszkrét eloszlású (elemi) valószínűségi változóra  $\mathbf{d}(\xi) = 0$ , ugyanis minden diszkrét valószínűség-eloszlás felfogható, mint elfajult valószínűség-eloszlások (konstansok eloszlásainak) keveréke. Ezért írható 3.b.-ben  $\mathbf{H}_{d(\eta)}(\eta)$  helyett  $\mathbf{H}_0(\eta)$ .

4.a. Ha a  $\xi_n$  diszkrét eloszlású valószínűségi változó eloszlását a  $p_{nk}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) számok alkotják és  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{nk} = p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), továbbá  $\xi$  egy olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlását a  $p_k$  számok alkotják, akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{H}_0(\xi_n) = \mathbf{H}_0(\xi)$ .

4.b. Ha  $\xi_n$  elemi abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye  $f_n(x)$  és  $x$ -ben egyenletesen  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , továbbá  $\xi$  olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye  $f(x)$ , akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\xi_n) = \mathbf{d}(\xi)$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{H}_{d(\xi_n)}(\xi_n) = \mathbf{H}_{d(\xi)}(\xi).$$

<sup>12)</sup> E feltételek lényegesen enyhíthetők volnának, erre azonban itt nem törekszünk.



5.a. Ha  $\mathbf{P}(\xi = \pm 1) = 1/2$ , akkor  $\mathbf{H}_0(\xi) = 1$ .

5.b. Ha  $\xi$  egyenletes eloszlású a  $(0, 1)$  intervallumban, akkor  $\mathbf{d}(\xi) = 1$  és  $\mathbf{H}_1(\xi) = 0$ .

Az 1. — 5. feltevésekből következik, hogy ha  $\xi$  valószínűség-eloszlását a  $p_1, p_2, \dots, p_n$  számok alkotják, akkor  $\mathbf{H}_0(\xi) = -\sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k$ , továbbá, ha  $\xi$  tetszőleges elemi eloszlású valószínűségi változó, akkor a  $\mathbf{d}(\xi) = d$  és  $\mathbf{H}_d(\xi)$  számok a

$$\mathbf{H}_0\left(\frac{[n\xi]}{n}\right) = d \log_2 n + \mathbf{H}_d(\xi) + o(1)$$

aszimptotikus relációnak tesznek eleget, vagyis  $\mathbf{d}(\xi)$  és  $\mathbf{H}_d(\xi)$  azonosak a 2. §-ban definiált dimenzióval, illetve entrópiával.

**Bizonyítás:** Először bebizonyítjuk, hogy az 1.b., 2.a., 3.b. és 4.a. feltevésekből következik, hogy ha  $\mathbf{P}(\xi = x_k) = p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), akkor

$$\mathbf{H}_0(\xi) = -\lambda \sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k.$$

Legyenek ugyanis  $n, m$  és  $k$  tetszőleges, a  $kn \leq m < (k+1)n$  egyenlőtlenséget kielégítő pozitív egész számok. Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+1}$  véges, diszkrét eloszlású és idegen értékkesztetű valószínűségi változók;  $\xi_j$  lehetséges értékeinek száma legyen  $n$  és vegye fel értékeit rendre  $1/n$  valószínűséggel ( $j = 1, 2, \dots, k$ ).  $\xi_{k+1}$  értékeinek száma legyen  $m - kn$  és vegye fel ezeket rendre  $1/(m - kn)$  valószínűséggel. Legyen  $\eta$  olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlása a  $\xi_j$  változók eloszlásának  $q_j$  súlyokkal vett keveréke, ahol  $q_j = n/m$ , ha  $j = 1, 2, \dots, k$  és  $q_{k+1} = 1 - kn/m$ .

Nyilván  $\eta$ -nak  $m$  különböző értéke van és ezeket mind  $1/m$  valószínűséggel veszi fel.

A 3.b. feltevést alkalmazva és egy olyan valószínűségi változó 0-dimenziójú entrópiáját, amely  $r$  különböző érték mindegyikét  $1/r$  valószínűséggel veszi fel, a rövidség kedvéért  $H(r)$ -rel jelölve kapjuk, hogy

$$H(m) = \frac{kn}{m} H(n) + \left(1 - \frac{kn}{m}\right) H(m - kn) + \mathbf{H}_0(\zeta),$$

ahol  $\zeta$  egy olyan valószínűségi változó, amely az  $1, 2, \dots, k$  értékeket  $n/m$  valószínűséggel, a  $k+1$  értéket pedig  $1 - kn/m$  valószínűséggel veszi fel. Felhasználva 1.b.-t és a  $kn \leq m < (k+1)n$ , vagy másképpen írva az  $1 - n/m \leq kn/m < 1$  egyenlőtlenséget, adódik

$$(73) \quad H(m) \geq \left(1 - \frac{n}{m}\right) H(n) \quad (m \geq n).$$

Most legyenek  $r$  és  $s$  tetszőleges prímszámok; adott  $N$ -hez tartozik egy és csakis egy  $M$ , amelyre fennállnak az

$$r^M \leq s^N < r^{M+1}$$



egyenlőtlenségek. Alkalmazva (73)-at az  $n = r^M$  és  $m = s^N$ , illetve  $n = s^N$  és  $m = r^{M+1}$  számokra, kapjuk, hogy

$$(74) \quad H(s^N) \geq \left(1 - \frac{r^M}{s^N}\right) H(r^M)$$

és

$$(75) \quad H(s^N) \leq \frac{1}{1 - \frac{s^N}{r^{M+1}}} H(r^{M+1}).$$

Most bebizonyítjuk, hogy ha  $A$  és  $B$  tetszőleges pozitív egész számok,

$$(76) \quad H(AB) = H(A) + H(B)$$

(76)-ot a következőképpen láthatjuk be: Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_A$  idegen értékészletű valószínűségi változók, melyek mindegyike  $B$  számú különböző értéket rendre  $1/B$  valószínűséggel vesz fel és legyen  $\eta$  eloszlása  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_A$  eloszlásának  $1/A$  súlyokkal vett keveréke. Akkor  $\eta$  nyilván  $AB$  számú különböző érték mindegyikét  $1/AB$  valószínűséggel veszi fel, és így, mivel 3.b. szerint

$$H_0(\eta) = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^A H_0(\xi_k) + H(A),$$

tehát

$$H(AB) = H(A) + H(B).$$

Ezzel (76)-ot bebizonyítottuk. (74)-ből, (75)-ből és (76)-ból következik, hogy

$$(77) \quad \frac{M}{N} \left(1 - \frac{r^M}{s^N}\right) \leq \frac{H(s)}{H(r)} \leq \frac{M+1}{N} \frac{1}{1 - \frac{s^N}{r^{M+1}}}.$$

Mivel  $s$  és  $r$  különböző prímszámok,  $\frac{\log s}{\log r}$  irracionális.

Az  $r^M \leq s^N < r^{M+1}$  egyenlőtlenségből adódik, hogy  $M \leq N \frac{\log s}{\log r} < M+1$  és így, hogy

$$(78) \quad M = \left[ N \frac{\log s}{\log r} \right],$$

továbbá, hogy

$$(79) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = \frac{\log s}{\log r}.$$

Felhasználva azt a tételt, hogy ha  $\alpha$  irracionális szám, akkor az  $n\alpha - [n\alpha]$  számsorozat ( $n = 1, 2, \dots$ ) mindenütt sűrűn helyezkedik el a  $(0, 1)$  intervallum-



ban, bármely pozitív  $\varepsilon$ -hoz meg lehet választani  $N$  értékét úgy, hogy  $0 \leq N \frac{\log s}{\log r} - M < \varepsilon$  legyen, vagyis, hogy teljesüljön az

$$(80) \quad \frac{s^N}{r^{M+1}} < \frac{1}{r^{1-\varepsilon}}$$

egyenlőtlenség. Másrészt választható  $N$  úgy is, hogy teljesüljön a

$$1 - \varepsilon \leq N \frac{\log s}{\log r} - M \leq 1$$

egyenlőtlenség, vagyis, hogy teljesüljön a

$$(81) \quad \frac{r^M}{s^N} \leq \frac{1}{r^{1-\varepsilon}}$$

egyenlőtlenség. A (77), (79), (80) és (81) összefüggésekből következik, hogy

$$(82) \quad \frac{\log s}{\log r} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \leq \frac{H(s)}{H(r)} \leq \frac{\log s}{\log r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}}.$$

Legyen

$$(83) \quad \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{H(r)}{\log r} = \lambda \quad \text{és} \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{H(r)}{\log r} = \mu.$$

Nyilván (82) írható a

$$(84) \quad \frac{H(r)}{\log r} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \leq \frac{H(s)}{\log s} \leq \frac{H(r)}{\log r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}}$$

alakba is. (84)-ből következik, hogy

$$(85) \quad \mu \leq \frac{H(s)}{\log s} \leq \lambda,$$

de mivel  $\lambda \leq \mu$ , (85)-ből következik, hogy  $\lambda = \mu$  és hogy

$$(86) \quad \frac{H(s)}{\log s} = \lambda,$$

ha  $s$  törzsszám. Azonban (77)-ből következik, hogy ha az  $n$  szám törzstényező felbontása  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_j^{\alpha_j}$  ( $p_1, p_2, \dots, p_j$  törzsszámok) akkor

$$(87) \quad H(n) = \sum_{i=1}^j \alpha_i H(p_i)$$

(86)-ból és (87)-ből következik, hogy

$$(88) \quad H(n) = \lambda \log n.$$



Ez az állítás azonban nem más, mint bizonyítandó tételünk speciális esete. Vizsgáljuk most az általánosabb esetet, amikor  $p_1, p_2, \dots, p_n$  tetszőleges racionális számok. Legyen  $p_k = g_k/g$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), ahol  $g_1, g_2, \dots, g_n$  természetes számok és  $\sum_{k=1}^n g_k = g$ . Legyen  $\eta_k$  olyan valószínűségi változó, amely  $g_k$  különböző értéket  $1/g_k$  valószínűséggel vesz fel, és tegyük fel, hogy az  $\eta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) valószínűségi változók értékészletei idegenek. Képezzük az  $\eta_k$  változók eloszlásainak  $p_k = g_k/g$  súlyokkal vett keverékét, és legyen  $\zeta$  egy olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlása az így nyert keverékeloszlás. Nyilvánvaló, hogy a  $\zeta$  változó  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$  számú különböző érték mindegyikét  $1/g$  valószínűséggel veszi fel.

3.b. szerint

$$(89) \quad H_0(\zeta) = \sum_{k=1}^n p_k H_0(\eta_k) + H_0(\xi),$$

ahol  $\xi$  egy olyan valószínűségi változó, amely az  $1, 2, \dots, n$  értékeket  $p_1, p_2, \dots, p_n$  valószínűséggel veszi fel. Mivel  $H_0(\zeta) = \lambda \log g$  és  $H_0(\eta_k) = \lambda \log g_k$ , tehát (89)-ből

$$(90) \quad H_0(\xi) = -\lambda \sum_{k=1}^n p_k \log p_k.$$

A (90) összefüggést eddig racionális  $p_k$  számokra igazoltuk; azonban 4.a.-ból következik, hogy érvényes kell, hogy legyen az argumentumok irracionális értékeire is. Így a (90) összefüggést tetszőleges véges diszkrét eloszlású változóra bebizonyítottuk.

A  $\lambda$  szám értéke 5.a. miatt  $1/\log 2$  kell, hogy legyen. Ilyenmódon

$$(91) \quad H_0(\xi) = -\sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k,$$

tehát állításunk diszkrét eloszlású változókra vonatkozó részét igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy a diszkrét eloszlás entrópiájának fentebb adott jellemzése a HINCIN-féle tárgyalásból elsősorban abban tér el, hogy nem használtuk fel azt, hogy egy  $n$  tagú  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  valószínűség-eloszlás entrópiája akkor maximális, ha  $p_k = 1/n$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Ennek következtében nem tudtuk előre, hogy  $H(n)$   $n$ -nek monoton növekvő függvénye, ami megnehezítette annak kimutatását, hogy a  $H(n)$  függvényre fennálló

$$H(mn) = H(m) + H(n)$$

függvényegyenletből következik, hogy  $H(n) = \lambda \log n$ . Az ugyanis régóta ismeretes, hogy e függvényegyenletnek nincs más monoton növekvő megoldása, mint a  $\lambda \log n$  függvények ( $\lambda > 0$ ). A fenti bizonyítás lényege tulajdonképpen az, hogy ha a  $H(n)$  számelméleti függvény eleget tesz a  $H(mn) = H(m) + H(n)$  függvényegyenletnek és „majdnem monoton”, abban az



értelemben, hogy fennáll a  $H(m) \geq (1 - n/m) H(n)$  egyenlőtlenség, ha  $m \geq n$ , akkor  $H(n) = \lambda \log n$ .

Itt jegyezzük meg, hogy az entrópiára vonatkozólag még számos más szélsőérték tulajdonság ismeretes. Így például az összes olyan abszolút folytonos eloszlások közül, amelyeknek sűrűségfüggvénye az  $I$  intervallumon kívül eltűnik, az  $I$ -ben egyenletes eloszlásnak maximális az entrópiája, az összes abszolút folytonos eloszlások közül, amelyek szórása,  $\sigma$ , adott, a  $\sigma$  szórású normális eloszlásnak maximális az entrópiája. Ez a normális eloszlás egy érdekes jellemzése.

Most vizsgáljuk a  $(0, a)$  intervallumban egyenletes eloszlású  $\xi$  valószínűségi változót, legyen ennek dimenziója  $D_a$  és  $D_a$ -dimenziós entrópiája  $h(a)$ . Ha  $a$  pozitív egész szám, ez az eloszlás előállítható, mint a  $(0, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $\dots$ ,  $(a-1, a)$  intervallumokban egyenletes eloszlások  $1/a$  súlyokkal vett keveréke. Ennélfogva 3.a.-ból és 5.b.-ból következik, hogy  $D_a = 1$ , ha  $a$  pozitív egész szám, és 3.b.-ból és 5.b.-ból következik, hogy

$$(92) \quad h(a) = \log_2 a.$$

Ha  $a$  racionális szám,  $a = b/c$ , ahol  $b$  és  $c$  természetes számok, akkor a  $(0, b)$  intervallumban egyenletes eloszlás előállítható, mint a  $(0, a)$ ,  $(a, 2a)$ ,  $\dots$ ,  $((c-1)a, b)$  intervallumokban egyenletes eloszlások  $1/c$  súlyokkal vett keveréke. Ennélfogva  $D_a = 1$  és

$$(93) \quad h(b) = h(c) + h(a)$$

(92)-ből és (93)-ból következik, hogy ha  $a = b/c$ , akkor

$$(94) \quad h(a) = \log_2 \frac{b}{c} = \log_2 a$$

vagyis, hogy (92) tetszőleges racionális  $a$ -ra érvényes.

4.b. felhasználásával következik, hogy ha  $a$  tetszőleges pozitív szám,  $D_a = 1$  és  $h(a) = \log_2 a$ . Mármint legyen  $f(x)$  egy tetszőleges sűrűségfüggvény, amely egy véges  $(-K, +K)$  intervallumon kívül eltűnik és a  $(-K, +K)$  zárt intervallumban folytonos.<sup>13)</sup> Akkor ugyanott  $f(x) \log f(x)$  is folytonos,

tehát a  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log f(x) dx$  Riemann-integrál létezik; legyen  $\xi$  valószínűség-

sűrűségfüggvénye  $f(x)$  és legyen  $\xi_n$  sűrűségfüggvénye  $g_n(x) = n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt$ , ha

$\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Nyilvánvaló, hogy  $\xi_n$  eloszlása a

<sup>13)</sup> Az intervallum bal-, illetve jobboldali végpontjában csak jobbról, illetve balról való folytonosságot kötünk ki.



$\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$  intervallumban egyenletes eloszlások  $q_k = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt$  súlyokkal

vett keveréke, és így  $\mathbf{d}(\xi_n) = 1$ , és

$$\mathbf{H}_1(\xi_n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k \left( \log_2 \frac{1}{n} - \log_2 q_k \right),$$

tehát

$$(95) \quad \mathbf{H}_1(\xi_n) = - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k \log_2 n q_k.$$

Mivel az integrálszámítás középértéktétele szerint

$$n q_k = f(x_k) \quad \frac{k}{n} \leq x_k < \frac{k+1}{n},$$

tehát

$$(96) \quad \mathbf{H}_1(\xi_n) = - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ f(x_k) \log_2 f(x_k) \frac{1}{n} \right]$$

és így 4.b. figyelembevételével  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\xi_n) = 1 = \mathbf{d}(\xi)$  és

$$(97) \quad \mathbf{H}_1(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{H}_1(\xi_n) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x) dx.$$

Az áttérés folytonos sűrűségfüggvényű eloszlásról szakaszonként folytonos sűrűségfüggvényű eloszlásra a 3.b. feltétel újbóli alkalmazásával történhet.

Ha mármost  $\xi$  eloszlása egy  $f(x)$  szakaszonként folytonos sűrűségfüggvényű elemi eloszlás és egy  $\{p_k\}$  diszkrét eloszlás  $q$  és  $p$  súlyokkal vett keveréke, a már bebizonyított (91) és (97) összefüggésekből, továbbá a 3.a. és 3.b. feltevésekből következik, hogy  $\mathbf{d}(\xi) = q$  és

$$(98) \quad \mathbf{H}_q(\xi) = - q \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x) dx - p \sum_{k=1}^{\infty} p_k \log_2 p_k - p \log_2 p - q \log_2 q.$$

Ezzel állításunkat teljes egészében bebizonyítottuk.



## 4. § Többdimenziós valószínűség-eloszlások entrópiája

Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$  valószínűségi változók; értelmezzük  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$  együttes eloszlásának entrópiáját a következőképpen: Ha az  $\frac{[n\xi_1]}{n}, \frac{[n\xi_2]}{n}, \dots, \frac{[n\xi_r]}{n}$  diszkrét változók együttes eloszlásának entrópiáját  $H_0^{(n)}$ -nel jelöljük és ha  $n \rightarrow \infty$ , esetén fennáll egy

$$(99) \quad H_0^{(n)} = D \log_2 n + H + o(1)$$

alakú reláció, akkor legyen

$$(100) \quad H_D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) = H$$

és  $d(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) = D$  és ez esetben nevezzük a  $D$  számot a  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$  változók együttes eloszlása dimenziójának és a  $H$  számot a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$  változók együttes eloszlása  $D$ -dimenziós entrópiájának. Ebből a definícióból azonnal adódik, hogy ha pl. a  $\vec{\xi}$   $r$ -dimenziós valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye a folytonos és egy  $|\mathbf{x}| \leq R$  gömbön kívül eltűnő  $f(\mathbf{x})$  függvény, ahol

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r), \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2},$$

akkor  $d(\vec{\xi}) = r$  és

$$(101) \quad H_r(\vec{\xi}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) \log_2 f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

ahol  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_r$ .

Ha így definiáljuk a többdimenziós eloszlások entrópiáját, akkor érvényes a következő tétel: Ha  $\xi$  és  $\eta$  tetszőleges valószínűségi változók, melyek együttes eloszlásának entrópiája értelmezve van és  $d(\xi|\eta)$  jelöli  $\xi$  feltételes eloszlásának dimenzióját azon feltevés mellett, hogy  $\eta$  értéke rögzítve van, továbbá  $H_{d(\xi|\eta)}(\xi|\eta)$  jelöli  $\eta$  rögzített értéke mellett  $\xi$  feltételes eloszlásának  $d(\xi|\eta)$ -dimenziójú entrópiáját, akkor (feltéve, hogy az összes bevezetett mennyiségek értelmezhetők),

$$(102) \quad d(\xi, \eta) = d(\eta) + \overline{d(\xi|\eta)}$$

és

$$(103) \quad H_{d(\xi, \eta)}(\xi, \eta) = H_{d(\eta)}(\eta) + \overline{H_{d(\xi|\eta)}(\xi|\eta)}.$$

Abban az esetben, ha  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek,  $d(\xi|\eta) = d(\xi)$  és  $H_{d(\xi)}(\xi|\eta) = H_{d(\xi)}(\xi)$ , tehát

$$(104) \quad d(\xi, \eta) = d(\xi) + d(\eta)$$

és

$$(105) \quad H_{d(\xi, \eta)}(\xi, \eta) = H_{d(\xi)}(\xi) + H_{d(\eta)}(\eta).$$



Ez a tétel érthetővé teszi, hogy egy  $r$ -dimenziós térben megadott abszolút folytonos eloszlásnak a fenti értelemben is  $r$ -dimenziós az eloszlása és egyben fényt vet az eloszlások dimenziója és a geometriai dimenzió fogalmának összefüggésére és érthetővé teszi, miért neveztük a  $d(\xi)$  számot  $\xi$  eloszlása dimenziójának.

Arra a kérdésre, hogy az e dolgozatban tárgyaltakon kívül mely valószínűség-eloszlásokra definiálható a dimenzió és az entrópia, és egyéb nyitva-hagyott kérdésekre egy további dolgozatban fogunk visszatérni.

## IRODALOM

- [1] R. CLAUSIUS : *Die mechanische Wärmetheorie*. 1876.
- [2] L. BOLTZMANN : *Vorlesungen über Gastheorie*. 1896—1898.
- [3] P. EHRENFEST—T. EHRENFEST : „Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche  $H$ -theorem.” *Physikalische Zeitschrift* **8** (1907) 311—314.
- [4] C. E. SHANNON : „A mathematical theory of communication.” *Bell System Technical Journal* **27** (1948) 399—429, 623—656.
- [5] C. E. SHANNON—W. WEAVER : *The mathematical theory of communication*. The University of Illinois Press, Urbana, 1949.
- [6] A. Я. ХИНЧИН : „Понятие энтропии в теории вероятностей.” *Успехи Математических Наук* **8** (1953) 3—51.
- [7] L. SZILÁRD : „Über die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen.” Berlin, 1928. 840—856.
- [8] D. GÁBOR : *La théorie des communications et la physique*. „La Cybernétique.” Editions Revue d'Optique, Paris, 1951. 115 —
- [9] D. BRILLOUIN : „Maxwell's Demon cannot operate : Information and entropy, I.” *Journal of Applied Physics* **22** (1951) 334—337.
- [10] D. BRILLOUIN : „Physical entropy and information II.” *Journal of Applied Physics* **22** (1951) 338—344.
- [11] D. BRILLOUIN : „The negentropy principle of information.” *Journal of Applied Physics* **24** (1953) 1152—1163.
- [12] D. BRILLOUIN : „Information theory and uncertainty principle.” *Journal of Applied Physics* **25** (1954) 887—893.
- [13] J. A. VILLE : „Leçons sur quelques aspects nouveaux de la théorie des probabilités.” *Annales de l'Institut H. Poincaré* **14** (1954) 61—143.
- [14] A. BLANC-LAPIERRE : „Considérations sur la théorie de la transmission de l'information (etc).” *Annales de l'Institut H. Poincaré* **13** (1953) 245—296.
- [15] M. КАК : „Random walk and the theory of Brownian motion.” *American Mathematical Monthly* **54** (1947) 369—391.

(Beérkezett: 1956. II. 7.)

## ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ЭНТРОПИИ

Я. БАЛАТОНЬИ и А. РЕНЬИ

### Резюме

Цель настоящей работы — обоснование понятия энтропии в теории вероятностей. А. Я. ХИНЧИН [6] изучал лишь энтропию конечного дискретного распределения. В теории информации встречается и энтропия некоторых непрерывных распределений вероятностей. Однако, изучение энтропии для этих распределений в том смысле в каком это сделал ХИНЧИН для случая дискретных распределений, не было проведено.

В ходе исследования выяснилось, что для характеристики энтропии (меры неопределенности распределения) не достаточно одного числа, а требуется два числа. Мы введем для них следующие названия: размерность и относящаяся к данной размерности энтропия.



В § 1 изучается связь между  $H$ -функцией БОЛЬЦМАННА, понятием энтропии статистической механики и понятием энтропии теории вероятностей.

На примере идеального газа показывается, что физическая энтропия есть случайная величина, которая совпадает с теоретико-вероятностной энтропией моментального распределения в фазовом пространстве (если не обращать внимания на выбор единицы измерения). В этом же §-е исследуется модель теплопередачи ЭРЕНФЕСТА.

В § 2 определяется размерность и энтропия распределений вероятностей.

Если  $\xi$  — случайная величина с дискретным распределением,  $P(\xi = x_k) = p_k$  ( $k = 1, 2, \dots; \sum p_k = 1$ ) размерность её распределения считается равной нулю, а её 0-мерная энтропия для которой вводится обозначение  $H_0(\xi)$  определяется формулой ШЭННОНА

$$H_0(\xi) = - \sum_{k=1}^{\infty} p_k \log_2 p_k$$

если ряд (1) сходится. Пусть  $\xi$  любая ограниченная случайная величина, и  $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$ . Если имеет место соотношение

$$H_0\left(\frac{[n\xi]}{n}\right) = d \log_2 n + H + o(1)$$

где  $d$  и  $n$  постоянные, то распределение  $\xi$  называется  $d$ -мерным, а число  $n$  называется  $d$ -мерной энтропией распределения  $\xi$  и обозначается через  $H_d(\xi)$ . Доказывается что если функция плотности  $f(x)$  случайной величины  $\xi$  кусочно непрерывна на некотором конечном замкнутом отрезке и равна нулю вне его, то размерность распределения  $\xi$  равна 1, а одномерная энтропия распределения  $\xi$  дается формулой ШЭННОНА

$$H_1(\xi) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x) dx$$

Авторы подчеркивают, что энтропии разных размерностей не должны сравниваться по их численным значениям; энтропия с большей размерностью всегда «превосходит» энтропию с меньшей размерностью.

Если распределение  $\xi$  есть смесь, с весами  $q$  и  $p$  ( $p + q = 1$ ) абсолютно непрерывного распределения с кусочно непрерывной функцией плотности  $f(x)$  и дискретного распределения  $\{p_k\}$  то распределение  $\xi$  есть  $q$ -мерное распределение, а его  $q$ -мерная энтропия

$$H_q(\xi) = -q \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x) dx - p \sum_{k=1}^{\infty} p_k \log_2 p_k - p \log_2 p - q \log_2 q.$$

В § 3 перечисляются характеристические свойства размерности и энтропии. Исходя из этих свойств, доказывается единственность для распределений, представимых в виде смеси распределения с кусочно непрерывной функцией плотности и конечного дискретного распределения.

В § 4 результаты § 2 обобщаются на случай многомерных распределений.

## REMARKS ON ENTROPY

J. BALATONI and A. RÉNYI

### Summary

The paper deals with the notion of the entropy of a probability distribution as a measure of the uncertainty implied by the distribution. In §. 1. the relation of this notion to the entropy in statistical mechanics resp. to BOLTZMANN'S  $H$ -function, further to the entropy in information theory is discussed. It is shown, by discussing the example



of an ideal gas contained in a vessel, further the model of heat exchange given by P. and T. EHRENFEST, that the quantity which is called entropy in statistical mechanics is a random variable, characterising the momentary state of the physical system considered and the maximal value of this quantity is up to an additive constant and (up to the choice of the unity of uncertainty) identical with the entropy in the sense of probability theory of the equilibrium distribution (= most probable distribution). In §. 2. two notions are introduced: the *dimension* of a probability distribution, and the entropy of dimension  $d$  of a probability distribution which has the dimension  $d$ . If  $\xi$  is random variable, which has a discrete distribution, i. e.  $\mathbf{P}(\xi = x_k) = p_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) and

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ , then the distribution of  $\xi$  is said to have dimension 0, and the entropy of dimension 0 of its distribution, which is denoted by  $\mathbf{H}_0(\xi)$  is defined by the well known formula of SHANNON:

$$(1) \quad \mathbf{H}_0(\xi) = - \sum_{k=1}^{\infty} p_k \log_2 p_k$$

provided that the series (1) converges. If  $\xi$  is an arbitrary (bounded) random variable, we consider the random variables  $[n\xi]/n$  where  $[x]$  denotes the integer part of  $x$ . If

$$(2) \quad \mathbf{H}_0\left(\frac{[n\xi]}{n}\right) = d \log_2 n + H + o(1)$$

is satisfied, we say that the distribution of  $\xi$  has the dimension  $d$  and its  $d$ -dimensional entropy  $\mathbf{H}_d(\xi)$  is equal to  $H$ . The extension of these notions to probability distributions for which the relation (2) does not hold, is left to a forthcoming paper. If the probability density function  $f(x)$  of the distribution of  $\xi$  exists, and is continuous up to a finite number of points in a finite interval and equal to 0 outside this interval, it follows that the probability distribution of  $\xi$  has the dimension 1 and its one-dimensional entropy  $\mathbf{H}_1(\xi)$  is given by

$$(3) \quad \mathbf{H}_1(\xi) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x) dx$$

This formula is identical with that used hitherto in information theory; what is essentially new in the present paper is that due emphasis is laid on the fact, that the one-dimensional entropy of an absolutely continuous distribution defined by (3) is qualitatively different from the 0-dimensional entropy of a discrete distribution, defined by (1); a one-dimensional entropy, whatever its numerical value be, is always considered to be „greater” than a 0 dimensional entropy, whatever the latter's numerical value be: the scale of 1-dimensional entropy is considered to be on a higher level. If a (bounded) probability distribution is obtained as a mixture of an absolutely continuous distribution, with the density function  $f(x)$  continuous except for a finite number of points, and of a discrete distribution  $\{p_k\}$  the two distributions being mixed with the weights  $q$  and  $p$ , then according to (2) this distribution has the dimension  $q$  and its  $q$ -dimensional entropy is equal to

$$\mathbf{H}_q(\xi) = - q \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x) dx - p \sum_{k=1}^{\infty} p_k \log_2 p_k - p \log_2 p - q \log_2 q.$$

Thus there exists probability distributions with dimension  $d$  for any  $d$  in  $(0, 1)$ . In §. 3. some characteristic properties of the dimension and the entropy of a probability distribution are discussed. It is shown that the above definition of these notions is the consequence of a set of plausible properties. The dimension and the  $d$ -dimensional entropy of a probability distribution is characterized by properties closely related (though not identical even for  $d=0$ ) to the properties used recently by A. J. KHINTCHIN [6] to characterize the 0-dimensional entropy.



In §. 4. the dimension and the entropy of the joint probability distribution of any finite number of random variables is defined. If the joint distribution of  $r$  random variables  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$  has a Riemann-integrable density function  $f(x)$  ( $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ ) which vanishes outside a finite  $r$ -dimensional sphere, the dimension of the joint distribution of  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$  is equal to  $r$ , and the  $r$ -dimensional entropy of this distribution is defined by

$$H_r(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log_2 f(x) dx$$

where  $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_r$ . The investigations started in this paper will be continued in a forthcoming paper.



# A NEUTRONOK LEASSÍTÁSÁNAK NÉHÁNY KÉRDÉSÉRŐL

PÁL LÉNÁRD<sup>1)</sup>

## 1. §.

A nagyenergiájú neutronok a lassító közeg atommagjaival ütköznek és közben energiájuk fokozatosan csökken. Tegyük fel, hogy az ütközések rugalmasak és hogy az ütköző partnerek tömegközéppontjához képest nyugvó koordináta rendszerben a szóródás izotóp [1]. Ezeknek a feltevéseknek alapján könnyen meghatározhatjuk annak a valószínűségét, hogy egyetlen ütközési aktusban egy  $E_0$  energiájú neutron energiacsökkenése éppen akkora legyen, hogy ütközés után energiája az  $(E, E + dE)$  energia-intervallumba essék. Jelöljük ezt a valószínűséget  $w(E_0, E) dE$ -vel. Mivel a neutron energiája egyetlen ütközési aktusban nem csökkenhet  $\alpha E_0$ -nál kisebb értékre,

$$(1.1) \quad w(E_0, E) dE = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \frac{dE}{E_0} & \text{ha } \alpha E_0 \leq E \leq E_0 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az  $\alpha$  mennyiség a lassító közeg  $A$  atomsúlyával igen egyszerű kapcsolatban van, ugyanis

$$(1.2) \quad \alpha = \left( \frac{A-1}{A+1} \right)^2.$$

Az (1.1) alatti kifejezés sokkal kényelmesebben használható formába írható át, ha az

$$(1.3) \quad u = \log \frac{E_0}{E}$$

összefüggés segítségével új változót vezetünk be. Az  $u$  mennyiséget letargiának nevezzük. Értéke annál nagyobb, minél nagyobb az energiacsökkenés. Rövid számolás után azt találjuk, hogy

$$(1.4) \quad w(u) du = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} e^{-u} du, & \text{ha } 0 \leq u \leq \varepsilon \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Központi Fizikai Kutató Intézet.



annak a valószínűsége, hogy a letargia értéke egyetlen ütközés után az  $(u, u + du)$  intervallumba esik; függetlenül attól, hogy mi volt az ütközés előtt a neutron energiája. Az  $\varepsilon$  mennyiség nem más, mint az egyetlen ütközés aktusban bekövetkező maximális letargia-növekedés, azaz

$$(1.5) \quad \varepsilon = \log \frac{1}{\alpha}.$$

Tegyük fel, hogy a lassító közeg csak egyfajta atommagból áll és neutronokat nem fog be. Jelöljük  $p_n(u) du$ -val annak a valószínűségét, hogy az  $n$ -ik ütközés után a letargia az  $(u, u + du)$  intervallumba esik. Mivel az egyes ütközésekhez tartozó letargia-növekedések függetlenek,

$$(1.6) \quad p_n(u) = \int_0^u p_{n-1}(u') w(u - u') du'.$$

Mivel  $p_1(u) = w(u)$ ,

$$(1.7) \quad \Pi_n(z) = \{\omega(z)\}^n,$$

ahol

$$(1.8) \quad \Pi_n(z) = \int_0^\infty e^{-uz} p_n(u) du \quad \text{és} \quad \omega(z) = \int_0^\infty e^{-uz} w(u) du.$$

Az (1.4) alatti függvény Laplace-transzformáltjának kiszámítása segítségével a következő kifejezést kapjuk:

$$(1.9) \quad \Pi_n(z) = \left\{ \frac{1 - \alpha e^{-\varepsilon z}}{(1 - \alpha)(z + 1)} \right\}^n.$$

(1.9)-ből könnyen kiszámítjuk a  $p_n(u)$  függvényt (lásd: [2]):

$$(1.10) \quad p_n(u) = \left( \frac{1}{1 - \alpha} \right)^n \frac{e^{-u}}{(n - 1)!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (-1)^m (u - m\varepsilon)^{n-1} \Delta(u - m\varepsilon),$$

ahol

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

A valószínűségszámítás centrális határeloszlástétele szerint nagy  $n$  esetén (1.10) jól közelítő a normális eloszlás sűrűségfüggvényével:

$$(1.11) \quad p_n(u) \sim \{2\pi n[\xi + (1 - \xi)(\xi - \varepsilon)]\}^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(u - n\xi)^2}{n[\xi + (1 - \xi)(\xi - \varepsilon)]}\right\},$$

ahol

$$(1.12) \quad \xi = 1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \log \alpha.$$



Az  $n$ -edik ütközés utáni letargia várható értékére azt az eredményt kapjuk, hogy

$$(1.13) \quad M_n = n\xi,$$

mivel minden egyes ütközésnél átlagosan  $\xi$  értékkel nő a letargia. Az  $n$ -edik ütközés utáni letargia szórásnégyzetre pedig a következő kifejezés vezethető le :

$$(1.14) \quad D_n^2 = n[\xi + (1 - \xi)(\xi - \varepsilon)] = n \left[ 1 - \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2} \log^2 \alpha \right].$$

Ha a lassító közeg atomsúlya nem túl kicsi, akkor a letargia egy ütközést aktura vonatkozó növekedése és szórása kicsiny lesz. Ez a magyarázata annak, hogy nagy atomsúlyú lassító közegben a neutronok energiacsökkenését (letargia növekedését) jó közelítéssel folytonos folyamatként kezelhetjük.

Hidrogén atommagokkal történő ütközések esetében  $\alpha = 0$  és így a  $\Pi_n(z) = (z + 1)^{-n}$  összefüggésből könnyen meghatározhatjuk a jól ismert

$$(1.15) \quad p_n(E_0, E) = \frac{\left( \log \frac{E_0}{E} \right)^{n-1}}{(n-1)! E_0}$$

formulát [3]. Ezeket az eredményeket korábban is jól ismerték, azonban azok a módszerek, amelyekkel ezekhez az eredményekhez jutottak, feleslegesen bonyolultak voltak. Az eddigiekben csak olyan ütközéseket vizsgáltunk, ahol az ütközések szóródásra vezetett (az elnyelés lehetőségét kizártuk).

## 2. §.

Könnyen általánosíthatjuk az eddigi megfontolásokat többféle atommagból álló lassító közegre is. Tegyük fel, hogy  $k$  különféle atommag tökéletes homogen keveréket alkot. Jelöljük  $N_i$ -vel az  $i$ -edik fajta atommagok számát a lassító közeg egy  $\text{cm}^3$ -ében. Legyen továbbá  $\sigma_s^i$  az  $i$ -edik atommagra vonatkozó rugalmas szóródási hatáskeresztmetszet. Tegyük fel azt is, hogy bizonyos valószínűséggel minden atommag abszorbeál neutronokat. Jelöljük az  $i$ -edik magra vonatkozó abszorpciós hatáskeresztmetszetet  $\sigma_a^i$ -vel. Annak a valószínűsége, hogy egy ütközés az  $i$  magon való szóródásra vezet,

$$(2.1) \quad r_i = \frac{N_i \sigma_s^i}{N_1 \sigma_i^1 + N_2 \sigma_i^2 + \dots + N_k \sigma_i^k},$$

ahol  $\sigma_i^i = \sigma_s^i + \sigma_a^i$  az úgynevezett teljes hatáskeresztmetszet. A  $\sigma_a^i$  abszorpciós (befogási) keresztmetszetek általában függenek a letargia értékétől. Ez a számításokat megnehezíti. Jelöljük  $p_n(u)du$ -val annak a valószínűségét, hogy az  $n$ -edik ütközés után a neutron letargiája az  $(u, u + du)$  intervallumba esik és az első  $n$  ütközés nem vezet abszorpcióra. Természetesen

$$(2.2) \quad \int_0^\infty p_n(u) du < 1,$$



mivel a neutron közben abszorbeálódhat is.  $p_n(u)$ -ra a következő rekurziós kifejezés írható fel:

$$(2.3) \quad p_n(u) = \int_0^u p_{n-1}(u') \sum_{i=1}^k r_i(u') w_i(u - u') du'.$$

Abban az esetben, ha feltételezzük, hogy az  $r_i$  mennyiségek nem függnek a letargiától, (2.3) Laplace-transzformáltjára,  $\Pi_n(z)$ -re egyszerű kifejezés vezethető le. Azt kapjuk, hogy

$$(2.4) \quad \Pi_n(z) = \left\{ \sum_{i=1}^k r_i \omega_i(z) \right\}^n$$

### 3. §.

A neutronok lelassításának elméletében igen fontos szerepet játszik az ütközési sűrűség. Jelöljük az ütközési sűrűséget  $f(u)$ -val.  $f(u)du + o(du)$  annak a valószínűsége, hogy az  $(u, u + du)$  letargia intervallumból ütközés révén (legyen az akár abszorpcióra vezető ütközés is) a neutron kikerül. Stacionárius esetben, amikor is az  $(u, u + du)$  letargia-intervallumba kerülő és onnan kilépő neutronok száma megegyezik,  $f(u)du$ -nak egyenlőnek kell lennie annak a valószínűségével, hogy a neutron az  $(u, u + du)$  intervallumba bekerül. Ez utóbbi nyilván  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(u) du$ , tehát stacionárius esetben

$$(3.1) \quad f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(u).$$

Az  $f(u)$  fizikai jelentése az, hogy megadja az  $u$  körüli egységnyi intervallumban egy neutron ütközéseinek átlagos számát.

Foglalkozzunk először a legegyszerűbb esettel, amikor a lassító közeg csak egyfajta atommagot tartalmaz és a neutron-befogás lehetőségét kizárjuk. Ebben az esetben könnyen előállíthatjuk  $f(u)$  Laplace-transzformáltját. Azt találjuk, hogy

$$(3.2) \quad \varphi(z) = \frac{\omega(z)}{1 - \omega(z)},$$

ahol

$$(3.3) \quad \varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-uz} f(u) du.$$

Ha a lassító közeg többfajta atommagot tartalmaz és bizonyos, de állandó valószínűséggel neutronokat abszorbeál, akkor  $f(u)$  Laplace-transzformáltja a következő lesz:



$$(3.4) \quad \varphi(z) = \frac{\sum_{i=1}^k r_i \omega_i(z)}{1 - \sum_{i=1}^k r_i \omega_i(z)}.$$

A legáltalánosabb esetben (3.1)-ből megkaphatjuk  $f(u)$ -ra a már más szerzők [4] által levezetett

$$(3.5) \quad f(u) = \sum_{i=1}^k r_i(0) w_i(u) + \int_0^u f(u') \sum_{i=1}^k r_i(u') w_i(u - u') du'$$

integrál-egyenletet. Ennek az egyenletnek a megoldását az  $r_i(u')$  fellépte nehezíti meg. A fenti egyenletnek különböző közelítő módszerekkel történő megoldásával később foglalkozunk.

A neutronok lelassításának elméletében további fontos mennyiség a befogás elkerülésének valószínűsége. Jelöljük ezt a mennyiséget  $p(u)$ -val.  $p(u)$  annak a valószínűsége, hogy valamilyen lassító közegben a neutron letargia az  $u$  érték fölé emelkedik, és közben maga a neutron nem abszorbeálódik. Könnyen belátható, hogy

$$(3.6) \quad p(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \int_0^u p_{n-1}(u') r_i(u') [1 - W(u - u')] du',$$

ahol

$$(3.7) \quad W_i(u) = \int_0^u w_i(u') du'.$$

(3.6)-ból rövid számolás után a

$$(3.8) \quad p(u) = \sum_{i=1}^k r_i(0) [1 - W_i(u)] + \int_0^u f(u') \sum_{i=1}^k r_i(u') [1 - W_i(u - u')] du'$$

összefüggéshez jutunk.  $p(u)$  és  $f(u)$  között a következő egyszerű összefüggés áll fenn:

$$(3.9) \quad \frac{d p(u)}{d u} = - \left[ 1 - \sum_{i=1}^k r_i(u) \right] f(u).$$

Ha (3.5) alapján valamilyen közelítő módszerrel meghatározzuk az  $f(u)$ -t akkor  $p(u)$  (3.9)-ből közvetlenül kiszámítható.

Ismét tegyük fel, hogy  $r_i = \text{konst.}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Ekkor  $p(u)$  Laplace-transzformációval határozható meg. Felhasználva a (2.4) alatti összefüggést, rövid számolással azt találjuk, hogy



$$(3.10) \quad \Pi(z) = \frac{1}{z} \frac{\sum_{i=1}^k r_i [1 - \omega_i(z)]}{1 - \sum_{i=1}^k r_i \omega_i(z)},$$

ahol

$$(3.10') \quad \Pi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zu} p(u) du.$$

Nem abszorbeáló lassító közegben  $p(u) \equiv 1$ . A (3.10) alatti kifejezésből nagy  $u$  értékekre a következő közelítő formula vezethető le:

$$(3.11) \quad p(u) \sim \frac{\bar{\xi}}{1 - r + \bar{\xi}} \exp \left\{ - \frac{(r - 1)u}{1 - r + \bar{\xi}} \right\},$$

ahol

$$(3.11') \quad \bar{\xi} = \sum_{i=1}^k r_i \xi_i \quad \text{és} \quad r = \sum_{i=1}^k r_i.$$

A neutronok lelassításának elméletében gyakran használatos mennyiség a lassítási sűrűség. Ha másodpercenként  $Q_0$  gyors neutron keletkezik, akkor stacionárius esetben másodpercenként

$$(3.12) \quad q(u) = Q_0 p(u)$$

neutron letargiája emelkedik az  $u$  érték fölé. A  $q(u)$  mennyiséget nevezzük lassítási sűrűségnek.

A (3.5) alatti egyenlet egy közelítő megoldását a következő eljárással kaphatjuk meg. Tegyük fel, hogy  $u \gg u_r \gg \varepsilon_{\max}$ , ahol  $u_r$  az utolsó rezonancia energiához tartozó letargiaérték és  $\varepsilon_{\max}$  az  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$  számok legnagyobbja. Ekkor a (3.5) alatti kifejezésből, ha az  $u - \varepsilon_{\max} \gg u_r$  feltétel is teljesül, az

$$(3.13) \quad \left[ 1 - \sum_{i=1}^k r_i(u) \right] f(u) = - \sum_{i=1}^k \frac{d[f(u) r_i(u)]}{du} \xi_i$$

egyenletet kapjuk. Fejtsük ugyanis sorba a (3.5) jobboldalán álló integrál alatti kifejezésben  $f(u')$ -t és  $r_i(u')$ -t  $u - u'$  hatványai szerint, és rekesszük be a sorfejtést a lineáris tagokkal, akkor a (3.13) alatti kifejezéshez jutunk. Ez a közelítés jogosult, mivel a  $w_i(u - u')$  függvény tulajdonságai miatt az integrál az  $f(u')$  és  $r_i(u')$  függvények csupán gyengén változó szakaszára terjesztendő ki. Helyettesítsük a (3.13) kifejezést a (3.9)-be; azt kapjuk, hogy

$$(3.14) \quad p(u) - f(u) \sum_{i=1}^k r_i(u) \xi_i = \text{konst.}$$

A (3.14) felhasználásával nagy  $u$  értékekre WIEGNER jól ismert formulája származtatható. Nevezetesen azt találjuk, hogy



$$(3.15) \quad p(u) \sim \text{konst.} \exp \left\{ - \int_{u_0}^u \frac{r(u') - 1}{\xi(u')} du' \right\},$$

$$(u_0 < u_r)$$

ahol

$$(3.15') \quad r(u') = \sum_{i=1}^k r_i(u') \quad \text{és} \quad \xi(u') = \sum_{i=1}^k r_i(u') \xi_i.$$

Az itt közölt levezetés világosan mutatja, hogy (3.15) csak olyan  $u$  értékekre érvényes, amelyek elég távol vannak a legutolsó rezonancia energiának megfelelő  $u_r$  értéktől.

#### 4. §.

G. PLACZEK [4] részletesen foglalkozott a lassítási sűrűség aszimptotikus értékének meghatározásával. Az általunk közölt módszer alapján mind az aszimptotikus érték, mind pedig a nagy letargia-értékekre vonatkozó kifejezés könnyűszerrel meghatározható. Egyfajta atommagot tartalmazó, nem abszorbeáló lassító közegben az ütközési sűrűség Laplace-transzformáltját, mint ahogy már láttuk, a következőképpen állíthatjuk elő:

$$(4.1) \quad \varphi(z) = \frac{\omega(z)}{1 - \omega(z)}.$$

Ha a  $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)$  határérték létezik, akkor

$$(4.2) \quad \lim_{z \rightarrow 0} z \varphi(z) = \lim_{u \rightarrow \infty} f(u)$$

tehát

$$(4.3) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = - \frac{1}{\omega'(z)} \Big|_{z=0} = \frac{1}{\xi}$$

szolgáltatja a végtelen nagy letargiához tartozó asszimptotikus értéket.<sup>2)</sup> Megmutatható, hogy az  $1 - \omega(z) = \Omega(z)$  egyenletnek egyetlen egy olyan gyöke van, amelynek a valós része nem negatív, és pedig  $z_0 = 0$ ; az összes többi gyök a képzetes tengelytől balra esik. Legyen  $x$  olyan valós szám, amely nagyobb a képzetes tengelytől balra eső első gyök valós részénél. Ekkor  $\varphi(z)$  az  $x \leq \operatorname{Re} z \leq y$  szakaszon a  $z_0 = 0$  pont kivételével analitikus. A  $z_0 = 0$  pontban pedig  $\varphi(z)$ -nek, amint az könnyen megmutatható, elsőrendű pólusa van. DOETSCH [5] könyvében idézett Abel-féle tételek egyike (488. oldal 1. tétel) alkalmazható, amely szerint  $u \rightarrow \infty$  esetben

$$f(u) = \frac{1}{\xi} + o(e^{xu}),$$

<sup>2)</sup> Megjegyzendő, hogy a  $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)$  határérték létezését külön kell bizonyítani.

Lásd erre vonatkozóan: DOETSCH [5], p. 458., 3. tétel.



ahol  $x < 0$  és

$$\frac{1}{\xi} = \lim_{z \rightarrow 0} z \varphi(z),$$

illetve pontosabban

$$(4.4) \quad f(u) = \frac{1}{\xi} + a e^{-bu},$$

ahol

$$(4.5) \quad a = \frac{2\xi - \varepsilon}{\varepsilon \xi} \quad \text{és} \quad b = \frac{2\xi}{\varepsilon(1 - \xi)}.$$

A (3.4) alatti kifejezésből teljesen hasonló módszerrel vezethető le a PLACZEK által nagy nehézségek árán meghatározott aszimptotikus formula, valamint a kvázi-aszimptotikus tartományban érvényes kifejezés. Rövid számítás után azt találjuk, hogy

$$(4.6) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = \int_0^\infty f(u) du = \frac{\sum_{i=1}^k N_i \sigma_s^i}{\sum_{i=1}^k N_i \sigma_a^i},$$

illetve

$$(4.7) \quad f(u) \sim \frac{r}{1 - r + \xi} \exp \left\{ - \frac{(r-1)u}{1 - r + \xi} \right\}.$$

Ha abszorpció nincs, akkor  $\sum_{i=1}^k r_i = 1$ . Ebben az esetben vissza kell nyúlni a (3.4) alatti formulához, hogy az aszimptotikus értéket megkaphassuk. Rövid számolás után

$$(4.8) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \frac{1}{\xi},$$

ahol most

$$(4.8') \quad \bar{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^k N_i \sigma_s^i \xi_i}{\sum_{i=1}^k N_i \sigma_s^i}.$$

A kvázi-aszimptotikus tartományban pedig a (4.4)-hez hasonlóan

$$(4.9) \quad f(u) = \frac{1}{\bar{\xi}} + \frac{1}{\bar{\xi}} \left\{ \frac{2(1 - \bar{\xi})\bar{\xi}}{\sum_{i=1}^k r_i \varepsilon_i (1 - \xi_i)} - 1 \right\} \exp \left\{ - \frac{2\bar{\xi}u}{\sum_{i=1}^k r_i \varepsilon_i (1 - \xi_i)} \right\}.$$



Állandó hatáskeresztmetszetek esetén nem okoz különösebb nehézséget a pontos megoldás előállítás sem. Foglalkozzunk először a (3.2) alatti kifejezéssel. Egyszerű átalakítások után

$$(4.10) \quad \varphi(z) = \frac{1}{(1-\alpha)\left(z - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)} + \left\{1 + \frac{1}{(1-\alpha)\left(z - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}\right\} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^j \frac{e^{-jz}}{\left(z - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^j}.$$

A (4.10) alatti kifejezés inverz transzformáltját az

$$(4.11) \quad f(u) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^j \times \\ \times \exp\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}(u - j\varepsilon)\right\} \frac{(u - j\varepsilon)^j}{j!} \Delta(u - j\varepsilon) \left\{\frac{1}{1-\alpha} + \frac{j}{u - j\varepsilon}\right\} + \\ + \frac{1}{1-\alpha} \exp\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}u\right\}$$

végtelen sor adja meg. A valóságban (4.11) nem végtelen sor, mert minden véges  $u$  értékéhez maximálisan olyan  $j$  tartozhat, amelyre teljesül az  $u \geq j\varepsilon$  kikötés. A (4.11)-ből könnyűszerrel leszarmaztathatjuk az  $f(u)$  függvényt a  $(0, \varepsilon)$ ,  $(0, 2\varepsilon)$ , ...,  $(0, j\varepsilon)$ , ... intervallumokban. Így pl. a  $(0, \varepsilon)$  intervallumban az

$$(4.12) \quad f(u) = \frac{1}{1-\alpha} \exp\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}u\right\}$$

megoldás, míg a  $(0, 2\varepsilon)$  intervallumban az

$$(4.13) \quad f(u) = \frac{1}{1-\alpha} \exp\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}u\right\} - \alpha \exp\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}(u - \varepsilon)\right\} \left(u - \varepsilon + \frac{1}{1-\alpha}\right)$$

megoldás érvényes. Könnyen megmutatható, hogy  $f(u)$ -nak az  $u = \varepsilon$  pontban elsőfajú szakadása van, ugyanis

$$f(\varepsilon + 0) - f(\varepsilon - 0) = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Az is egyszerűen belátható, hogy bármely  $u = j\varepsilon$  pontban az  $f(u)$   $(j+1)$ -edik differenciálhányadosa szakadást mutat. Természetesen ez azzal a feltevéssel kapcsolatos, hogy monoenergetikus neutronforrásból származó neutronok lassulnak le. A valóságban a neutronforrások sohasem monoenergetikusak és így ez a jelzett tulajdonság elmosódik.



A (3.4) kifejezésből a (4.11)-hez hasonlóan kaphatjuk meg az  $f(u)$ -ra vonatkozó pontos megoldást, állandó hatáskeresztmetszetek esetében.

A (4.10)-ből JENSEN [6], vagy (3.5)-ből RÉNYI módszere segítségével is bebizonyítható a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u)$  aszimptotikus kifejezés létezése, amit fentebb az  $f(u)$  Laplace-transzformált inverziója útján az előbb levezettünk.

## 5. §.

Számítsuk még ki annak a valószínűségét, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott  $(0, u)$  letargia-intervallumban éppen  $n$  ütközés következik be. Jelöljük ezt a valószínűséget  $v_n(u)$ -val. Mivel

$$(5.1) \quad \sum_{j=0}^{n-1} v_j(u) = \int_u^{\infty} p_n(u') du'$$

$v_n(u)$ -ra egyszerűen a következő kifejezést írhatjuk fel:

$$(5.2) \quad v_n(u) = \int_0^u \{p_n(u') - p_{n+1}(u')\} du',$$

amiből pedig Laplace-transzformációval a

$$(5.3) \quad \psi_n(z) = \frac{1}{z} \{ \Pi_n(z) - \Pi_{n+1}(z) \}$$

összefüggésre jutunk, ahol  $\psi_n(z) = \int_0^{\infty} e^{-uz} v_n(u) du$ . Hasznosítsuk mindennek előtt az egyfajta atommagot tartalmazó, nem abszorbeáló közegre vonatkozó (1.7) alatti eredményünket. Ekkor az (5.3)-ból

$$(5.4) \quad \psi_n(z) = \frac{1 - \omega(z)}{z} \{ \omega(z) \}^n$$

formulához jutunk. Többfajta atommagot tartalmazó és energiától független hatáskeresztmetszettel abszorbeáló lassító közegben ez a kifejezés a következőképpen módosul:

$$(5.5) \quad \psi_n(z) = \frac{1 - \sum_{i=1}^k r_i \omega_i(z)}{z} \left\{ \sum_{i=1}^k r_i \omega_i(z) \right\}^n.$$

Ha a hatáskeresztmetszetek függnének az energiától, akkor  $v_n(u)$  meghatározására vissza kell nyúlnunk a (2.3) alatti kifejezésre.

Számunkra különösen fontos az  $n$  átlagértékének meghatározása, vagyis annak ismerete, hogy átlagban hány ütközés után nő a letargia  $u$  értékre.



Az  $n$  átlagértékét egyszerű módon határozhatjuk meg az (5.3) alatti egyenletből kiindulva. Vezessük be a

$$(5.6) \quad \gamma(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) e^{nx}$$

generátorfüggvényt. A  $\gamma(x, z)$  függvényből az  $n$  átlagértékének Laplace-transzformáltjára az (5.5) felhasználásával a következő kifejezés vezethető le:

$$(5.7) \quad \mu(z) = \frac{1}{z} \frac{\sum_{i=1}^k r_i \omega_i(z)}{1 - \sum_{i=k}^k r_i \omega_i(z)},$$

ahol

$$\mu(z) = \int_0^{\infty} m(u) e^{-u} du$$

Ebből nagy  $u$  értékekre meghatározhatjuk az  $m(u)$  aszimptotikus alakját. Mivel  $m(u)$  monoton függvény, alkalmazható VAN DER POL és BREMMER [7] könyvében idézett Tauber-féle tétel (163. oldal, IV. tétel), és azt találjuk, hogy

$$(5.8) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} m(u) = \frac{\sum_{i=1}^k N_i \sigma_s^i}{\sum_{i=1}^k N_i \sigma_a^i},$$

illetve

$$(5.9) \quad m(u) \sim m(\infty) \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{(r-1) u}{1 - r + \frac{1}{\xi}} \right] \right\}.$$

Ha az abszorpciótól eltekintünk, azaz felteszük, hogy  $\sum_{i=1}^k r_i = 1$ , akkor az (5.7)-ből az

$$(5.10) \quad m(u) \sim \frac{u}{\xi} + \frac{1}{2} \left( \frac{2 \bar{\xi}(1 - \bar{\xi}) - \sum_{i=1}^k r_i \varepsilon_i (1 - \xi_i)}{\bar{\xi}^2} \right) + \chi(u)$$

kifejezésre jutunk.

Igen figyelemreméltó az abszorbeáló lassító közegre érvényes (5.8) alatti kifejezés, amely szerint a teljes lelassuláshoz szükséges ( $u \rightarrow \infty$ ) ütközések számának várható értéke véges.

A nem abszorbeáló lassító közegre érvényes (5.10) alatti kifejezésben fellépő, letargiától nem függő korrekció igen kicsiny és könnyen megmutat-



ható, hogy a letargiától függő  $\chi(u)$  korrekció pedig exponenciálisan csökken. Ez az eredmény általános formában TAKÁCS [8] egy korábbi dolgozatában megtalálható.

Annak illusztrálására, hogy kis letargia-értékek mellett az átlagos ütközési szám mennyire eltér az irodalomban használatos közelítő kifejezéstől, számítsuk ki egyfajta atommagot tartalmazó, nem abszorbeáló közegben a  $(0, \varepsilon)$  intervallumban érvényes átlagos ütközések számát. Az (5.4) alatti kifejezésből azt kapjuk, hogy

$$(5.11) \quad m(u) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \exp \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} u \right) - 1 \right\} \quad (0 \leq u \leq \varepsilon).$$

Ha  $u$  helyett ismét energiát használunk, akkor ez a kifejezés a következőképpen módosul:

$$(5.12) \quad m(E_0, E) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \left( \frac{E_0}{E} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1 \right\} \quad (E_0 \geq E \geq \alpha E_0).$$

Az ütközési szám szórásnégyszetére abszorbeáló lassító közeg esetében az (5.5) alatti kifejezés felhasználásával a következő aszimptotikus formula vezethető le:

$$(5.13) \quad \lim S^2(u) = A(A+1) = S^2(\infty)$$

illetve nagy  $u$  értékekre

$$(5.14) \quad S^2(u) \sim A(A+1) \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{(r-1)u}{1-r+\xi} \right] \right\} - \\ - 2A^2 \frac{(r-1)u}{1-r+\xi} \exp \left[ - \frac{(r-1)u}{1-r+\xi} \right],$$

ahol

$$(5.14') \quad A = \frac{\sum_{i=1}^k N_i \sigma_s^i}{\sum_{i=1}^k N_i \sigma_a^i}.$$

Nem abszorbeáló közegben pedig a korrekciók figyelembevétele nélkül a következő aszimptotikus kifejezés származtatható:

$$(5.15) \quad S^2(u) \sim \frac{u^2}{\xi^2}.$$

Szembetűnő a szórási magas értéke.

#### IRODALOM

- [1] S. GLASSTONE—M. E. EDLUND: *The elements of nuclear reactor theory*. van Nostrand, New York, 1952.
- [2] R. E. MARSHAK: „Theory of the slowing down of neutrons by elastic collision with atomic nuclei.” *Review of Modern Physics* **19** (1947) 185—238.
- [3] Л. АРШИМОВИЧ—И. КУРЧАТОВ и другие, *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики* **5** (1935) 659—664.



- [4] G. PLACZEK : „On the theory of the slowing down of neutrons in heavy substances.” *Physical Review* **69** (1946) 423—438.
- [5] G. DOETSCH : *Handbuch der Laplace-Transformation*. Birkhäuser, Basel, 1950.
- [6] J. L. W. V. JENSEN : „Sur une identité d'Abel et sur d'autres formules analogues.” *Acta Mathematica* **26** (1902) 307—318.
- [7] Б. ван дер Пол—Х. Бреммер : *Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа*. Издательство Иностранной Литературы, Москва, 1952.
- [8] L. TAKÁCS : „Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1955) 135—151.

(Beérkezett. 1956. II. 3.)

## О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ЗАМЕДЛЕНИЯ НЕЙТРОНОВ

Л. ПАЛ

### Резюме

Применение хорошо обоснованных теоретико-вероятностных методов для изучения процессов замедления нейтронов существенно облегчает решение целого ряда важных проблем. В данной работе выводятся точные выражения для плотности столкновений и для вероятности избежать резонансного захвата нейтронов при стационарных условиях.

Прежде всего определим вероятность того, что летаргия нейтрона (1.3) после  $n$  столкновений находится в интервале  $(u, u + du)$ . Обозначим эту вероятность через  $p_n(u)du$  (1.6). Выражение (1.10) является точным решением задачи в случае непоглощающей однородной замедляющей среды. (В дальнейшем однородной будем называть такую среду, которая состоит лишь из одного типа атомов. Неоднородная среда, наоборот, состоит из гомогенной смеси разного типа атомов.) Формулы (1.13) и (1.14) определяют среднее значение и дисперсию летаргии после  $n$  столкновений.

Обобщение выражения (1.16) для поглощающей и неоднородной замедляющей среды дается уравнением (2.3), решение которого в случае независимого от энергии сечения поглощения легко может быть найдено с помощью преобразования Лапласа (2.4).

Для определения плотности столкновений используем выражение (3.1) и после несложных операций выводим для  $f(u)$  самое общее уравнение (3.5), решение которого в некоторых частных случаях легко получается. Общее решение уравнение (3.5) трудно получить, но при определенных условиях из (3.5) может быть выведено приближенное уравнение (3.13), решение которого дается формулой (3.14).

Уравнением (3.9) устанавливается связь между плотностью столкновений и вероятностью избежать резонансного захвата. (3.10) определяет вероятность избежать резонансного захвата в случае поглощающей и неоднородной среды при условии, что сечения поглощения постоянны, а (3.15) в более общем случае.

Характер функции плотности столкновений для больших значений летаргии имеет важное значение для целого ряда вопросов. Используя некоторые теоремы типа Таубера и Абеля, определили асимптотическое поведение плотности столкновений в разных случаях (4.4), (4.7) и (4.9). В самом простейшем случае (случай однородной непоглощающей среды) выписали точное выражение для  $f(u)$  в любом интервале  $(0, u)$ .

В литературе часто дается неправильный метод для вычисления среднего числа столкновений, необходимого для увеличения летаргии на определенную величину. Выражение (5.2) является вероятностью того, что в интервале летаргии  $(0, u)$  происходит  $n$  столкновений. Вводя производящую функцию (5.6), в простых случаях легко может быть вычислено среднее значение числа столкновений в интервале  $(0, u)$  при больших значениях  $u$ . В случае поглощающей среды выражение (5.9), для непоглощающей среды (5.10) успешно могут быть применены для определения среднего значения числа столкновений. Дисперсия определяется формулами (5.14) и (5.15).



SOME PROBLEMS CONCERNING THE SLOWING DOWN  
OF NEUTRONS

L. PÁL

## Summary

The process of slowing down of neutrons may be simply treated in the stationary case by means of well founded methods of the calculus of probability. In the following expressions for collision density and resonance escape probability will be deduced which are more accurate than those given up to now in the literature.

To start with, the lethargy  $u$  of a neutron is defined by (1.3), and in (1.5) the maximum of the increase in lethargy of the neutron during a collision, denoted by  $\varepsilon$  is defined. Subsequently in assuming the collisions to be elastic and that scattering with respect to the center of the mass system may to be isotropic, the probability, represented by  $w(u) du$  that the neutron lethargy increases in course of a single collision by a value lying in the lethargy interval  $(u, u + du)$  is given.

Let us denote by  $p_n(u) du$  the probability that the lethargy of a neutron falls in the interval  $(u, u + du)$  after the  $n$ -th collision. We assume first that the moderator is homogeneous and non-absorbing. After having found the precise expression (1.10) of  $p_n(u)$ , an approximate value (1.11) of  $p_n(u)$  for great values of  $n$  is given. Subsequently the average change in lethargy (1.13) and dispersion (1.14) for  $n$  collisions is calculated.

Let  $r_i(u)$  be the probability (2.1) that the neutron will not be absorbed when colliding with the  $i$ -th nucleus. [In (2.1)  $\sigma_a^i$  is the cross section for absorption of the nucleus of type  $i$  and  $\sigma_t^i$  is the total cross section of the nucleus of type  $i$ ; the number of the nuclei of type  $i$  in 1 cm<sup>3</sup> is represented by  $N_i$ .] In § 2. a general recursion formula (2.3) is given for  $p_n(u)$  with help of the  $r_i$ .

In §. 3. the collision density  $f(u)$  is introduced. The general relation between  $f(u)$  and  $p_n(u)$  is given by (3.1). The Laplace-transform of  $f(u)$  is calculated postulating homogeneous, non-absorbing media (3.2) as well as heterogeneous media with an absorption cross section independent of the energy (3.4). From (3.1) the known integral equation for  $f(u)$  is obtained. Further a relation is given between the resonance escape probability represented by  $p(u)$  and  $f(u)$  (3.9) and assuming that  $r_i = \text{constant}$ , we obtain the Laplace-transform of  $p(u)$  (3.10). From (3.10) we obtain (3.11) for great values of  $u$ .

In §. 4. the asymptotic and quasi-asymptotic value of  $f(u)$  is given by using (3.2) and (3.4) with the postulates mentioned when deriving (3.2) and (3.4).

For heterogeneous, non-absorbing media the asymptotic and quasi-asymptotic values of  $f(u)$  are given by (4.8) and (4.9). Subsequently the precise value of  $f(u)$  is also given by means of (3.2) for homogeneous, non-absorbing media (4.11), and it is shown that the function obtained and its derivatives possess the known discontinuities.

In §. 5. the probability that in the lethargy interval  $(0, u)$  exactly  $n$  collisions occur (5.2) which is denoted by  $v_n(u)$  is considered. The Laplace-transform of  $v_n(u)$  is given by (5.3) for the general case and by (5.4) with respect to homogeneous, nonabsorbing media; finally (5.5) gives the transform of the function when assuming heterogeneous moderators. If  $r_i = \text{constant}$ , we can define by using (5.5) the Laplace-transform of the average number of collisions necessary to attain the value  $u$  of lethargy concerning the moderator in question. Thus we may calculate the asymptotic (5.8) and quasi-asymptotic value (5.9) of the mean. (5.10) gives the average asymptotic value for heterogeneous non-absorbing media. (5.11) gives also the average value looked for but referring to homogeneous, non-absorbing media in the lethargy range  $0 \leq u \leq \varepsilon$ .

Finally the asymptotic value of the dispersion of the number of collisions necessary to attain the lethargy  $u$  is given first for heterogeneous, absorbing moderators (5.14). then for heterogeneous non-absorbing media.



# ATOMMAG-REAKTOROK ELMÉLETÉVEL KAPCSOLATOS NÉHÁNY VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI KÉRDÉSRŐL

TAKÁCS LAJOS

## Bevezetés

E dolgozat az atommag-reaktorokban lejátszódó neutronlassítás folyamat valószínűségi számítási vizsgálatával foglalkozik. A tárgyalt kérdések közelítő megoldása már ismeretes volt, és megtalálható például S. GLASSTONE és M. C. EDLUND [1] könyvének VI. fejezetében. Továbbá néhány speciális eset pontos vizsgálatát is megadta O. OLSSON [2]. Jelen dolgozat célja az említett kérdések közül egyeseknek a sztochasztikus folyamatok elméletének segítségével való exakt és a szakirodalomban találhatónál teljesebb tárgyalása.<sup>1)</sup>

## 1. §. A neutronlassítás folyamata

Mint ismeretes, az atommag-reaktorokban a megvasadások során keletkező többmillió eV-os neutronok termikus neutronokká, azaz néhány század eV-os neutronokká lassulnak le. A lassulás úgy megy végbe, hogy a neutronok a lassító közeg atommagjaival ütköznek és minden egyes ütközésnél elvesztenek bizonyos energiát. Sőt, előfordulhat az is, hogy ütközés alkalmával a neutronokat befogja (abszorbeálja) egy atommag. Fontos kérdés annak megvizsgálása, hogy a neutronok lassulásának időbeli folyamata milyen valószínűségi törvény szerint történik.

Tekintsünk egy  $t = 0$  időpillanatban  $E_0$  kezdeti energiával rendelkező neutront. Tegyük fel, hogy a neutron végtelen kiterjedésű homogén közegben mozog. A közeg álljon  $r$  különböző típusú atomból. Jelölje az egyes atomok térbeli sűrűségét (térfogategységre eső átlag számát)  $N_1, N_2, \dots, N_r$  és az egyes atommagok tömegszámait  $A_1, A_2, \dots, A_r$ . Jelölje továbbá a neutronnak az egyes atommagokra vonatkozó szóródási hatáskeresztmetszeteit  $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_r^*$  és a befogási (abszorpciós) hatáskeresztmetszeteit:  $\sigma_1^{**}, \sigma_2^{**}, \dots, \sigma_r^{**}$ . Legyen  $\sigma_i = \sigma_i^* + \sigma_i^{**}$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Az említett hatáskeresztmetszettek általában függenek az ütköző neutron  $E$  energiájától. Vezes-

<sup>1)</sup> A neutronok lassításának elméleti vizsgálatával foglalkozik PÁL LÉNÁRD: „A neutronok lelassításának néhány kérdéséről” című, jelen kötet 41–54. oldalain megtalálható dolgozata is. Míg PÁL LÉNÁRD az ütközések számának az energiától való függésével foglalkozik, addig jelen dolgozat a lassítás időbeli folyamatát vizsgálja.



sük be végül a következő rövidítéseket:  $\gamma_i = N_i \sigma_i$  és  $\gamma_i^* = N_i \sigma_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), és legyen  $C = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r$  és  $C^* = \gamma_1^* + \gamma_2^* + \dots + \gamma_r^*$ .

Vizsgálatainkban feltesszük, hogy  $E_0$ , a neutron kezdeti energiája, rögzített érték. Vezessük be továbbá a letargia fogalmát. Egy  $E$  energiájú neutron letargiája  $x = \log E_0/E$ , azaz  $E = E_0 e^{-x}$ . Tegyük fel, hogy a neutronok ütközése olyan természetű, hogy szóródás alkalmával a letargia növekedés független az ütközés előtti értéktől. Az  $i$ -edik típusú atommagon történő szóródás alkalmával nyert letargia növekedés eloszlásfüggvénye legyen  $H_i(x)$ , ahol feltesszük, hogy  $H_i(0) = 0$ . A neutronok ütközésének szokásos modellje, az izotrop ütközés, eleget tesz a fenti követelményeknek. Ha egy  $E$  energiájú neutron ilyen ütközést szenved, az  $i$ -edik típusú atommagon, úgy szóródás után az energiája az  $(\alpha_i E, E)$  intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó lesz, ahol  $\alpha_i = \left( \frac{A_i - 1}{A_i + 1} \right)^2$ . Ekkor a letargia növekedés eloszlásfüggvénye

$$H_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ \frac{1 - e^{-x}}{1 - \alpha_i} & \text{ha } 0 \leq x \leq \log \frac{1}{\alpha_i} \\ 1 & \text{ha } x > \log \frac{1}{\alpha_i} \end{cases}$$

A következőkben a  $\gamma_i$ ,  $\gamma_i^*$ ,  $C$  és  $C^*$  mennyiségeket a neutron  $x$  letargiájának függvényének tekintjük, azaz  $\gamma_i = \gamma_i(x)$ ,  $\gamma_i^* = \gamma_i^*(x)$ ,  $C = C(x)$  és  $C^* = C^*(x)$  jelöléseket alkalmazzuk.

Előrebocsátjuk végül, hogy annak a valószínűsége, hogy egy  $x$  letargiájú neutron  $\Delta t$  idő alatt legalább egy  $i$ -típusú atommagon ütközést szenved:  $a\gamma_i(x)e^{-x/2}\Delta t + o(\Delta t)$ , és hogy legalább egyszóródást szenved:  $a\gamma_i^*(x)e^{-x/2}\Delta t + o(\Delta t)$ , ahol  $a = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$  és  $m$  a neutron tömege. Ugyanis egy  $E$  energiájú neutron  $\Delta t$  idő alatt

$$\Delta s = \sqrt{\frac{2E}{m}} \Delta t = \sqrt{\frac{2E_0}{m}} e^{-x/2} \Delta t = a e^{-x/2} \Delta t$$

nagyságú elmozdulást végez (eltekintve a  $o(\Delta t)$  tagtól) és  $\Delta s$  elmozdulás alatt az ütközés, illetve szóródás valószínűsége  $\gamma_i(x)\Delta s + o(\Delta s)$  és  $\gamma_i^*(x)\Delta s + o(\Delta s)$ .

## 2. §. A probléma kitűzése

Tekintsünk egy  $t = 0$  időpontban  $E_0$  kezdeti energiával rendelkező neutront, amely a fent részletezett körülmények között mozog, végtelen kiterjedésű közegben.

Jelölje  $\eta_t$  valószínűségi változó a neutron letargiáját  $t$  időpontban. Ekkor az energia  $t$  időpontban  $E_t = E_0 e^{-\eta_t}$ . Legyen  $A_t$  az az esemény, hogy



$(0, t)$  időközben nem abszorbeálódik a neutron. Legyen továbbá  $\tau_x = \inf_{\eta_t > x} t$ . Jelölje  $\nu(t)$  a  $(0, t)$  időközben történő ütközések számát és legyen  $\mu_x = \nu(\tau_x)$ . Jelölje végül  $\eta_n$  valószínűségi változó a neutron letargiáját az  $n$ -edik ütközés pillanata után ( $\eta_0 \equiv 0$ ) és legyen  $A_n$  az az esemény, hogy az első  $n$  ütközés nem vezet abszorpcióra.

A következőkben a fent felsorolt valószínűségi változók és véletlen eseményekkel kapcsolatos valószínűségek meghatározásával fogunk foglalkozni.

Fizikai szempontból a  $\tau_x$  változó bír különös fontossággal. Ez méri ugyanis azt, hogy az  $E_0$  energiájú neutronok mennyi idő alatt lassulnak le bizonyos  $E = E_0 e^{-x}$  energiaszint alá (például mennyi idő alatt válnak termikus neutronokká). A  $\tau_x$  változó várható értékét E. FERMI meghatározta és azt nyerte (S. GLASSTONE és M. C. EDLUND [1], p. 184.), hogy

$$\mathbf{M}\{\tau_x\} \sim \frac{\sqrt{2m} \Lambda}{\varepsilon} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{1}{\sqrt{E_0}} \right),$$

ahol  $m$  a neutron tömege,  $\Lambda$  a neutronok átlagos szabad úthossza és  $\varepsilon$  az egy ütközésre eső átlagos letargiacsökkenés.

### 3. §. Az $\eta_t$ folyamat vizsgálata

Mindenekelőtt megállapíthatjuk, hogy  $\eta_t (0 \leq t \leq \infty)$  Markov-folyamat: Ugyanis, ha ismerjük a neutron energiáját  $t$  időpontban, úgy ez az adat egyértelműen meghatározza a neutron jövő sztochasztikus viselkedését. Vezessük be a következő jelölést:

$$(1) \quad \mathbf{P}\{\eta_t \leq x, A_t\} = F(t, x).$$

Ekkor speciálisan

$$(2) \quad \mathbf{P}\{A_t\} = F(t, \infty)$$

és

$$(3) \quad \mathbf{P}\{\eta_t \leq x | A_t\} = \frac{F(t, x)}{F(t, \infty)}.$$

Az  $F(t, x)$  eloszlásfüggvény a

$$(4) \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = -a \int_0^x e^{-y/2} [C(y) - \sum_{i=1}^r \gamma_i^*(y) H_i(x-y)] dy F(t, y)$$

integró-differenciálegyenletnek  $F(0, x) = 1$ , ha  $x \geq 0$  és  $F(0, x) = 0$ , ha  $x < 0$  kezdeti feltételeknek eleget tevő megoldása. A megoldás explicit alakban a következőképpen fejezhető ki:

$$(5) \quad F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (at)^n}{n!} G_n(x),$$



ahol

$$(6) \quad G_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

és

$$(7) \quad G_{n+1}(x) = \int_0^x e^{-y/2} [C(y) - \sum_{i=1}^r \gamma_i^*(y) H_i(x-y)] dG_n(y).$$

**Bizonyítás:** Felírhatjuk a következő összefüggést:

$$\begin{aligned} F(t + \Delta t, x) &= \int_0^x [1 - a C(y) e^{-y/2} \Delta t] d_y F(t, y) + \\ &+ a \sum_{i=1}^r \int_0^x \gamma_i^*(y) e^{-y/2} \Delta t H_i(x-y) d_y F(t, y) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Ennek fennállása a következőképpen adódik:  $(\eta_{t+\Delta t} \leq x, A_{t+\Delta t})$  esemény akkor valósul meg, ha  $(\eta_t = y, A_t)$  feltétel mellett  $(0 \leq y \leq x)$  a  $(t, t + \Delta t)$  időközben nem történik ütközés, vagy szóródásra vezető ütközés történik és a letargia növekedés legfeljebb  $x - y$ . A fenti összefüggésből  $\Delta t \rightarrow 0$  határátmenet elvégzésével adódik (4).

A (4) differenciálegyenlet úgynevezett KOLMOGOROV—FELLER típusú egyenlet. Ilyen egyenletek megoldásával és a megoldás egyértelműségének kérdésével W. FELLER [3] munkájában foglalkozott. Jelenleg ezekkel a kérdésekkel nem foglalkozunk, csupán megemlítjük, hogy könnyen belátható, hogy az (5) megoldás kielégíti a (4) egyenletet és a kezdeti feltételt is.

Speciálisan (5) szerint fennáll, hogy

$$F(t, 0) = e^{-aC(0)t}$$

amely eredmény közvetlenül is megkapható.

**Példa:** Tekintsük azt a speciális esetet, midőn  $\gamma_i^*(x) = \gamma_i^*$  (állandó) és  $C(x) = C$  (állandó) és legyen  $C^* = \gamma_1^* + \gamma_2^* + \dots + \gamma_r^*$ . Vezessük be a következő eloszlásfüggvényt

$$(8) \quad H(x) = \frac{\gamma_1^* H_1(x) + \gamma_2^* H_2(x) + \dots + \gamma_r^* H_r(x)}{\gamma_1^* + \gamma_2^* + \dots + \gamma_r^*}.$$

Ekkor (4) a következő egyszerű alakban írható fel

$$(9) \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = -w \int_0^x e^{-y/2} [1 - \varrho H(x-y)] d_y F(t, y),$$

ahol  $\varrho = C^*/C$  és  $w = aC$ .

A (9) egyenlet Laplace—Stieltjes transzformáció alkalmazásával is megoldható. Legyen



$$(10) \quad \varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(x)$$

és

$$(11) \quad \psi(t, s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d_x F(t, x)$$

úgy (9) szerint fennáll:

$$(12) \quad \frac{\partial \psi(t, s)}{\partial t} = -w[1 - \varrho \varphi(s)] \psi\left(t, s + \frac{1}{2}\right).$$

Mivel  $\eta_0 = 0$ , tehát  $\psi(0, s) = 1$  és így (12) integrálásával

$$(13) \quad \psi(t, s) = 1 - w[1 - \varrho \varphi(s)] \int_0^t \psi(u, s + \frac{1}{2}) du$$

adódik. Ennek a képletnek ismételt alkalmazásával  $\psi(t, s)$  sorra kifejezhető  $\psi\left(t, s + \frac{n}{2}\right)$  segítségével. Ha tekintetbe vesszük, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi\left(t, s + \frac{n}{2}\right) = 0$  úgy végül azt kapjuk, hogy

$$(14) \quad \psi(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (wt)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \left[1 - \varrho \varphi\left(s + \frac{j}{2}\right)\right].$$

Ennek megfordításával  $F(t, x)$  egyértelműen meghatározható. Ebben az esetben fennáll

$$(15) \quad \mathbf{P}\{A_t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (wt)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \left[1 - \varrho \varphi\left(\frac{j}{2}\right)\right],$$

ugyanis  $\mathbf{P}\{A_t\} = F(t, \infty) = \psi(t, 0)$ .

Továbbá az  $\eta_t$  letargia feltételes várható értéke

$$(16) \quad \mathbf{M}\{\eta_t | A_t\} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (wt)^n \left\{ \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \varrho \varphi\left(\frac{j}{2}\right)\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-\varrho \varphi'\left(\frac{k}{2}\right)}{1 - \varrho \varphi\left(\frac{k}{2}\right)} \right\}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (wt)^n \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \varrho \varphi\left(\frac{j}{2}\right)\right)};$$

ugyanis  $\mathbf{M}\{\eta_t | A_t\} = -\psi'(t, 0)/\psi(t, 0)$ , ahol  $\psi' = \partial \psi / \partial s$ .



A neutron energiája  $t$  időpontban  $E_t = E_0 e^{-\eta_t}$ , és így  $E_t$  feltételes várható értéke

$$(17) \quad \mathbf{M}\{E_t|A_t\} = E_0 \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (wt)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \left[1 - \varrho \varphi\left(1 + \frac{j}{2}\right)\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (wt)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \left[1 - \varrho \varphi\left(\frac{j}{2}\right)\right]}$$

ugyanis  $\mathbf{M}\{E_t|A_t\} = E_0 \psi(t, 1)/\psi(t, 0)$ . Hasonlóképpen határozhatók meg  $E_t$  magasabbrendű momentumai is.

#### 4. §. A $\tau_x$ változó eloszlása

Vezessük be a következő valószínűséget  $\mathbf{P}\{\tau_x \leq t, A_{\tau_x}\}$ . Most az  $A_{\tau_x}$  esemény nem jelent egyebet, mint a  $\tau_x$  valószínűségi változó létezésének az eseményét. Könnyen látható, hogy most létezik a következő sűrűségfüggvény

$$(18) \quad g(t, x) = \frac{d\mathbf{P}\{\tau_x \leq t, A_{\tau_x}\}}{dt},$$

éspedig fennáll, hogy

$$(19) \quad g(t, x) = a \sum_{i=1}^r \int_0^x e^{-y/2} \gamma_i^*(y) [1 - H_i(x - y)] d_y F(t, y).$$

(19) könnyen adódik annak tekintetbe vételével, hogy  $t < \tau_x < t + \Delta t$  akkor fordul elő, ha  $t$  időpontban  $\eta_t = y$  (ahol  $0 \leq y \leq x$ ) és  $(t, t + \Delta t)$  időközben történik legalább egy szóródásra vezető ütközés és a letargianövekedés nagyobb, mint  $x - y$ .

A  $g(t, x)$  függvény segítségével felírható, hogy

$$(20) \quad \mathbf{P}\{A_{\tau_x}\} = \int_0^{\infty} g(t, x) dt$$

A  $\tau_x$  várható értéke pedig

$$(21) \quad \mathbf{M}\{\tau_x|A_{\tau_x}\} = \frac{\int_0^{\infty} t g(t, x) dt}{\int_0^{\infty} g(t, x) dt}.$$

A (20) valószínűség és (21) várható érték kiszámításával most nem foglalkozunk, mert a következő fejezetben, a (28) és (34) képletek segítségével egyszerűbb alakban is ki fogjuk fejezni.



**Példa.** A 3. §. végén említett speciális esetben felírható, hogy

$$(22) \quad g(t, x) = w \varrho \int_0^x e^{-y/2} [1 - H(x - y)] d_y F(t, y).$$

Legyen ebben az esetben  $\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\} = A_0(x)$  és  $\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\} \mathbf{M}\{\tau_x | A_{\tau_x}\} = A_1(x)$ . Most  $A_0(x)$  és  $A_1(x)$  könnyen meghatározhatók Laplace—Stieltjes transzformáció segítségével, ugyanis fennáll, hogy

$$(23) \quad \int_0^\infty e^{-sx} d A_0(x) = \frac{\varrho[1 - \varphi(s)]}{1 - \varrho \varphi(s)}$$

és

$$(24) \quad \int_0^\infty e^{-sx} d A_1(x) = \frac{1}{w} \frac{\varrho[1 - \varphi(s)]}{[1 - \varrho \varphi(s)] \left[1 - \varrho \varphi\left(s - \frac{1}{2}\right)\right]},$$

feltéve, hogy ezen integrálok léteznek. Ezek a képletek (22) és (13) képletek alapján adódnak  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t, s) = 0$  és  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \psi(t, s) = 0$  tekintetbe vételével.

### 5. §. A $\mu_x$ változó eloszlása

Vezessük be a következő valószínűségeket:  $\mathbf{P}\{\eta_n \leq x, A_n\} = Q_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), ahol  $\eta_0 = 0$  és  $A_0$  a biztos esemény. A  $Q_n(x)$  valószínűségek a következő rekurzív képlet segítségével határozhatók meg:

$$Q_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

és  $n = 1, 2, 3, \dots$ -ra

$$(25) \quad Q_n(x) = \sum_{i=1}^r \int_0^x \frac{\gamma_i^*(y) H_i(x - y)}{C(y)} dQ_{n-1}(y).$$

Ugyanis annak a valószínűsége, hogy egy ütközés az  $i$ -edik típusú atommagon történő szóródás  $\gamma_i^*(y)/C(y)$  feltéve, hogy a neutron letargiája  $y$ .

A  $\mu_x$  valószínűségi változó eloszlása könnyen kifejezhető a  $Q_n(x)$  valószínűségek segítségével, mégpedig fennáll, hogy

$$(26) \quad \mathbf{P}\{\mu_x = n, A_{\tau_x}\} = \sum_{i=1}^r \int_0^x \frac{\gamma_i^*(y) [1 - H_i(x - y)]}{C(y)} dQ_{n-1}(y).$$

Ugyanis a  $\{\mu_x = n, A_{\tau_x}\}$  esemény akkor teljesül, ha az  $n$ -edik ütközésnél szóródás történik és ütközés után a neutron letargiája  $x$ -nél nagyobb lesz.



(26) a következő ekvivalens alakban is felírható :

$$(26) \quad \mathbf{P}\{\mu_x = n, A_{\tau_x}\} = \int_0^x \frac{C^*(y)}{C(y)} dQ_{n-1}(y) - Q_n(x).$$

Mivel

$$\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\mu_x = n, A_{\tau_x}\},$$

ezért (27) alapján felírható, hogy

$$(28) \quad \mathbf{P}\{A_{\tau_x}\} = 1 - \int_0^x \left[ 1 - \frac{C^*(y)}{C(y)} \right] dM(y),$$

ahol

$$(29) \quad M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x).$$

Megjegyezzük, hogy  $M(x)$  a következő integrálegyenlet megoldásával is meghatározható :

$$(30) \quad M(x) = 1 + \sum_{i=1}^r \int_0^x \frac{\gamma_i^*(y) H_i(x-y)}{C(y)} dM(y),$$

amelynek fennállása könnyen igazolható (25) segítségével.

## 6. §. A $\tau_x$ várható értéke

Most  $\mu_x$  feltételes várható értéke a következőképpen nyerhető :

$$(31) \quad \mathbf{M}\{\mu_x | A_{\tau_x}\} = \frac{1}{\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\}} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{P}\{\mu_x = n, A_{\tau_x}\},$$

ahol a szereplő  $\mathbf{P}\{\mu_x = n, A_{\tau_x}\}$  valószínűség a (26) kifejezéssel egyenlő.

Ezután rátérünk a  $\tau_x$  valószínűségi változó (21) alatti feltételes várható értékének meghatározására. E célból bevezetjük a következő függvényt  $z \geq 0$ -ra :

$$(32) \quad M(x; z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x; z)$$

ahol

$$Q_0(x; z) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \geq z \\ 0 & \text{ha } x < z \end{cases}$$

és

$$(33) \quad Q_n(x, z) = \sum_{i=1}^r \int_0^x \frac{\gamma_i^*(y) H_i(x-y)}{C(y)} d_y Q_{n-1}(y; z).$$



Az itt szereplő  $M(x; z)$  és  $Q_n(x; z)$  függvények  $z = 0$  speciális esetben megadják a (29) és (25) függvényeket és egyébként csupán abban különböznek azoktól, hogy feltesszük, hogy kezdetben a neutron letargiája  $z$  értékű.

A  $\tau_x$  valószínűségi változó (21) alatti feltételes várható értéke  $M(x)$  és  $M(x; z)$  segítségével a következő alakban is felírható:

$$(34) \quad \mathbf{M}\{\tau_x | A_{\tau_x}\} = \\ = \frac{1}{\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\}} \int_0^x \left\{ 1 - \int_y^x \left[ 1 - \frac{C^*(u)}{C(u)} \right] d_u M(u; y) \right\} \frac{e^{y/2}}{a C^*(y)} dM(y).$$

Ugyanis  $\tau_x$  összetevődik azokból az időtartamokból, amelyeket a neutron különböző  $y$  letargiájú állapotokban tölt ( $0 \leq y \leq x$ ). Ha pedig a neutron szóródásra vezető ütközés által  $y$  letargiájú állapotba jut és a következő ütközés is szóródás lesz, akkor az  $y$  letargiájú állapotban töltött időtartam

várható értéke  $\frac{1}{a C^*(y) e^{-y/2}}$ . Ez az időtartam azonban csak akkor veendő

figyelembe  $\tau_x$  meghatározásánál, ha a neutron az  $x$  letargia érték eléréséig nem abszorbeálódik, aminek a valószínűsége (28)-hoz hasonlóan:

$$1 - \int_y^x \left[ 1 - \frac{C^*(u)}{C(u)} \right] d_u M(u; y).$$

Megjegyezzük, hogy a (34) alatti várható érték nem tévesztendő össze azzal a várható értékkel, amelyet úgy számolunk, hogy kizárjuk az abszorpció lehetőségét. (34) kiszámításánál tekintetbe vesszük, hogy a neutronok abszorbeálódhatnak, de  $\tau_x$  várható értékének kiszámításánál csak azokra a neutronokra vagyunk tekintettel, amelyek nem abszorbeálódtak.

*Példa.* Tekintsük ismét a 3. §. végén említett speciális esetet. Jelölje  $H_n(x)$  a  $H(x)$  eloszlásfüggvénynek önmagával való  $n$ -szeres kompozícióját. ( $H_0(x) = 1$ , ha  $x \geq 0$  és  $H_0(x) = 0$ , ha  $x < 0$ ). Ekkor fennáll, hogy  $Q_n(x) = \varrho^n H_n(x)$  azaz

$$(35) \quad M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n H_n(x)$$

és

$$(36) \quad M(x; z) = M(x - z).$$

Ekkor (28) szerint

$$(37) \quad \mathbf{P}\{A_{\tau_x}\} = 1 - (1 - \varrho) M(x)$$

és (34) szerint

$$(38) \quad \mathbf{M}\{\tau_x | A_{\tau_x}\} = \frac{1}{w \varrho \mathbf{P}\{A_{\tau_x}\}} \int_0^x e^{y/2} [1 - (1 - \varrho) M(x - y)] dM(y)$$



amely eredmények megegyeznek a (22) és (23) korábbi eredményekkel, ugyanis most

$$(39) \quad \int_0^{\infty} e^{-sx} dM(x) = \frac{1}{1 - \varrho \varphi(s)}.$$

Ha speciálisan a közeg csupán hidrogén atomokból áll, úgy  $H(x) = 1 - e^{-x}$ , ha  $x \geq 0$  és ekkor

$$(40) \quad M(x) = 1 + \frac{\varrho}{1 - \varrho} (1 - e^{-(1-\varrho)x}),$$

ahonnan

$$(41) \quad \mathbf{P}\{A_{\tau_x}\} = \varrho e^{-(1-\varrho)x}$$

és

$$(42) \quad \mathbf{M}\{\tau_x | A_{\tau_x}\} = \frac{2}{w} (e^{x/2} - 1) + \frac{1}{w\varrho}.$$

Ha  $E = E_0 e^{-x}$ , úgy  $w = aC = \sqrt{2E_0/m}C$  és  $\varrho = C^*/C$  tekintetbe vételével

$$(43) \quad \mathbf{M}\{\tau_x | A_{\tau_x}\} = \frac{\sqrt{2m}}{C} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{1}{\sqrt{E_0}} \right) + \frac{\sqrt{2m}}{2C^* \sqrt{E_0}}.$$

Ha eltekintünk az utolsó tagtól (vagyis az időt az első ütközés pillanatától kezdve számítjuk), úgy ebben az esetben éppen E. FERMI bevezetésben említett képlete áll előttünk. Ugyanis most az ütközésenkénti letargia csökkenés várható értéke 1, és a neutronok szabad úthossza  $1/C$ .

#### IRODALOM

- [1] S. GLASSTONE—M. C. EDLUND: *The elements of nuclear reactor theory*. van Nostrand, New York, 1952.
- [2] O. OLSSON: „A theoretical study of the time energy distribution of slowed-down neutrons.” *Arkiv för Physik* **10** (1955) 129—144.
- [3] W. FELLER: „Zur Theorie der stochastischen Prozesse.” *Mathematische Annalen* **113** (1936) 116—160.

(Beérkezett: 1956. II. 9.)

#### О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОБЛЕМАХ, СВЯЗАННЫХ С ТЕОРИЕЙ АТОМНЫХ РЕАКТОРОВ

Л. ТАКАЧ

#### Резюме

Настоящая работа исследует процессы замедления нейтронов происходящие в атомном реакторе. Рассмотрим нейтрон, обладающий в момент  $t = 0$  (фиксированной) начальной энергией  $E_0$ . Пусть в момент  $t$  случайные величины  $E_t$  и  $\eta_t = \log E_0/E_t$  обозначают соответственно энергию нейтрона и его *летаргию*. Предположим, что нейтрон



движется в бесконечной однородной среде. Пусть эта среда состоит из атомных ядер  $r$  различных типов. Обозначим через  $A_1, A_2, \dots, A_r$  атомных масс, а  $N_1, N_2, \dots, N_r$  пространственную плотность (среднее число в единице объема) этих ядер. Пусть  $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_r^*$  обозначают микроскопическое эффективное сечение рассеяния, а  $\sigma_1^{**}, \sigma_2^{**}, \dots, \sigma_r^{**}$  микроскопическое эффективное сечение поглощения нейтрона, относящиеся к отдельным атомным ядрам. Пусть, далее  $\sigma_i = \sigma_i^* + \sigma_i^{**}$ ,  $\gamma_i = N_i \sigma_i$ ,  $\gamma_i^* = N_i \sigma_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ),  $C = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r$ ,  $C^* = \gamma_1^* + \gamma_2^* + \dots + \gamma_r^*$ , где эти величины, вообще говоря, зависят от летаргии нейтрона, то есть  $\gamma_i = \gamma_i(x)$ ,  $\gamma_i^* = \gamma_i^*(x)$ ,  $C = C(x)$  и  $C^* = C^*(x)$ , где  $x$  летаргия сталкивающегося нейтрона. В случае этой модели можно считать, что вероятность того, что нейтрон, летаргия которого  $x$ , столкнется в промежуток времени  $\Delta t$  с атомным ядром  $i$ -того типа, равна  $a \gamma_i(x) e^{-x/2} \Delta t + o(\Delta t)$  а вероятность рассеивания равна  $a \gamma^*(x) e^{-x/2} \Delta t + o(\Delta t)$  где  $a = \sqrt{2E_0/m}$ ,  $m$  — масса нейтрона. Предположим далее, что столкновение нейтрона таково, что во время рассеивания увеличение летаргии нейтрона не зависит от значения её до столкновения. Пусть функция распределения увеличения летаргии во время рассеивания на атомном ядре  $i$ -того типа есть  $H_i(x)$ .

Пусть  $F(t, x)$  есть вероятность того, что нейтрон в промежуток времени  $(0, t)$  не поглощается (событие  $A_t$ ) и в момент  $t$  его летаргия не превосходит  $x$  (событие  $\eta_t \leq x$ ). Функция распределения  $F(t, x)$  удовлетворяет интегродифференциальному уравнению (4) и может быть в явном представлена формулой (5). В том специальном случае, когда  $\gamma_i^* = \gamma_i$ ,  $C(x) = C$  и  $C^*(x) = C^*$  (постоянны), преобразование  $F(t, x)$  по Лапласу—Стилтьесу  $\varphi(t, x)$  может быть дано формулой (14) где  $w = aC$  и  $\rho = C^*/C$ , а  $\varphi(s)$  определяется соотношениями (8) и (10). Вероятность события  $A_t$  даётся формулой (15), а условное математическое ожидание  $E_t$  формулой (17). Пусть случайная величина  $\tau_x$  обозначает тот момент, когда летаргия нейтрона как раз становится больше чем  $x$ , то есть  $\tau_x = \inf t (\eta_t > x)$ . Функцию плотности  $g(t, x)$  случайной величины  $\tau_x$  даёт (19). Точнее говоря  $g(t, x) \Delta t + o(\Delta t)$  есть вероятность того, что до момента  $\tau_x$  нейтрон не поглощается (событие  $A_{\tau_x}$ ) и  $t < \tau_x < t + \Delta t$ . Вероятность события  $\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\}$  даёт (20), а условное математическое ожидание  $\tau_x$  — (22). Пусть случайная величина  $\eta_x$  обозначает число столкновений, происшедших до момента  $\tau_x$ . Распределение  $\eta_x$  даётся формулой (27) где  $Q_n(x)$  определяется формулой (25). Упомянутая в предыдущей главе вероятность  $\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\}$  может быть выражена и формулой (28) где  $M(x)$  может быть найдено на основании (29) и (24). Условная вероятность  $\mathbf{M}\{\eta_t | A_{\tau_x}\}$  может быть выражена и формулой (34), где фигурирующие в ней величины даются соотношениями (32), (33), (28) и (29).

В упомянутом выше специальном случае все эти величины вычислены в работе в явном виде.

## ON SOME PROBABILISTIC PROBLEMS IN THE THEORY OF NUCLEAR REACTORS

L. TAKÁCS

### Summary

This paper deals with the process of slowing-down of neutrons which take place in the moderators of nuclear reactors. Let us consider a neutron having a (fixed) initial energy  $E_0$  in the moment  $t = 0$ . Let the random variables  $E_t$  and  $\eta_t = \log E_0/E_t$  denote the energy and the lethargy resp., of the neutron at the moment  $t$ . Suppose that the neutron moves in a homogeneous medium of infinite extension consisting of atomic nuclei of  $r$  different nuclei and by  $N_1, N_2, \dots, N_r$  the spatial density (the average number in unit volume) of these types of atoms. In addition denote by  $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_r^*$  resp. by  $\sigma_1^{**}, \sigma_2^{**}, \dots, \sigma_r^{**}$  the cross-sections of scattering resp. of capturing (absorption), of the neutron, with respect to the different types of nuclei. Put  $\sigma_i = \sigma_i^* + \sigma_i^{**}$ ,  $\gamma_i = N_i \sigma_i$ ,  $\gamma_i^* = N_i \sigma_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ),  $C = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r$  and  $C^* = \gamma_1^* + \gamma_2^* + \dots + \gamma_r^*$ ; these quantities generally depend on the lethargy of the neutron, i.e.  $\gamma_i = \gamma_i(x)$ ,  $\gamma_i^* = \gamma_i^*(x)$ ,  $C = C(x)$  and  $C^* = C^*(x)$ , where  $x$  denotes the lethargy of the colliding neutron. In case of the above model, it can be supposed that the probability that, during the time  $\Delta t$



a neutron of lethargy  $x$  collides with a nucleus of type  $i$ , is  $a\gamma_i(x) e^{-x/2} \Delta t + o(\Delta t)$  and that of scattering  $a\gamma_i^*(x) e^{-x/2} \Delta t + o(\Delta t)$  (where  $a = \sqrt{2E_0/m}$  and  $m$  is the mass of the neutron). In addition, suppose — as usual — that the collisions are such, that in case of scattering, the increase of the lethargy of the neutron is independent of its value before the collision. Let  $H_i(x)$  be the distribution function of the increase in lethargy gained at the scattering on a nucleus of type  $i$ .

Let  $F(t, x)$  be the probability that during the time interval  $(0, t)$  the neutron will not be absorbed (event  $A_t$ ) and in the moment  $t$  its lethargy will be at most  $x$  (event  $\eta_t \geq x$ ). In §. 3. it is proved, that the distribution function  $F(t, x)$  satisfies the integro-differential equation (4) and can be written in the explicit form (5). The following example is considered: Put  $\gamma_i^*(x) = \gamma_i$ ,  $C(x) = C$  and  $C^*(x) = C^*$  (const.) then the Laplace—Stieltjes transform  $\psi(t, s)$  of  $F(t, x)$  is given by the formula (14) where  $w = aC$  and  $\varrho = C^*/C$ ;  $\varphi(s)$  is defined by (8) and (10). The probability of the event  $A_t$  resp. the conditional expected value of  $E_t$  are given by (15) resp. (17). Let the random variable  $\tau_x$  denote the moment in which the lethargy of the neutron reaches (or jumps over) the value  $x$ , i. e.  $\tau_x = \inf t (\eta_t > x)$ . The density function  $g(t, x)$  of the random variable  $\tau_x$  is determined in §. 4., it is given by (19). More exactly,  $g(t, x) \Delta t + o(\Delta t)$  is the probability that the neutron will not be absorbed till the moment  $\tau_x$  (event  $A_{\tau_x}$ ) and  $t < \tau_x < t + \Delta t$ . The probability of the event  $A_{\tau_x}$  and the conditional expectation of  $\tau_x$  are given by (20) and (22) respectively. All these quantities are calculated for the example mentioned in 1.

Let the random variable  $\mu_x$  denote the number of collisions which occurred before the moment  $\tau_x$ . The distribution of  $\mu_x$  is given in §. 5. by (27), where  $Q_n(x)$  is defined by (25). The probability  $\mathbf{P}\{A_{\tau_x}\}$  mentioned in the preceding chapter may be expressed also by the formula (28) where  $M(x)$  can be obtained by means of (29) and (25). The conditional expectation  $\mathbf{M}\{\eta_t | A_{\tau_x}\}$  may be expressed by formula (34) too, where the occurring quantities are yielded by the formulae (32), (33) and (29) and (28).

All these quantities are calculated explicitly for the special case mentioned above.

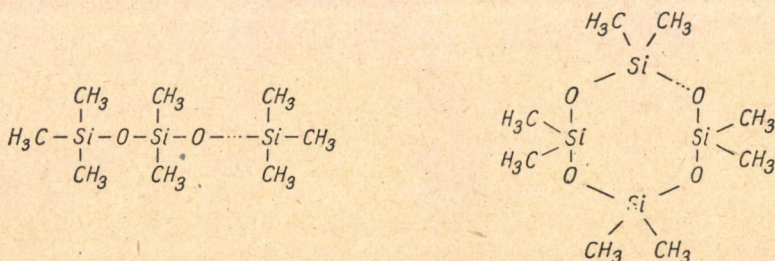


# LINEÁRIS METILSZILIKON-OLAJOK ÁTRENDZŐDÉSÉNEK MATEMATIKAI TÁRGYALÁSA, I.

PRÉKOPA ANDRÁS és TÖRÖK FERENC<sup>1)</sup>

## Bevezetés

Mono- és difunkciós egységekből álló metilszilikon olajokban a következő felépítésű molekulák találhatók:



1. ábra

Ezekon kívül az olajokban trifunkciós, ritkábban tetrafunkciós csoportok is lehetnek, melyek elágazásokat okoznak. Az irodalomban szokásos a következő jelölés:

A monofunkciós csoport jele:	$M = (CH_3)_3 SiO_{1/2}$
A difunkciós csoport jele:	$D = (CH_3)_2 SiO$
A trifunkciós csoport jele:	$T = CH_3 SiO_{3/2}$

E jelölés alapján a fenti mono- és difunkciós csoportokból álló olajokban található molekulák képlete:  $M_2D_x$  illetve  $D_y$ .

Megfigyelték, hogy abban az esetben, ha olyan olajokat, melyek a különböző funkcionális egységeket azonos arányban tartalmazzák, bizonyos katalizátorokkal rázogtatunk, akkor, ha elegendő idő elteltével a katalizátort az olajból eltávolítjuk, az olajok fizikai és kémiai tulajdonságai megegyeznek, függetlenül attól, hogy az azonos arányban tartalmazott különböző funkció-

<sup>1)</sup> Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Általános és Szervetlen Kémiai Intézete.



nalitású egységek a kiindulási elegyben egymáshoz hogyan kapcsolódtak. Az olajok tulajdonságait, illetve a különféle eljárással készült olajoknál a mólsúlyelosztást a különböző funkcionális egységek aránya határozza meg.

A dolgozat két részből áll. Egyrészt az egyensúlyi állapotot tárgyalja valószínűségszámítási úton, másrészt az  $M_2D_x$  típusú molekulák számának időbeli változását nem valószínűségszámítási úton.

Az egyensúlyi eloszlás kiszámítása és az eloszlás időbeli változásának meghatározása azért fontos feladat, mert az utóbbi évtizedben egyre nagyobb területen ipari alkalmazást nyerő szilikon-olajokat a fent ismertetett módon állítják elő. Az egyensúlyi eloszlást különböző esetekben már kiszámították és a nyert formulákat kísérletileg igazolták. Az egyensúlyi eloszlással kapcsolatban feladatunknak tekintettük, hogy szabatosan valószínűségszámítási úton megvizsgáljuk, hogy az irodalomban ismertetett formulák mennyire megbízhatók.

Az eloszlás időbeli változását eddig csak experimentálisan, viszkozitásméréssel vizsgálták. Az  $M_2D_x$ -ek, illetve  $D_y$ -ok számának időbeli változását nem számították még ki, pedig ennek is nagy gyakorlati jelentősége van. Ugyanis elképzelhető, hogy a gyakorlatban előállítandó valamely  $M_2D_x$  nem feltétlenül a végső egyensúlyban van a legnagyobb mennyiségben, hanem valamikor az egyensúly elérése előtt. Ezenkívül az eloszlás időbeli változásának ismeretében megállapíthatjuk, hogy meddig kell a műveletet folytatni ahhoz, hogy a gyakorlatban szükséges közelítéssel elérjük a végső egyensúlyt. Bizonyos körülmények között ciklikus, tehát  $D_y$  típusú molekulák nem szerepelnek. Ebben a dolgozatban csak ezzel az esettel foglalkozunk. A folyamat időbeli lefolyására vonatkozólag a (17) differenciálegyenletet állítottuk fel. Itt a megoldást és a kísérleti eredményekkel való összehasonlítást arra az esetre közöljük, amikor a mono- és difunkciós egységek aránya 2 : 1, és a  $t = 0$  időpontban csak  $M_2D_1$  típusú molekulák vannak. Az általános megoldást, valamint a ciklikus molekulák jelenlétére vonatkozó tárgyalást későbbi dolgozatainkban fogjuk közölni.

### 1. §. Az egyensúlyi állapot valószínűségszámítási tárgyalása

Ebben a §-ban csak a végállapotra vonatkozó számításokkal foglalkozunk. Ezeket a következő feltevés alapján végezzük el:

*A mono- és difunkciós egységek összes különböző elrendeződései egyformán valószínűek. A Maxwell—Boltzmann-féle statisztikát követve, két elrendeződést különbözőnek tekintünk akkor, ha legalább egy egység más pozíciót foglal el az egyikben, mint a másikban.*

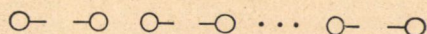
Jelölje  $\xi_k$  a  $k$  difunkciós egységet tartalmazó molekulák számát,  $N_k$  ennek várható értékét,  $D_k$  pedig a szórását. A két utóbbi mennyiség kiszámításával fogunk foglalkozni.

**A várható érték kiszámítása.** Osszuk be kettes csoportokba a  $2R$  számú monofunkciós egységet. Ez nyilván

$$B_{2R} = \frac{1}{R!} \binom{2R}{2} \binom{2R-2}{2} \dots \binom{2}{2} = (2R-1)(2R-3) \dots 1$$



módon lehetséges. Helyezzük el képzeletben ezeket a párokat valamilyen sorrendben egymás mellé a következőképpen:



2. ábra

Az így kapott cellákban kell elhelyeznünk a rendelkezésünkre álló  $N$  számú difunkciós egységet. Jelölje  $P(a_0, a_1, \dots, a_N)$  annak a valószínűségét, hogy az így keletkezett,  $D$ -egységet nem tartalmazó molekulák száma  $a_0$ , az 1  $D$ -egységet tartalmazó molekulák száma  $a_1, \dots$ , az  $N$   $D$ -egységet tartalmazó molekulák száma pedig  $a_N$ . Számítsuk ki ezt a valószínűséget. Helyezzük el egymás mellé valamilyen sorrendben a difunkciós egységeket, és képzeljük el, hogy ez a sor úgy van szakaszokra beosztva, hogy a  $k$   $D$ -egységet tartalmazó szakaszok száma  $a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ). A kérdés csak az, hogy hány ilyen szakaszokra való beosztás létezik. Ha az egyes szakaszokban levő egységektől eltekintünk, akkor egy ilyen beosztásból valamennyi többi megkapható, ha az egyes szakaszok összes lehetséges különböző permutációit vesszük. Az ilyen beosztások száma tehát

$$\frac{R!}{a_0! a_1! \dots a_N!}.$$

Figyelembe véve még, hogy ha egy difunkciós egységet fordított helyzetben helyezünk el, feltevésünk szerint új elrendeződést kapunk, a kedvező esetek száma:

$$B_{2R} N! 2^N \frac{R!}{a_0! a_1! \dots a_N!}.$$

A lehetséges esetek száma nyilván

$$B_{2R} N! 2^N \sum_{\substack{a_0 + a_1 + \dots + a_N = R \\ a_1 + 2a_2 + \dots + Na_N = N}} \frac{R!}{a_0! a_1! \dots a_N!}.$$

A keresett valószínűséget tehát a következő formula adja meg:

$$(1) \quad P(a_0, a_1, \dots, a_N) = \frac{\frac{R!}{a_0! a_1! \dots a_N!}}{\sum_{\substack{a_0 + a_1 + \dots + a_N = R \\ a_1 + 2a_2 + \dots + Na_N = N}} \frac{R!}{a_0! a_1! \dots a_N!}}.$$

Jelölje  $A_{RN}$  az (1) kifejezés nevezőjében álló összeget.  $A_{RN}$  azt a számot adja meg, ahányszor egy  $N$  egységet számláló sor  $R$  számú szakaszra beosztható, úgy, hogy az egyes szakaszok 0-tól  $N$ -ig tetszőleges sok egységet tartalmazhatnak. Ez megtehető úgy, hogy  $R-1$  függőleges egyenest az  $N$  számú egység elé, után, illetve közé az összes lehetséges módon elhelyezünk, és az első, illetve az utolsó függőlegeseken kívül, valamint a szomszédos függőlege-



sek között elhelyezkedő egységeket egy szakaszba soroljuk. Így az  $N$  egységet annyi különböző módon oszthatjuk be  $R$  számú szakaszba, amennyi különböző permutációja van az  $N$  difunkciós egységből és  $R - 1$  függőleges egyenesből álló  $R + N - 1$  elemnek. Azt kapjuk tehát, hogy

$$(2) \quad A_{RN} = \binom{R+N-1}{R-1}.$$

(1) felhasználásával az  $N_k$  várható értékre a következő kifejezést kapjuk:

$$(3) \quad N_k = \frac{1}{A_{RN}} \sum_{\substack{a_0+a_1+\dots+a_N=R \\ a_0+2a_1+\dots+Na_N=N}} a_k \frac{R!}{a_0! a_1! \dots a_N!}.$$

A (3) összegben nyilván elegendő csak azokra az  $a_0, a_1, \dots, a_N$  értékrendszerre összegezni, amelyekben  $a_k \neq 0$ . (3)-ból tehát következik, hogy

$$(4) \quad N_k = \frac{1}{A_{RN}} \sum_{\substack{a_0+\dots+a_{k-1}+\dots+a_N=R-1 \\ a_1+\dots+k(a_k-1)+\dots+Na_N=N-k}} \frac{R!}{a_0! \dots (a_k-1)! \dots a_N!}.$$

Ha az  $a_0, \dots, a_{k-1}, \dots, a_N$  nem-negatív számokat  $b_0, \dots, b_{k-1}, \dots, b_N$ -nel jelöljük, akkor, mivel  $b_1 + 2b_2 + \dots + Nb_N = N - k$ , következik, hogy  $b_{N-k+1} = b_{N-k+2} = \dots = b_N = 0$ . Ennek felhasználásával (4) a következő alakba írható:

$$(5) \quad N_k = \frac{R}{A_{RN}} \sum_{\substack{b_0+\dots+b_{N-k}=R-1 \\ b_1+\dots+(N-k)b_{N-k}=N-k}} \frac{(R-1)!}{b_0! b_1! \dots b_{N-k}!} = R \frac{A_{R-1, N-k}}{A_{R, N}}.$$

A (2) és (5) relációkból következik, hogy

$$(6) \quad \begin{aligned} N_k &= R \frac{\binom{R+N-k-2}{R-2}}{\binom{R+N-1}{R-1}} = \\ &= R(R-1) \frac{N(N-1) \dots (N-k+1)}{(R+N-1)(R+N-2) \dots (R+N-k-1)}. \end{aligned}$$

Abban az esetben, ha  $k$  kicsiny  $R$ -hez és  $N$ -hez képest, (6) alapján azt kapjuk, hogy

$$(7) \quad N_k \approx N'_k = R \frac{R}{R+N} \left( \frac{N}{R+N} \right)^k = N \left( \frac{R}{R+N} \right)^2 \left( \frac{N}{R+N} \right)^{k-1}.$$

Végül megbecsüljük az  $N_k$  és az  $N'_k$  mennyiségek közötti relatív eltérést. Az 1-nél nem nagyobb abszolút értékű  $z_1, z_2, \dots, z_r$  számokra vonatkozó

$$|1 - z_1 z_2 \dots z_r| \leq |1 - z_1| + \dots + |1 - z_r|$$



egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 h_k &= \frac{|N'_k - N_k|}{N_k} = \left| \frac{N'_k}{N_k} - 1 \right| = \\
 &= \left| \frac{R}{R-1} \frac{N}{N-1} \cdots \frac{N}{N-k+1} \frac{R+N-1}{R+N} \cdots \frac{R+N-k-1}{R+N} \right| \leq \\
 &\leq \frac{R}{R-1} \frac{N}{N-1} \cdots \frac{N}{N-k+1} \left( 1 - \frac{R+N-1}{R+N} + \cdots + 1 - \frac{R+N-k-1}{R+N} \right) + \\
 &+ \frac{R}{R-1} \frac{N}{N-1} \cdots \frac{N}{N-k+1} - 1 < \frac{R}{R-1} \left( \frac{N}{N-k} \right)^{k-1} \left( \frac{(k+2)^2}{2(R+N)} + 1 \right) - 1 \leq \\
 &\leq \left( 1 + \frac{2k^2}{N} \right) \left( 1 + \frac{2}{R} \right) \left( 1 + \frac{(k+2)^2}{2(R+N)} \right) - 1 < 6 \frac{R+N}{RN} (k+2)^2,
 \end{aligned}$$

feltéve, hogy

$$6k^2 \leq N.$$

**A szórás kiszámítása.** Az (1) formula felhasználásával a  $D_k^2$  mennyiségekre a következő kifejezést nyerjük:

$$(8) \quad D_k^2 = \frac{1}{A_{RN}} \sum_{\substack{a_0+a_1+\dots+a_N=R \\ a_1+2a_2+\dots+Na_N=N}} a_k^2 \frac{R!}{a_0! a_1! \dots a_N!} - N_k^2.$$

Ha a (8) összefüggésben az  $a_k^2$  mennyiséget  $a_k(a_k-1) + a_k$  alakban írjuk, és az összegezést ennek megfelelően két részre bontjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$(9) \quad D_k^2 = \frac{1}{A_{RN}} \sum_{\substack{a_0+a_1+\dots+a_N=R \\ a_1+2a_2+\dots+Na_N=N}} a_k(a_k-1) \frac{R!}{a_0! a_1! \dots a_N!} + N_k - N_k^2.$$

(9) első tagjában nyilván elegendő csak olyan értékrendszerekre összegezni, amelyekben  $a_k \geq 2$ . Szorítkozzunk előbb a  $2k=N$  esetre. Ugyanolyan gondolatmenettel, mint amelyet a várható érték kiszámításánál alkalmaztunk, belátható, hogy a (9) első tagjában szereplő összeg a következő kifejezéssel egyenlő:

$$R(R-1) A_{R-2, N-2k}.$$

A  $D_k^2$  mennyiségre tehát a következő kifejezést kapjuk:

$$(10) \quad D_k^2 = R(R-1) \frac{A_{R-2, N-2k}}{A_{R,N}} + R \frac{A_{R-1, N-k}}{A_{R,N}} - \left( R \frac{A_{R-1, N-k}}{A_{R,N}} \right)^2, \quad 2k \leq N.$$



Megmutatjuk, hogy ha  $k$  kicsiny  $R$ -hez és  $N$ -hez képest, akkor  $D_k^2/N_k^2 \approx 1/N_k$ . (10) kifejezéséből (5) és (6) figyelembevételével egyszerű algebrai számolással azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \frac{D_k^2}{N_k^2} &= \frac{1}{N_k} + \frac{R+N-1}{R+N-k-2} \frac{R+N-2}{N} \cdots \\
 &\cdots \frac{R+N-k-1}{N-k+1} \frac{N-k}{R+N-k-3} \cdots \frac{N-2k+1}{R+N-2k-2} - 1 = \\
 &= \frac{1}{N_k} + \frac{R+N-1}{R+N-k-2} \frac{N-k}{N} \cdots \frac{N-2k+1}{N-k+1} \frac{R+N-2}{R+N-k-3} \cdots \\
 (11) \quad &\cdots \frac{R+N-k-1}{R+N-2k-2} - 1 \leq \frac{1}{N_k} + \frac{R+N-1}{R+N-k-2} \frac{R+N-2}{R+N-k-3} \cdots \\
 &\cdots \frac{R+N-k-1}{R+N-2k-2} - 1 \leq \frac{1}{N_k} + \left( \frac{R+N-k-1}{R+N-2k-2} \right)^{k+1} - 1 = \frac{1}{N_k} + \\
 &+ \frac{1}{\left( 1 - \frac{k+1}{R+N-k-1} \right)^{k+1}} - 1 \leq \frac{1}{N_k} + \frac{1}{1 - \frac{(k+1)^2}{R+N-k-1}} - 1 \leq \\
 &\leq \frac{1}{N_k} + 2 \frac{(k+1)^2}{R+N-k-1},
 \end{aligned}$$

hacsak

$$\frac{(k+1)^2}{R+N-(k+1)} \leq \frac{1}{2}.$$

A (11) egyenlőtlenség segítségével megbecsülhetjük a  $k$   $D$ -egységet számláló molekulák számának,  $\xi_k$ -nak az ingadozását. Figyelembe véve, hogy definíció szerint  $N_k = \mathbf{M}(\xi_k)$ ,  $D_k^2 = \mathbf{D}^2(\xi_k)^2$ , a Csebisev-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$(12) \quad \mathbf{P}\{|\xi_k - N_k| \geq \lambda N_k\} \leq \frac{D_k^2}{\lambda^2 N_k^2} \leq \frac{1}{\lambda^2 N_k} + \frac{2}{\lambda^2} \frac{(k+1)^2}{R+N-(k+1)},$$

ahol  $\lambda$  pozitív szám. A gyakorlatban kicsiny  $k$  esetén  $N_k$  igen nagy, tehát (12) szerint a várható értéknek már egy kicsiny törtrésznél nagyobb ingadozások is igen valószínűtlenek. Csak egy konkrét példát ragadunk ki. Ha

<sup>2)</sup> Egy  $\xi$  valószínűségi változó várható értékét  $\mathbf{M}(\xi)$ -vel, szórásnégyzetét  $\mathbf{D}^2(\xi_k)$ -vel jelöljük.



$R = N$ ,  $R \geq 10^{20}$  akkor (12) és (7), továbbá a  $6k^2 \leq N$  esetében érvényes

$$\left| \frac{1}{N_k} - \frac{1}{N'_k} \right| = \frac{|N_k - N'_k|}{N_k N'_k} \leq \frac{12}{N N'_k} (k+2)^2 \leq \frac{12}{N'_k}$$

egyenlőtlenség alapján azt kapjuk, hogy

$$P(|\xi_k - N_k| \geq \lambda N_k) \leq 13 \frac{2^{k+6}}{\lambda^2 10^{20}} + 2 \frac{(k+1)^2}{\lambda^2 10^{20}} < \frac{2^{k+6}}{\lambda^2 10^{20}},$$

ahonnan leolvasható, hogy aránylag elég nagy  $k$  esetén is kis ingadozások várhatók.

Ha  $2k > N$ , akkor  $D_k^2$  kiszámítása igen egyszerű. Ekkor ugyanis a (9) összefüggésben az első tag 0, hiszen most  $a_k$  csak a 0 vagy az 1 értéket veheti fel. Következésképpen

$$(13) \quad D_k^2 = N_k - N_k^2, \quad 2k > N.$$

**1. megjegyzés.** Az (1) formulát azon feltevésből vezettük le, hogy ha az egyes (akár mono-, akár difunkciós) egységeket megkülönböztethetőknek tételezzük fel, akkor az egységek minden speciális elrendeződésének ugyanannyi a valószínűsége. Másszóval, a  $P(a_0, a_1, \dots, a_N)$  valószínűséget a Maxwell—Boltzmann statisztika alapján számítottuk ki. Könnyen belátható, hogy ha számításunk során a monofunkciós egységeket megkülönböztethetőknek vesszük fel, de a difunkciósokat nem, vagyis feltesszük, hogy az utóbbiak Bose—Einstein statisztikát követnek, akkor ugyancsak az (1) formulához jutunk. Ennek az az oka, hogy a Maxwell—Boltzmann és a Bose—Einstein statisztika szerint számított kedvező és lehetséges esetek számai egyaránt az  $N! 2^N$  faktorban különböznek egymástól, ami a hányados képzésénél kiesik és így a két valószínűség megegyezik. Ezt a tényt a következő §-ban felhasználjuk.

**2. megjegyzés.** A (7) formula igazolja azt, amit a Bevezetésben mondtunk, hogy az egyensúlyi eloszlást az  $R$  és  $N$  mennyiségek aránya egyértelműen meghatározza. Valóban (7) szerint az  $N_k/R$  úgynevezett móltört csak az  $N/R$  hányadostól függ.

## 2. §. Az átrendeződés időbeli lefolyásának vizsgálata

Mivel kémiaiilag kimutatható, hogy az átrendeződés folyamán a molekulák száma nem változik, egyszerűség kedvéért a folyamatot a következő modell segítségével tárgyaljuk: ha a molekulák a kénsav hatására felszakadnak, az így keletkezett töredékek azonnal egyesülnek más felszakadt molekulák töredékeivel és új molekulákat alkotnak.

Jelöljük  $N_k(t)$ -vel a  $k$  difunkciós egységet tartalmazó molekulák számát a  $t$  időpontban. A matematikai tárgyalásban az átrendeződés folyamatára vonatkozólag a következő feltételt vezetjük be:



Ha két molekula a katalizátor segítségével bizonyos számú difunkciós egységet átad egymásnak, akkor a difunkciós egységeket nem különböztetve meg, minden új elrendeződés egyenlő mértékben esélyes.<sup>3)</sup>

Ha tehát az egyik molekula  $l$ , a másik  $m$  difunkciós egységet számlált, akkor  $l + m + 1$  egyenlő mértékben esélyes átrendeződés lehetséges. Ezek közül  $k$  számú  $D$  egységet tartalmazó molekulák megvalósulásához 2, illetve 1 eset vezet, aszerint, hogy  $l + m \geq k$ ,  $l + m \neq 2k$ , illetve  $l + m = 2k$ . Az utóbbi esetben azonban egyszerre két  $k$  számú  $D$  egységet tartalmazó molekula keletkezik.

Mi az  $N_k(t)/R$  úgynevezett móltörtökre vonatkozólag vezetünk le egy differenciálegyenletrendszer. A  $k$  számú  $D$ -egységet tartalmazó molekulák móltörtjének  $dt$  idő alatti megnövekedését a következő kifejezés adja meg:

$$(14) \quad \left( \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{r=0}^n \alpha \frac{N_{n-r}(t)}{R} \frac{N_r(t)}{R} - 2\alpha \frac{N_k(t)}{R} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{N_n(t)}{R} - \alpha \frac{N_k^2(t)}{R^2} \right) dt.$$

A (14) kifejezésben a második és harmadik tagra azért van szükség, mert az első összegben a  $k$  számú  $D$  egységet tartalmazó molekulákból keletkezett ugyanilyen típusú molekulákat is figyelembe vettük, ami ezek számát nyilván nem változtatja meg. A harmadik tagban  $N_k^2/R^2$  azért nincs 2-vel szorozva, mert ez az első tagban is csak egyszer fordul elő. Az  $N_k(t)/R$  móltört  $dt$  idő alatti csökkenését pedig a következő kifejezés szolgáltatja:

$$(15) \quad \left( \varrho \frac{N_k(t)}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+k+1) \frac{N_n(t)}{R} - 2\varrho \frac{N_k(t)}{R} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{N_n(t)}{R} - \varrho \frac{N_k^2(t)}{R^2} \right) dt,$$

ahol a második és harmadik tag azért lép fel, mert az első összegben a  $k$  számú  $D$ -egységből keletkezett ugyanilyen típusú molekulákat is figyelembe vettük, pedig ezzel  $N_k(t)/R$  értéke nem változott. A második tag előtt azért van 2-es szorzó, mert a  $k$  és  $n$  ( $n \neq k$ )  $D$ -egységet tartalmazó molekulák átrendeződésénél 2 eset vezet  $k$   $D$ -egységet tartalmazó molekula keletkezéséhez. A harmadik tagnál erre nyilván nincs szükség. (14) és (15) összevetéséből a következő differenciálegyenletrendszer kapjuk:

$$(16) \quad \frac{dN_k(t)}{dt} = \frac{\alpha}{R} \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{r=0}^n N_{n-r}(t) N_r(t) - \frac{\alpha}{R} N_k(t) \sum_{n=0}^{\infty} (n+k+1) N_n(t).$$

Figyelembe véve, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} n N_n(t) \equiv N, \quad \sum_{n=0}^{\infty} N_n(t) \equiv R,$$

<sup>3)</sup> Ennek a feltételnek a jogosságát alátámasztja az 1. § végén tett megjegyzés. Itt véges  $t$  időpontokra olyan feltételt vezetünk be, amelyről tudjuk, hogy  $t = \infty$  esetén teljesül.



(16) átírható a következőképpen:

$$(17) \quad \frac{dN_k(t)}{dt} = \frac{\alpha}{R} \left( R^2 - \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{r=0}^n N_{n-r}(t) N_r(t) - (N + kR + R) N_k(t) \right).$$

A (17) differenciálegyenletrendszer megoldása. Azt az esetet vizsgáljuk, amikor  $R = N$ , és a  $t = 0$  időpontban csupa  $M_2D$  alakú molekula van. Ekkor a (17) differenciálegyenletrendszert a következő határfeltételek mellett kell megoldanunk:

$$(18) \quad N_1(0) = R, \quad N_r(0) = 0, \quad \text{ha} \quad r \neq 1.$$

Vezessük be az  $N_k(t)$  függvények  $g(u, t)$  generátorfüggvényét:

$$g(u, t) = \sum_{r=0}^{\infty} u^r N_r(t), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad t \geq 0.$$

Ha (17) mindkét oldalát megszorozzuk  $u^k$ -val, összegezzük  $k$ -ra 0-tól  $\infty$ -ig, és figyelembe vesszük, hogy  $R = N$ , akkor azt kapjuk, hogy

$$(19) \quad \frac{\partial g(u, t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{R} \left( \frac{u g^2(u, t) - R^2}{u - 1} - 2Rg(u, t) - uR \frac{\partial g(u, t)}{\partial u} \right).$$

A (18) határfeltételek pedig a következőhöz vezetnek:

$$(20) \quad g(u, 0) \equiv Ru.$$

Egyszerűsítés végett vezessük be a  $v = e^{-\alpha t}$  transzformációt és a  $h = h(u, v) = \frac{1}{R} g\left(u, \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{v}\right)$  függvényt. Ekkor (19) és (20) helyett a következő egyenleteket kapjuk:

$$(19') \quad u \frac{\partial h}{\partial u} - v \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{1 - uh^2}{1 - u} - 2h,$$

$$(20') \quad h(u, 1) \equiv u.$$

A (19') egyenlet kvázilineáris (a deriváltakban lineáris), alkalmazzuk tehát ezek megoldási módszerét. A karakterisztikákra vonatkozó egyenletek a következők:

$$(21) \quad u \frac{dh}{du} = \frac{1 - uh^2}{1 - u} - 2h,$$

$$(22) \quad \frac{du}{dv} = -\frac{u}{v}.$$



A (21) egyenlet nem más, mint a (19') egyenlet a  $v = 0$ , azaz a  $t = \infty$  esetben. Ehhez egy partikuláris megoldást keresve, próbálkozzunk az 1. §-ban az egyensúlyi állapotra kiszámított  $N'_k$  mennyiségek generátorfüggvényével. (7) alapján  $N'_k = R/2^{k+1}$ , tehát

$$g(u, \infty) = \frac{R}{2-u},$$

és így

$$(23) \quad h(u, 0) = \frac{1}{2-u}.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a (23) függvény partikuláris megoldása a (21) Riccati-féle differenciálegyenletnek, (21) megoldásai tehát a

$$(24) \quad h = \frac{1}{z} + \frac{1}{2-u},$$

alakban írhatók, ahol  $z(u)$  a

$$(25) \quad z' + z \left( -\frac{2}{(1-u)(2-u)} - \frac{2}{u} \right) - \frac{1}{1-u} = 0$$

differenciálegyenletnek tesz eleget.<sup>4)</sup> Megoldva a (25) egyenletet és (24)-ből a megoldásban nyert  $C_1$  állandót kifejezve, a következő összefüggést kapjuk:

$$(26) \quad C_1 = \left( \frac{1}{h - \frac{1}{2-u}} - \frac{u(u-2)}{2(1-u)^2} \right) \frac{(1-u)^2}{u^2(u-2)^2}.$$

Másrészt (22)-ből kapjuk, hogy

$$(27) \quad C_2 = uv.$$

A megoldást a

$$(28) \quad C_1 = f(C_2)$$

egyenlet szolgáltatja, ahol  $f$  a  $h(u, 1) \equiv u$  határfeltétel alapján (26) és (27) figyelembevételével kiszámítandó függvény. Figyelembe véve a (20') határfeltételt, (28)-ba a  $v = 1$  értéket helyettesítve, (27) és (26) alapján azt kapjuk, hogy

$$(29) \quad f(u) = -\frac{1}{2u^2}.$$

Ha tehát (28)-ból a  $h(u, v)$  függvényt (26), (27) és (29) segítségével kifejezzük, akkor azt kapjuk, hogy

$$(30) \quad h(u, v) = \left( \frac{1+v^2}{2} \right)^2 \frac{2u}{2-u+uv^2} + \frac{1-v^2}{2}.$$

<sup>4)</sup> E. KAMKE: *Differentialgleichungen reeller Funktionen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1952. (2. kiadás), 42. oldal.



Visszahelyettesítve  $v$  helyébe  $e^{-at}$ -t, a  $g(u, t)$  függvényre a következő kifejezést kapjuk:

$$(31) \quad g(u, t) = R q^2 \frac{u}{1 - pu} + R p,$$

ahol

$$(32) \quad p = \frac{1 - e^{-2at}}{2}, \quad q = 1 - p.$$

(31) alapján a  $g(u, t)$  függvény sorbafejtése által azt kapjuk, hogy

$$N_0(t) = R p,$$

$$(33) \quad N_r(t) = R q^2 p^{r-1}, \quad r = 1, 2, \dots$$

Mivel  $t \rightarrow \infty$  esetén  $p \rightarrow 1/2$ ,  $q \rightarrow 1/2$ , a (33) formulák az 1. §. (7) formulája által az egyensúlyi állapotra megadott  $N'_k$  értékekhez konvergálnak.

Ezzel az  $N_k(t)$  függvényeket meghatároztuk és az átrendeződés időbeli lefolyásának az  $R = N$  esetre vonatkozó vizsgálatát befejeztük.

### 3. §. Összehasonlítás a kísérleti eredményekkel<sup>5)</sup>

Metiszilikon-olajok esetében a különböző  $N_r$ -ek kísérleti meghatározására a frakcionált desztillálás a legalkalmasabb, amikor az elválasztás alapja az, hogy az  $N_r$ -ek forráspontjai különbözők.

Frakcionált desztillálással különítettük el kísérleteink kiindulási alapanyagát, az  $M_2D$ -t.

Vizsgálataink során a gondosan tisztított  $M_2D$  ismert mennyiségéhez kb. 4% tömény kénsavat adtunk, majd a kénsavval rázogatni kezdtük. A kénsavval való összeöntéstől számított  $t$  idő elteltével a kénsavat az olajból eltávolítottuk és frakcionált desztillálással meghatároztuk az  $N_r(t)$  mennyiségeket.

A (33) egyenlet szerint egy kísérletben kapott különböző polimerek mennyisége egyetlen  $p$  érték segítségével kiszámítható. A táblázatban fel vannak tüntetve a kísérleti adatok mellett a számított mennyiségek és az illető kísérlethez tartozó  $p$  érték.

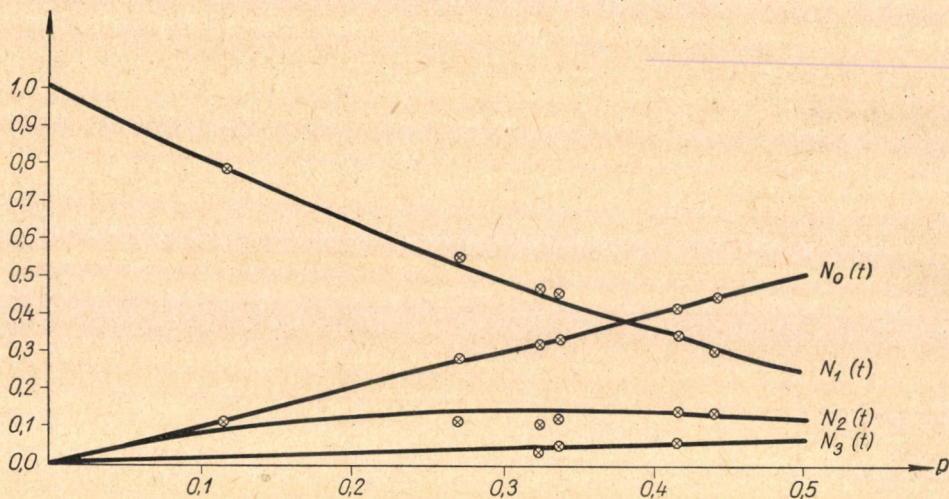
	$p = 0,114$		$p = 0,271$		$p = 0,325$		$p = 0,337$		$p = 0,415$		$p = 0,442$	
	mért	számított	mért	számított	mért	számított	mért	számított	mért	számított	mért	számított
$N_0(t)$	0,12	0,11	0,28	0,27	0,32	0,32	0,34	0,34	0,41	0,41	0,44	0,44
$N_1(t)$	0,79	0,78	0,55	0,53	0,47	0,45	0,46	0,44	0,35	0,35	0,31	0,31
$N_2(t)$	—	—	0,11	0,14	0,10	0,15	0,12	0,15	0,13	0,14	0,14	0,14
$N_3(t)$	—	—	—	—	0,03	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	—	—

<sup>5)</sup> A kísérleti vizsgálatok az Eötvös Loránd Tudományegyetem Általános és Szeretlen Kémiai Intézetében folytak le.



A kísérleti és számított értékeket a 3. ábrán is feltüntetjük. Itt a víz-szintes tengelyre  $p$ -t, a függőlegesre  $N_r(t)$ -t mértünk fel. A kihúzott vonalak a számított értékeknek felelnek meg, a feltüntetett pontok pedig a megfelelő  $p$ -hez tartozó kísérleti értékeket jelzik.

Megjegyezzük, hogy a táblázatban és a grafikonon  $N_r(t)$ -t mól-egységekben tüntettük fel. Ha a mólok mennyiségét megszorozzuk az Avogadro-féle számmal, a molekulák számát kapjuk meg.



3. ábra

A kísérleti adatok és számított értékek egyezése igazolja azt, hogy az egyenlet levezetésének alapjául szolgáló feltevéseink helyesek voltak és hogy az egyensúlyozás közben lejátszódó bonyolult folyamatokat az egyszerű (33) formulák a tapasztalattal jó megegyezésben írják le.

#### IRODALOM

- [1] P. FLORY, *J. Chem. Phys.* **12** (1944) p. 425.
- [2] P. FLORY, *J. Am. Chem. Soc.* **58** (1936) p. 1877.
- [3] P. FLORY, *J. Am. Chem. Soc.* **64** (1942) p. 2205.
- [4] D. T. HUND, *J. Am. Chem. Soc.* **77** (1955) p. 2988.
- [5] KANTOR—GRUBB—OSTHOFF, *J. Am. Chem. Soc.* **76** (1954) p. 5190.
- [6] MALDE, *Chimica e industria* **33** (1945) 343—347.
- [7] W. PATURDE—D. F. WILCOCK, *J. Am. Chem. Soc.* **68** (1946) p. 358.
- [8] W. PATURDE, *J. Am. Chem. Soc.* **67** (1945) p. 2277.
- [9] ROEDEL, *Anal. Chem.* **20** (1948) 705—707.
- [10] W. H. STOCKMAYER, *J. Chem. Phys.* **11** (1943) p. 45.
- [11] D. F. WILCOCK, *J. Am. Chem. Soc.* **69** (1947) p. 477.

(Beérkezett: 1956. II. 9.)



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕГРУППИРОВКИ  
ЛИНЕЙНЫХ МЕТИЛСИЛИКОНОВЫХ МАСЕЛ, I.\*)

А. ПРЕКОПА и Ф. ТЭРЭК

## Резюме

Рисунок 1 показывает молекулы какой конструкции встречаются в метилсиликоновых маслах, состоящих из моно- и дифункционных единиц. Монофункциональные единицы будем обозначать через  $M$ , дифункционные — через  $D$ . В работе рассматривается тот случай, когда встречаются лишь линейные молекулы. Они могут быть описаны формулой  $M_2 D_k$ , где  $k$  обозначает число дифункционных единиц в молекуле. Если масло встряхивать в присутствии катализатора, то связи молекул нарушаются, осколки соединяются в новые молекулы, пока наконец, не установится состояние равновесия.

Работа состоит из двух частей. В первой части дается теоретико-вероятностное исследование состояния равновесия, во второй части изучается временной процесс не теоретико-вероятностным методом. Число всех дифункционных частиц обозначается через  $N$ , монофункциональных — через  $R$ .

Изучая состояние равновесия, обозначим через  $\xi_k$  число молекул типа  $M_2 D_k$ , через  $N_k$  математическое ожидание, через  $D_k$  дисперсию от  $\xi_k$ . Для этих величин получаем следующие соотношения:

$$N_k = R \frac{A_{R-1, N-k}}{A_{R, N}},$$

$$D_k^2 = R(R-1) \frac{A_{R-2, N-2k}}{A_{R, N}} + N_k - N_k^2, \quad \text{если } 2k \leq N,$$

$$D_k^2 = N_k - N_k^2, \quad \text{если } 2k > N,$$

где

$$A_{R, N} = \binom{R+N-1}{R-1}.$$

В том случае, когда  $k$  значительно меньше чем  $R$  и  $N$  получаются следующие приближенные формулы:

$$(1) \quad N_k \approx R \left( \frac{R}{R+N} \right)^2 \left( \frac{N}{R+N} \right)^{k-1},$$

$$\frac{D_k^2}{N_k^2} \approx \frac{1}{N_k}.$$

Изучая временной процесс, обозначим через  $N_k(t)$  число молекул типа  $M_2 D_k$  в момент  $t$ . Для этих функций имеет место следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dN_k(t)}{dt} = \frac{\alpha}{M} \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{r=0}^n N_{n-r}(t) N_r(t) - \frac{\alpha}{M} N_k(t) \sum_{n=0}^{\infty} (n+k+1) N_n(t).$$

Решение этой системы уравнений было найдено при следующих предположениях:

$$N_1(0) = R, \quad N_k(0) = 0, \quad \text{если } k \neq 1.$$

Решение дается функциями

$$(2) \quad N_0(t) = Rq,$$

$$N_r(t) = Rp^2 q^{r-1}, \quad r = 1, 2, \dots$$

\*) Работа будет опубликована на немецком языке в *Zeitschrift für Physikalische Chemie*.



где

$$p = \frac{1 + e^{-2\alpha t}}{2}, \quad q = 1 - p.$$

Легко убедиться в том, что при  $t = \infty$  формулы (1) и (2) совпадают. Как это видно на рисунке 3, значения функций хорошо совпадают с экспериментально полученными данными.

## MATHEMATICAL TREATMENT OF THE REARRANGEMENT OF LINEAR METHYLSILICONE OILS, I. <sup>\*</sup>)

A. PRÉKOPA and F. TÖRÖK

### Summary

Fig. 1. shows that generally what type of molecules constitute the methylsilicone oils. Let  $M$  and  $D$  denote the mono- and bifunctional units respectively. In the present paper the special case is considered, when only linear molecules are present. A linear molecule can be denoted by  $M_2D_k$ , where  $k$  is the number of the bifunctional units contained in it. Shaking the oil with a catalyst we obtain a random process in which the splitting of the bonds and the formation of new molecules follow each other. If  $t \rightarrow \infty$ , the system tends to an equilibrium state. The paper is composed of two parts. In the first one a probabilistic treatment is given for the equilibrium state while in the second one the time dependence is considered. The total number of the bifunctional and mono-functional units is denoted by  $N$  and  $2R$  respectively.

In the case of the equilibrium state the random variable  $\xi_k$  denotes the number of molecules containing  $k$  bifunctional units,  $N_k$  is the expectation and  $D_k$  the dispersion of  $\xi_k$ . The following results are obtained

$$N_k = R \frac{A_{R-1, N-k}}{A_{R, N}},$$

$$D_k^2 = R(R-1) \frac{A_{R-1, N-2k}}{A_{R, N}} + N_k - N_k^2, \quad \text{if } 2k \leq N,$$

$$D_k^2 = N_k - N_k^2, \quad \text{if } 2k > N,$$

where

$$A_{R, N} = \binom{R+N-1}{R-1}.$$

If  $k$  is small to compared with  $R$  and  $N$ , we obtain the following formulae

$$(1) \quad N_k \approx R \left( \frac{R}{R+N} \right)^2 \left( \frac{N}{R+N} \right)^{k-1},$$

$$\frac{D_k^2}{N_k^2} \approx \frac{1}{N_k}.$$

To consider the time dependence, let  $N_k(t)$  denote the number of the  $M_2D_k$  molecules at the time  $t$ . We have the following system of differential equations:

$$\frac{dN_k(t)}{dt} = \frac{\alpha}{M} \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{r=0}^n N_{n-r}(t) N_r(t) - \frac{\alpha}{M} N_k(t) \sum_{n=0}^{\infty} (n+k+1) N_n(t).$$

<sup>\*</sup>) See the complete text in German: *Zeitschrift für Physikalische Chemie* (in press)



The solution satisfying the initial conditions

$$N_1(0) = R, \quad N_k(0) = 0, \quad \text{if } k \neq 1$$

is given by the functions

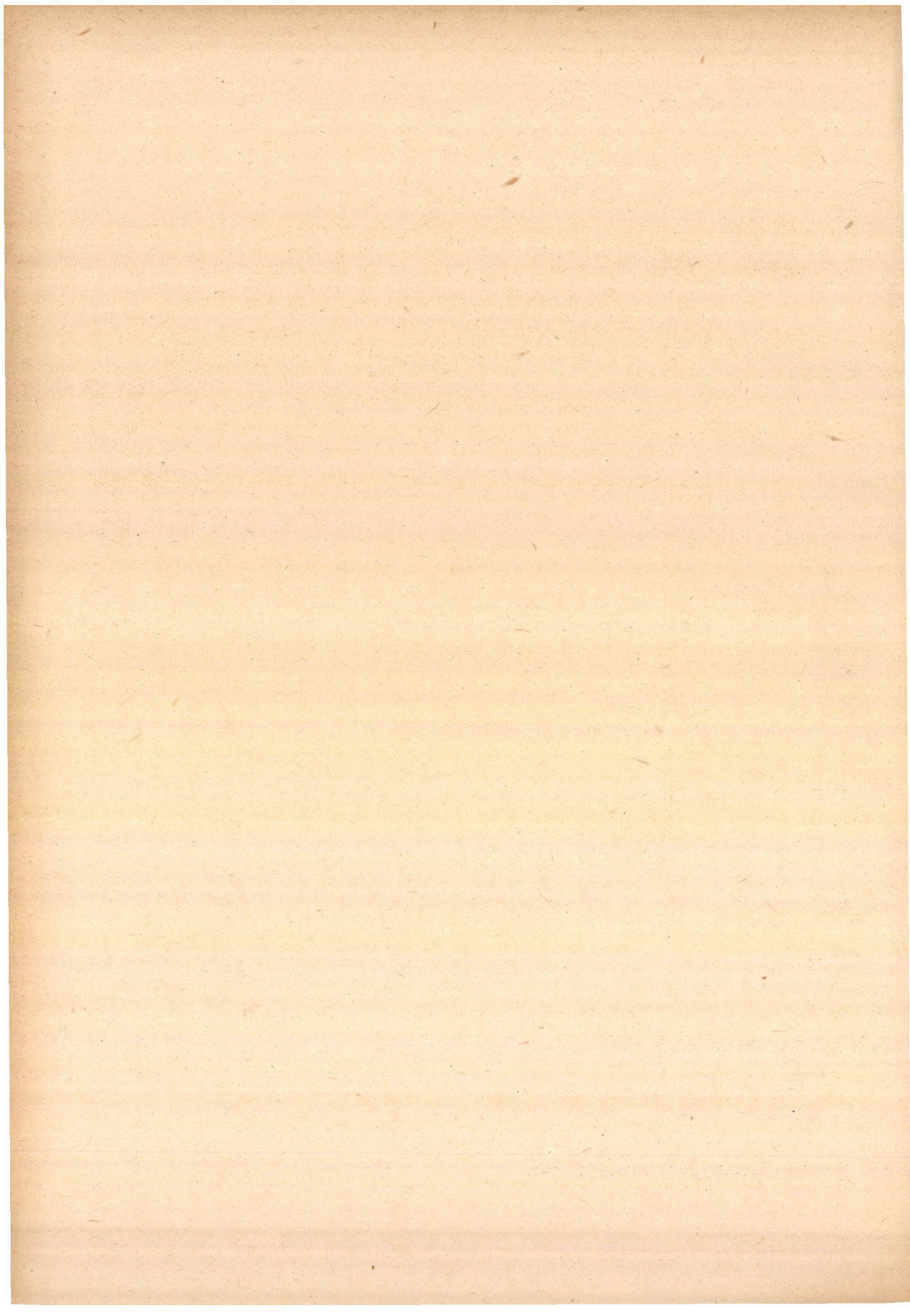
$$(2) \quad \begin{aligned} N_0(t) &= Rp, \\ N_r(t) &= Rq^2 p^{r-1}, \quad r = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

where

$$q = \frac{1 + e^{-2at}}{2}, \quad p = 1 - q,$$

It is easy to see, that for  $t = \infty$  formulae (1) and (2) coincide. As Fig. 3. shows, the values of these functions (2) give good approximations of the experimental results.







# AZ INGERÜLETÁTVITEL VALÓSZÍNŰSÉGE EGY EGYSZERŰ KONVERGENS KAPCSOLÁSÚ INTERNEURONÁLIS SYNAPSIS-MODELLBEN

(Előzetes közlemény)

RÉNYI ALFRÉD és SZENTÁGOTHA JÁNOS<sup>1)</sup>

## Bevezetés

A jelen dolgozat az idegrendszer működésével kapcsolatos egyes problémákat próbál valószínűségszámítási módszerekkel tárgyalni. Mindenekelőtt ismertetjük a problémák ideganatómiai vonatkozásait.

Az idegelemek jelzéseket továbbítanak. A terjedő idegingerület „minden vagy semmi”-jellege folytán az egyes idegelemre vonatkoztatva egy adott pillanatban csak kétféle jelzés lehetséges: az idegelem vagy ingerületi állapotban lehet, vagy nem. Az ilyen elemi jelzés információs értékét az határozza meg, vajon a láncszerűen egymás után kapcsolt idegelemek közötti *interneuronális synapsisokon* az ingerület átvezetődik-e vagy nem. Ismerünk olyan idegelem közötti kapcsoló berendezéseket, melyeknél az egyik ingerületi állapota gyakorlatilag biztosan átterjed a vele összefüggésben levő másik idegelemre, tehát 100%-os valószínűséggel. Ezeket a synapsisokat az érintkezési felszín speciális alakulása mellett anatómiailag az jellemzi, hogy egy idegelem láncszerűen kapcsolódik a másikhoz, a kapcsolás tehát lineáris (1. ábra). Ez az eset azonban aránylag ritka. Sokkal gyakoribb és az idegrendszer elemi működésének egy fontos alapelvét mutatja a neuronok *konvergens* kapcsolódása. Ez esetben a 2. ábrán látható módon több neuron idegnyúlványa *konvergál* egy következő neuron felé és így ehhez több odavezető neuron kapcsolódik.



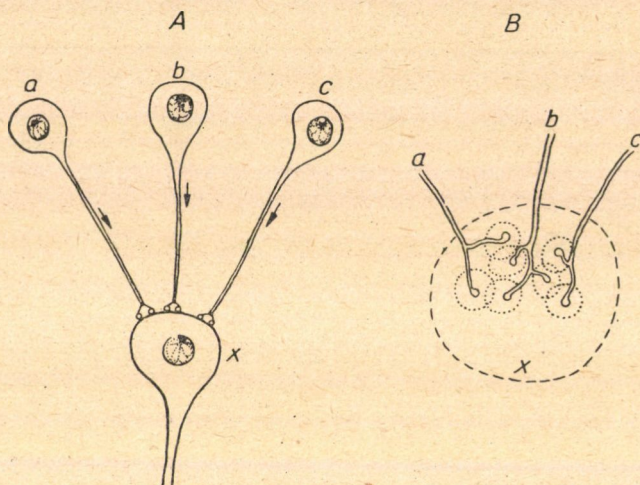
1. ábra

Élettani észleletek alapján ma az a felfogás, hogy ilyen konvergens neuronkapcsolás mellett egyetlen odavezető elem ingerületi hulláma, például sémánkban az „a” neuroné egymaga nem képes terjedő ingerületi hullámot

<sup>1)</sup> A Pécsi Orvostudományi Egyetem Anatómiai Intézetének igazgatója.



keltetni a synapsisutáni „ $x$ ” neuronban. A jelzés tehát elakad. Annak, hogy „ $x$ ”-neuron ingerületbe kerüljön (egyéb feltételek között, melyekről itt nem szólnunk) különleges tér- és időbeli feltételei vannak. Egyrészt az, hogy felületének legalább bizonyos kritikus méretű összefüggő része legyen érintkezésben ingerületben levő odavezető idegelemekkel. Másrészt, ez közel egyidőben vagy legfeljebb 0,2 msec időhatáron belül történjen. Ennek ma általánosan elfogadott magyarázata az, hogy az odavezető neuron idegnyúlványának ingerületi állapota a synapsis utáni neuron (esetünkben „ $x$ ”) felületén a kettő érintkezési pontjai körül csupán kis területre kiterjedő és igen rövid ideig tartó helyi ingerületi állapotot kelt. Terjedő jellegű idegingerület az „ $x$ ” neuronban akkor keletkezik, ha elégséges számú és felületű lokális ingerületi állapot területei egybefolynak [1].



2. ábra

Ebből a 2. ábrán bemutatott egyszerű példa esetében az következik, hogy még „ $a$ ” és „ $c$ ” odavezető neuron egyidejű ingerülete sem képes ingerületre bírni „ $x$ ” neuront, mert, bár az időbeli feltételek megvolnának, de a térbeli feltételek nincsenek meg. A két odavezető neuron által keltett lokális ingerületi állapot felszíni összege ugyan elégséges volna, de az egymás közötti távolság túl nagy. Ezt a 2. ábra B része illusztrálja, mely felülnézetben mutatja „ $x$ ” neuron felületének egy részét. Az odavezető neuronok érintkezési felszínei körül rajzolt pontozott körök jelzik a lokális ingerületi állapot kiterjedését, melyek „ $a$ ” és „ $c$ ” részéről nem, de „ $a-b$ ” vagy „ $b-c$ ” synapsis-előtti neuronok egyidejű ingerülete esetében összeolvadnak és így a térbeli feltételt kielégítik. Ez a folyamat az idegműködésben alapvető „*spatialis summatio*”, mely a legtöbb esetben eldönti azt, hogy egy adott jelzés a következő kapcsoláson továbbhalad vagy nem. Minthogy a legtöbb neuron nem egy érintkezéssel bír, hanem több ága révén több más neuronnal való kapcsolódásban résztvesz (*divergencia*) és a terjedő jellegű idegingerület egy neuron minden ágában egyformán szétterjed, az idegingerület útját az dönti el, hogy mely synapsisokban vannak meg a feltételek az ingerület átvezetésére.



A valóságban a helyzet rendszerint nem oly egyszerű, mint sematikus ábráinkon feltüntettük. Erre jellemző adat, hogy a legjobban ismert működésű gerincvelői mozgató neuronok mindegyikének felületén többszáz odavezető neuron ér véget egy-egy gömbalakú érintkezéssel. Az ingerület átvezetésének vizsgálatát nagymértékben le lehet egyszerűsíteni azzal, hogy az átvezetés időbeli feltételét biztosítjuk. Ez aránylag egyszerűen elérhető azáltal, hogy az odavezető neuronokat egyidőben ingereljük elektromosan, vagy ha ezek vezetési sebessége nem egyforma, a vizsgált neuronrendszerre konvergáló különböző odavezető rendszereket külön-külön oly időpontokban ingereljük, hogy az ingerületek egyidőben érkezzenek be a vizsgált synapsishoz. Ezután meg lehet vizsgálni a térbeli összegeződés („spatialis summatio”) feltételeit annak felhasználásával, hogy még azonos pályarendszer különböző idegelemei is különböző ingerküszöbökkel bírnak. Az elektromos inger erősségének igen fokozatos emelésével előbb az odavezető rendszer egyetlen vagy néhány leg-alacsonyabb ingerküszöbű tagját hozzuk ingerületbe, majd fokozatosan emelve erősségét, mind több és végül egy bizonyos erősségnél valamennyi odavezető elemet egyidejűleg ingerületbe hozzuk. Ugyanekkor a synapsis utáni „x” neuronok elvezető idegnyúlványai által alkotott köteg akciós áramának elvezetésével és regisztrálásával a keletkező feszültségből követni lehet az ingerületbe jutott synapsis utáni (elvezető — esetünkben „x”) neuronok számának emelkedését. Így tapasztalati függvényt nyerünk, mely az odavezető egyidőben ingerületben levő neuronok mennyisége és azon elvezető neuronok mennyisége közötti összefüggést adja meg, melyekre az ingerület átvezetést nyert. Különböző synapsisrendszerek közötti ilyen tapasztalati függvények alakja más és más lehet [2]. Feltételezzük, hogy ezt a szereplő odavezető (synapsis előtti) és elvezető (synapsis utáni) neuronok számaránya, a synapsis előtti neuronok elágazódási foka, tehát a konvergencia mértéke és az dönti el, hogy a különböző synapsis előtti neuronok végződéseinek alakja (mérete, stb.), valamint főleg elrendeződése a synapsis utáni neuron sejttestén milyen. Ezen adatok nagy részét szövettani vizsgálattal meg lehet állapítani.

Az egyetlen lényeges adat, melyet eddig még megközelítőleg sem sikerült megállapítani, az, hogy a synapsis utáni sejt felületének mely hányadán, vagy abszolút értelemben mekkora és milyen alakú felületrészen az érintkezések milyen hányadának kell egyidőben ingerületben lenni ahhoz, hogy az ingerület átvitelének „spatialis” feltételei biztosítottak legyenek. Ezért az idegingerület synaptikus átviteléről alkotott fentebb kifejtett elképzeléseink mindmáig hypothetikusak maradtak.

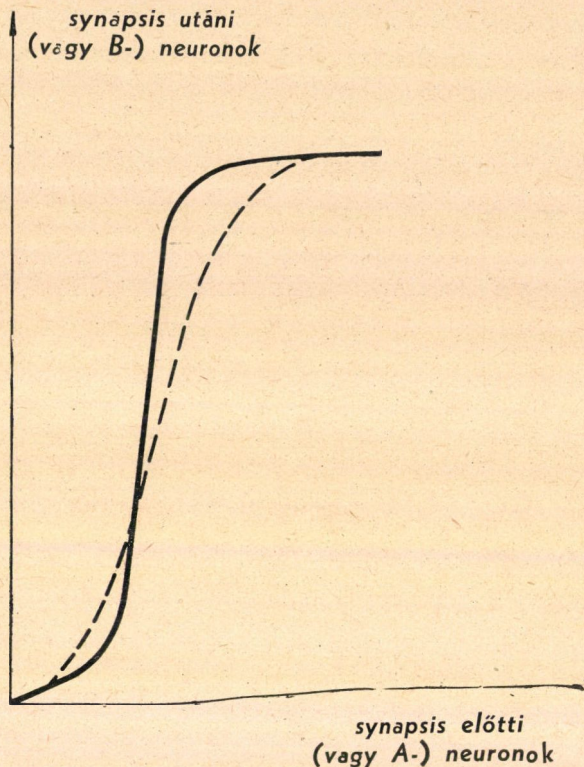
Úgy véljük, hogy a valószínűségszámítás ez esetben egy lépéssel közelebb vihet bennünket a kérdés megoldásához. Ha valamely konkrét synapsisrendszer anatómiai adataiból (konvergencia foka, végzések száma, elrendeződése stb.) valószínűségi modellt szerkesztünk, és egyelőre (élettani támpontok alapján) önkényesen felvesszük azokat a „spatialis” feltételeket, melyekkel kísérletet kívánunk tenni, egy valószínűségi függvényt nyerünk, *mely megadja, hogy az adott anatómiai szerkezetű synapsisrendszer az általunk önkényesen felvett „spatialis” feltételek mellett a synapsis előtti neuronok ingerületének átvezetését miként biztosítja*. Igaz, hogy a felvehető „spatialis” feltételek különböző formáinak száma elméletileg végtelen, mégis, a gyakorlatban aránylag kevés alapesetet kell csupán figyelembe vennünk. Amennyiben valamely ily módon nyert valószínűségi függvény közeli hasonlóságot mutatna a modellünk alapját képező rendszer fent elmondott módon élettani észleletek



alapján nyert tapasztalati függvényével, ez arra utal, hogy az egyelőre önkényesen felvett „spatialis” feltételek lényegében megegyeznek a tényleges feltételekkel. Ily módon ellenőrizhetjük a synaptikus ingerületi átvezetésről alkotott mai elképzeléseink helyességét.

### 1. §. A gerincevelő motorikus neuronjai

Első megközelítésben egy aránylag egyszerű konvergens típusú synapsis-rendszer modelljét vesszük fel, mely elvben hasonlít a gerincevelői mozgató neuronok synapsisrendszeréhez. Természetesen nem az egész gerincevelő



3. ábra

valamennyi mozgató neuronját vehetjük tekintetbe, hanem csupán egy körülírt magvát. Legyen a mozgató neuronokhoz vezető synapsiselőtti  $A$ -neuronok száma  $N$  ( $\approx 50\,000$ ), a synapsisutáni (gerincevelői mozgató)  $B$ -neuronok száma  $n$  ( $\approx 1000$ ).

Minden  $A$  neuronból  $l$  számú kollaterális ágazik le, és mindegyik más-más  $B$  neuronhoz vezet; a  $B$  neuronokat első közelítésként hengeralakúnak tekintjük, amely henger palástjához a végágak egy gömbalakú „talpacskával” csatlakoznak ( $l$  értéke kb. 10). Egy  $B$ -neuronra tehát átlagban  $Nl/n$  „talp” jut ( $\approx 500$ ). A kérdés mármost az, hogy ha az  $A$  neuronok  $q$  hányada, tehát  $M = qN$  számú  $A$  neuron közvetít ingert, a  $B$  neuronok



hányadrésze jön ingerületbe és továbbítja az ingert (ezt a hányadot a következőkben  $f(q)$ -val jelöljük és az  $f(q)$ -t mint  $q$  függvényét ábrázoló görbét átvitel-görbének nevezzük), ha ahhoz, hogy egy  $B$  neuron ingerületbe jöjjön, az szükséges, hogy a palástjának legalább  $\beta$ -adrésze ( $\beta \approx 0,1$ ) befutó talpak legalább  $\gamma$ -adrésze ( $\gamma \approx 0,3$ ) ingert közvetítsen.

A probléma matematikai tárgyalásának leegyszerűsítése érdekében a következő, megengedhetőnek tűnő feltevéseket tesszük:

1. Feltesszük, hogy az  $A$  neuronoknak a  $B$  neuronokkal való összekötése úgy történik, hogy minden  $A$  neuronhoz egymástól függetlenül taláalomra kiválasztunk  $l$  számú  $B$  neuront, és azzal kötjük össze. Ily módon annak a valószínűsége, hogy egy  $B$  neuron palástjához  $k$  számú talpacska csatlakozik,

$$(1) \quad P_k = \binom{N}{k} \left(\frac{l}{n}\right)^k \left(1 - \frac{l}{n}\right)^{N-k}.$$

Mivel  $\frac{l}{n}$  kicsiny, a Poisson-közelítést alkalmazhatjuk:

$$(1') \quad P_k \sim \frac{(Nl/n)^k e^{-Nl/n}}{k!}.$$

Mivel  $Nl/n$  nagy szám, a normális eloszlással való közelítés alkalmazható és így

$$(1'') \quad P_k \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi Nl/n}} e^{-\frac{(k - Nl/n)^2}{2Nl/n}}.$$

Ennélfogva az egy  $B$  neuronon végződő talpacsok száma a neuronok túlnyomó többségénél (1000 közül kb. 997 esetben)  $Nl/n - 3\sqrt{Nl/n}$  és  $Nl/n + 3\sqrt{Nl/n}$  közé esik. Feltethetjük tehát, hogy egy neuron palástján  $T = Nl/n + 3\sqrt{Nl/n}$  talpacska számára van hely, ezen helyeknek azonban egy törtrésze nincs feltétlenül betöltve. A reális adatok mellett a talphelyek száma kerekben  $T = 570$ , ebből azonban átlagban csak 500 hely van „betöltve”.

2. Feltesszük, hogy a  $T$  talphely a hengerpaláston  $r$  alkotó menti „sáv”-ban helyezkedik el, és minden sávban  $s$  talphely van. Az egyszerűség kedvéért legyen  $r = 1/\beta$ , és így, mivel  $rs = T$ ,  $s = T\beta$ . Feltesszük, hogy egy  $B$  neuron akkor jön ingerületbe, ha van olyan sáv a palástján, amelynek talpacsokai közül legalább  $T\beta\gamma$  számú ingert közvetít.

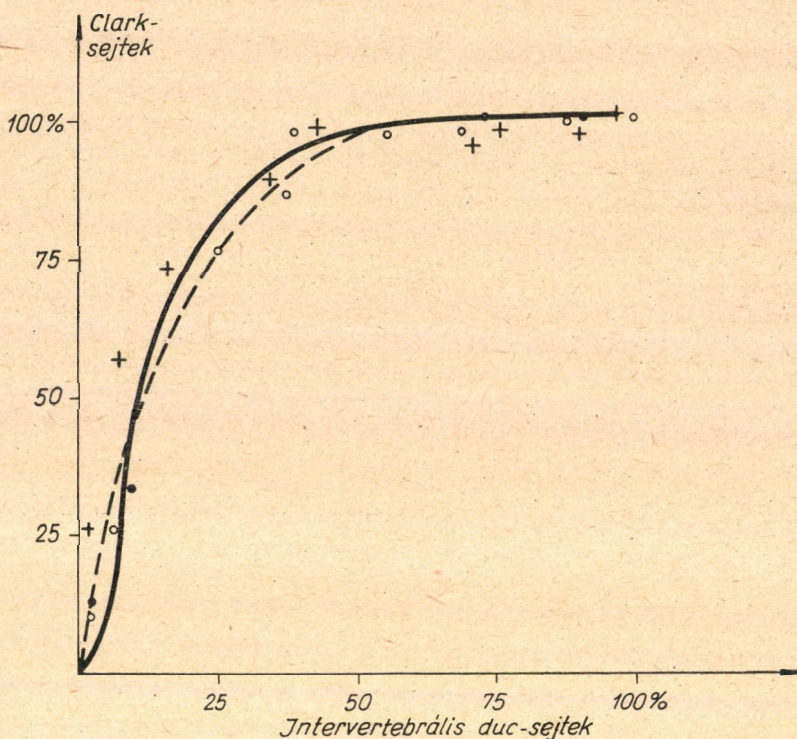
Az 1. és 2. feltevések mellett mármint a probléma a következőképpen oldható meg. Ha az  $A$  neuronok közül  $M = Nq$  közvetít ingert ( $0 < q \leq 1$ ), akkor annak a valószínűsége, hogy tetszőleges  $B$  neuronhoz csatlakozó talpacsokai közül pontosan  $k$ -hoz érkezzék inger

$$(2) \quad P_k(M) = \binom{M}{k} \left(\frac{l}{n}\right)^k \left(1 - \frac{l}{n}\right)^{M-k},$$



és így a Poisson-közelítéssel

$$(2') \quad P_k(M) \sim \frac{(Ml/n)^k e^{-Ml/n}}{k!}.$$



4. ábra

Mármost, ha  $W_k$  jelenti annak a valószínűségét, hogy a  $k$  talpon érkező inger a  $B$  sejtet ingerületbe hozza, akkor feltevésünk szerint

$$(3) \quad W_k = 1 - \sum_{\substack{0 \leq k_i \leq T\beta\gamma, \\ \sum_{i=1}^{1/\beta} k_i = k}} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_{1/\beta}!} \beta^k$$

(Ha  $1/\beta$  és  $T\beta\gamma$  nem egész számok, természetesen a legközelebbi egész számmal helyettesítendő; a jelölésben ezt nem tüntetjük fel. Ha  $T\gamma < k$ , az összeg üres és értékeként 0-t kell venni.)

Ennélfogva annak a valószínűsége, hogy egy  $B$  neuron ingerületbe jöjjön, ha az  $A$  neuronok  $q$ -adrésze közvetít ingert



$$(4) \quad f(q) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(M) W_k = 1 - \sum_{\substack{0 \leq k_i \leq T\beta\gamma, \quad 0 \leq k \leq T\gamma, \\ \sum_{i=1}^{1/\beta} k_i = k,}} \frac{\left(\frac{Ml\beta}{n}\right)^k e^{-\frac{Ml}{n}}}{k_1! k_2! \dots k_{1/\beta}!}.$$

és így

$$(4') \quad f(q) = 1 - \left[ e^{-\alpha} \left( 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{T\beta\gamma}}{(T\beta\gamma)!} \right) \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

ahol  $\alpha = Ml\beta/n$ .

Mivel a normális eloszlással való közelítés megengedett, ha  $\alpha$  nem túl kicsiny (pl. ha  $q \geq 0,2$ , akkor  $\alpha \geq 10$  és így a közelítés még jó) tehát

$$(5) \quad e^{-\alpha} \left( 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{T\beta\gamma}}{(T\beta\gamma)!} \right) \sim \Phi \left( \frac{T\beta\gamma - \alpha}{\sqrt{\alpha}} \right).$$

ahol

$$(6) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

a Gauss-féle függvény, tehát

$$(4'') \quad f(q) \sim 1 - \left[ \Phi \left( \frac{T\beta\gamma - \alpha}{\sqrt{\alpha}} \right) \right]^{\frac{1}{\beta}};$$

figyelembevée  $\alpha$  definícióját

$$(4''') \quad f(q) \sim 1 - \left\{ \Phi \left( \sqrt{\beta} \frac{T\gamma - Nlq/n}{\sqrt{Nlq/n}} \right) \right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

ahol  $T = Nl/n + 3\sqrt{Nl/n}$ .

# 1. táblázat

$$f(q) = 1 - \left[ \Phi \left( \frac{15,41 - 45q}{\sqrt{45q}} \right) \right]^{10}$$

$q$	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
$f(q)$	0,005	0,15	0,68	0,933	0,999



Látható, hogy egy elég éles ingerküszöb létezik, amelyen áthaladva az ingerelt  $B$  neuronok száma rohamosan megnő. Ha  $q^*$  jelöli azt az értéket, amelynél  $f(q^*) = 0,5$ , akkor

$$q^* \sim \frac{T\gamma n}{Nl} \left( 1 - \frac{\delta}{\sqrt{T\beta\gamma}} \right),$$

ahol  $\delta = \Phi^{-1}(1/2^\beta)$  és  $x = \Phi^{-1}(y)$  az  $y = \Phi(x)$  függvény inverzét jelöli. Ahhoz, hogy összehasonlítsuk a fenti elméleti megfontolások eredményeit a tapasztalati adatokkal, tekintetbe kell vennünk, hogy amíg az  $N$ ,  $n$  és  $l$  számok hozzávetőleges értéke anatómiai vizsgálatokkal megállapítható, addig  $\beta$  és  $\gamma$  értéke teljesen hipotétikus.  $\beta$  értékét még a számítások megkezdése előtt bizonyos anatómiai megfontolások alapján rögzítettük, míg  $\gamma$  értékét éppen a tapasztalati adatokhoz való illesztés érdekében választottuk 0,3-nak. A tapasztalati adatokkal való összehasonlítás alapján  $l$  értékét utólag 10-ről 9-re korrigáltuk. Az 3. ábrán a szaggatott vonal a tapasztalati átvitel-görbét, a kihúzott vonal az így számított átvitel-görbét ábrázolja; az utóbbi képletét és néhány értékét az 1. táblázat tartalmazza. A megegyezés nem teljes, de ez a modell rendkívüli mértékben leegyszerűsített voltát figyelembevéve érthető. Megjegyezzük, hogy a közelítés a hipotétikus kiindulási adatok értékének variálásával még lényegesen javítható lesz. Erre azért nem fektettünk súlyt, mert a választott modell nem tartjuk véglegesnek és azzal elsősorban azt akarjuk csak bizonyítani, hogy a „spatialis summatio”-ra vonatkozó kiinduló feltevés kvalitatíve, nagy vonalakban helyes, továbbá, hogy a valószínűségszámítási vizsgálat alkalmas arra, hogy a probléma megoldásához közelebb vigyen.

## 2. §. Clarke-sejtek

Ellenőrzésül még egy, az előbb tárgyaltaktól lényegesen különböző esetre is alkalmaztuk a kapott matematikai eredményeket; arra az esetre, amikor az  $A$  sejtek intervertebrális dúcok sejtjei és a  $B$  sejtek a Clarke-sejtek. Itt az eltérés a fentebb tárgyalt gerincvelői mozgató neuronok esetével szemben, hogy egy neuron egy Clarke-sejttel nem egy, hanem több, kb. 10 ponton érintkezik; ennek következtében ahhoz, hogy egy Clarke-sejt ingerületbe jöjjön, elegendő, hogy egy-két hozzávezető  $A$  neuron ingerületet közvetítsen, mert ez már azt jelenti, hogy kb. 10–20 „talp” közvetít ingert. Az egyszerűség kedvéért csak egyetlen intervertebrális dúcból (pl.  $L_4$ ) kifutó neuronokat vizsgáltunk. Ez esetben  $Nl/n$  értékét 13,5-nek vettük (ez teljesül pl., ha  $l = 9$ ,  $n = 1000$ ,  $N = 1500$ ). A Clarke-sejtek kapcsolódásának specialitását úgy vettük figyelembe, hogy  $\beta$ -nak a  $\beta = 1$  értéket adtuk. Mivel egy Clarke-sejthez átlag  $Nl/n = 13,5$   $A$ -neuron vezet (mindegyik kb. 10 érintkezési ponttal), tehát összesen kb. 135 talp jut egy Clarke-sejtre.  $\gamma$  értékét 0,064-nek vettük. A 4. ábrán a számított átvitel-görbe kihúzott vonallal, a tapasztalati görbe szaggatott vonallal van ábrázolva. Az  $f(q)$  függvény néhány értékét a 2. táblázat mutatja. A megegyezés ez esetben megnyugtatónak mondható. A nyert eredményekből elsősorban azt a következtetést vontuk le, hogy a vizsgálatokat ebben az irányban feltétlenül érdemes folytatni, mert ezúton az ingerület-átvitel mechanizmusára vonatkozó ismereteink lényeges tovább fejlesztésére nyílik lehetőség. A további vizsgálatok egyik célkitűzése annak tisztázása: mi az oka az elméleti görbéknek a tapasztalatiaknál nagyobb meredekségének?



## 2. táblázat

$$f(q) = 1 - \Phi \left( \frac{1,57 - 13,5 q}{\sqrt{13,5 q}} \right)$$

$q$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75
$f(q)$	0,14	0,42	0,63	0,75	0,84	0,89	0,93	0,95	0,97	0,98	0,984	0,99	0,9826	0,9949	0,9965

Köszönetet mondunk JUVANCZ IRÉNEUSZNAK, akivel a kérdést ismételtén megvitattuk, a matematikai modell felállításához nyújtott segítségért, továbbá TAMÁSSY JÓZSEFNÉNEK a numerikus számítások gondos és önnálló elvégzéséért.

## IRODALOM

- [1] R. LORENTE DE NÓ: „Synaptic stimulation of motoneurons as a local process.” *Journal of Neurophysiology* **1** (1938) 195—206.  
 [2] D. P. C. LLOYD—A. K. MCINTYRE: „Dorsal column conduction of group I muscle afferent impulses and their relay through Clarke's column.” *Journal of Neurophysiology* **13** (1950) 39—54.  
 [3] SZENTÁGOTHAJ J.—ALBERT Á.: „The synaptology of Clarke's column.” *Acta Morphologica Hungarica* **5** (1955) 43—51.  
 [5] J. C. ECCLES: *The neurophysiological basis of mind: the principles of neurophysiology*. Oxford, at the Clarendon Press, 1953.

(Beérkezett: 1956. II. 11.)

ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРЕНОСА РАЗДРАЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПРОСТОЙ МОДЕЛИ  
ИНТЕРНЕУРОННОГО СИНАПСИСА СО СХОДЯЩЕЙСЯ СВЯЗЬЮ

A. РЕНЬИ и Я. СЕНТАГОТАИ

## Резюме

Работа занимается вопросами, связанными с деятельностью нервной системы, а именно математическим путем определяет для двигательных нейронов спинного мозга и для нейронов колонны Кларка функцию переноса, т. е. функцию  $f(q)$ , показывающую, какая часть нейронов раздражится после синапсиса, если одновременно раздражить  $q$ -ую часть нейронов до синапсиса. Авторы сравнивают результаты вычислений с эмпирическими данными.

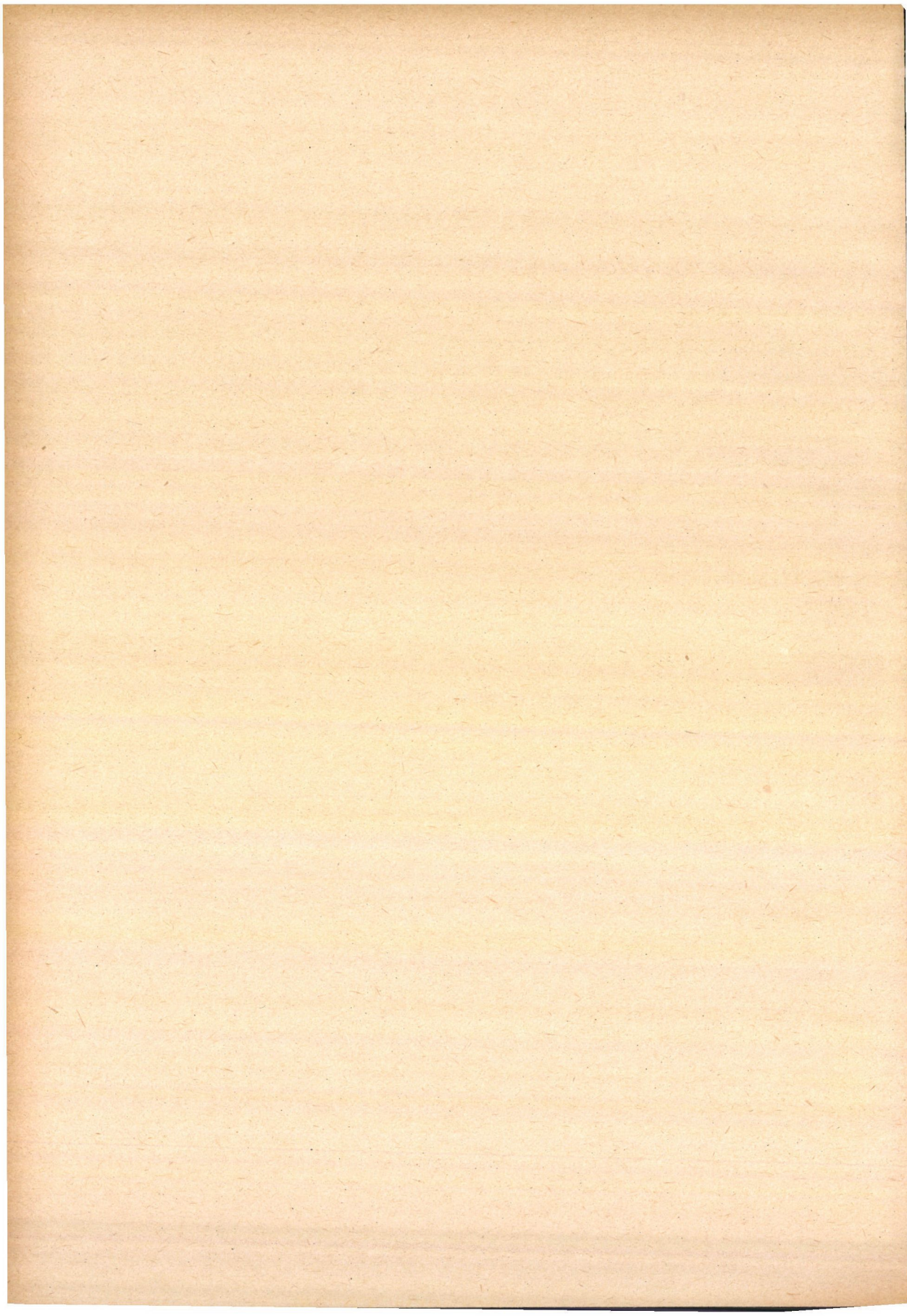
THE PROBABILITY OF SYNAPTIC TRANSMISSION  
IN SIMPLE MODELS OF INTERNEURONAL SYNAPSES  
WITH CONVERGENT COUPLING

A. RÉNYI and J. SZENTÁGOTHAJ

## Summary

The paper considers the probability of synaptic transmission in models based on histological data concerning synapses of spinal motoric and Clarke neurons. The probability of synaptic transmission is expressed by the function  $f(q)$  giving the proportion of postsynaptic neurons discharged, when a  $q$ -th fraction of the presynaptic neurons is simultaneously excited. The results of probability calculations are compared with empirical data on input-output relations of the same synapses.







## EGY RÉSZECSESZÁMLÁLÁSSAL KAPCSOLATOS VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁSI PROBLÉMÁRÓL

MEGJEGYZÉS BÉKÉSSY ANDRÁS »HIBÁS SCALEREK (JELOSTÓK)  
VALÓSZÍNŰÉGELOSZLÁSÁRÓL« CÍMŰ DOLGOZATÁHOZ

TAKÁCS LAJOS

### Bevezetés

BÉKÉSSY ANDRÁS [1] dolgozatában a következő problémával foglalkozik: Egy számlálócsőhöz Poisson-folyamat szerint érkeznek részecskék. A számlálócső által szolgáltatott impulzusok egy leosztó berendezésen (scaler) keresztül jutnak a regisztráló fokozathoz. A leosztó azonban hibásan működik, mégpedig az egyes fokozatok billenő körei a beérkező impulzusok hatására nem biztosan, hanem csak bizonyos valószínűséggel lépnek működésbe. Kérdés, hogy a  $t$  idő alatt regisztrált impulzusok szórásnégyzetének és várható értékének hányadosa miként függ a leosztó hibájától.

BÉKÉSSY ANDRÁS eredményeit a szóbanforgó sztochasztikus folyamat részletes elemzésével nyeri. A következőkben azt kívánjuk megmutatni, hogy ezek az eredmények még általánosabb esetben is könnyen nyerhetők a rekurrens folyamatok elmélete segítségével. Először a probléma általános tárgyalásával foglalkozunk, majd több példát tárgyalunk, amelyek tartalmazzák BÉKÉSSY [1] eredményét.

### 1. §. A véletlen leosztás problémája

Tegyük fel, hogy egy számlálócsőhöz  $0 < t < \infty$  időközben  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  időpontokban érkeznek részecskék (vagy egy számlálóberendezéshez impulzusok). A  $t_n - t_{n-1} = \xi_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots; t_0 = 0$ ) időkülönbségekről feltesszük, hogy egyforma eloszlású, független valószínűségi változók. Most vizsgáljuk azt az esetet, midőn a  $\{t_n\}$  sorozatból ritkítással egy új  $\{t'_n\}$  sorozatot nyerünk, ahol a  $\{t'_n\}$  sorozat részsorozata a  $\{t_n\}$ -nek. A ritkítás történéjék úgy, hogy sorra haladva a  $\{t_n\}$  sorozat  $v_1$ -edik,  $(v_1 + v_2)$ -edik,  $\dots$ ,  $(v_1 + v_2 + \dots + v_n)$ -edik,  $\dots$  elemét kiválasztjuk  $\{t'_n\}$  számára. Feltesszük, hogy a  $v_i$  mennyiségek valószínűségi változók, amelyek függetlenek és azonos  $P\{v_i = n\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) valószínűségeloszlással bírnak. Ebben az esetben a  $\{t'_n\}$  sorozatra is érvényes, hogy a  $t'_n - t'_{n-1} = \xi'_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots; t'_0 = 0$ ) időkülönbségek egyforma eloszlású független valószínűségi változók, még-



pedig  $\xi'_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) eloszlása megegyezik a  $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{v_i}$  változó eloszlásával.

Legyen az alapul vett sorozatban  $\mathbf{M}\{\xi_n\} = \mu$  és  $\mathbf{D}^2\{\xi_n\} = \sigma^2$ , úgy a ritkített sorozatban

$$(1) \quad \mathbf{M}\{\xi'_n\} = \mathbf{M}\{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{v_i}\} = \mu \mathbf{M}\{v_i\}$$

és

$$(2) \quad \mathbf{D}^2\{\xi'_n\} = \mathbf{D}^2\{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{v_i}\} = \mu^2 \mathbf{D}^2\{v_i\} + \sigma^2 \mathbf{M}\{v_i\}.$$

Az (1) és (2) képletek könnyen adódnak a teljes várható érték tétel alapján.

Jelölje most a  $\{t_n\}$  sorozatban  $(0, t)$  időközben előforduló események várható számát  $m(t)$  és szórásnégyzetét  $d^2(t)$ . Ezen mennyiségekre elemi módon a következő aszimptotikus becslések adhatók (S. TÄCKLIND [2]):

$$(3) \quad m(t) \sim \frac{t}{\mu},$$

és ha  $\sigma^2$  véges

$$(4) \quad d^2(t) \sim \frac{\sigma^2}{\mu^3} t.$$

Vagyis a  $\{t_n\}$  sorozatra fennáll, hogy

$$(5) \quad f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^2(t)}{m(t)} = \frac{\sigma^2}{\mu^2}.$$

Ha a ritkített  $\{t'_n\}$  sorozatban a  $(0, t)$  időközben előforduló események számának várható értékét  $M(t)$ , szórásnégyzetét pedig  $D^2(t)$  jelöli, úgy (5)-höz hasonlóan fennáll, hogy

$$(6) \quad f' = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D^2(t)}{M(t)} = \frac{\mathbf{D}^2\{\xi'_n\}}{\mathbf{M}^2\{\xi'_n\}} = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{1}{\mathbf{M}\{v_i\}} + \frac{\mathbf{D}^2\{v_i\}}{\mathbf{M}^2\{v_i\}}.$$

Ennek a képletnek alapján egy érdekes eredmény olvasható le. Első pillanatra azt gondolhatnánk, hogy  $f'$  az  $f$ -ből egyszerűen  $\mathbf{M}\{v_i\}$ -vel való osztással nyerhető, de, mint kiderül, fellép még egy additív tag is, amely nem függ a  $\{t_n\}$  sorozat törvényszerűségétől, hanem csakis a ritkítés sajátosságaitól.

## 2. §. Példák

1. Legyen  $\{t_n\}$  a korábban említett sorozat. Ha speciálisan  $v_i \equiv m$  (állandó), úgy

$$(7) \quad f' = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{1}{m}.$$

Ha  $\mathbf{P}\{v_i = n\} = p(1-p)^{n-1}$ , azaz minden egyes  $\{t_n\}$  sorozathoz tartozó esemény  $p$  valószínűséggel tartozik a  $\{t'_n\}$  sorozathoz is, úgy

$$(8) \quad f' = \frac{\sigma^2}{\mu^2} p + (1-p),$$



ugyanis ekkor  $\mathbf{M}\{v_i\} = 1/p$  és  $\mathbf{D}^2\{v_i\} = (1-p)/p^2$ . Ha ezen utóbbi esetben feltesszük, hogy az alapulvett  $\{t_n\}$  folyamat Poisson-féle, amikor  $\sigma^2/\mu^2 = 1$ , úgy (8) szerint  $f' = 1$ . Ez természetes eredmény is, mivel ekkor a  $\{t'_n\}$  folyamat is Poisson-féle lesz.

2. BÉKÉSSY [1] példája. Jelölje most a fent említett  $\{t_n\}$  sorozat egy számlálósó által szolgáltatott impulzusok sorozatát. BÉKÉSSY felteszi, hogy  $\{t_n\}$  Poisson-folyamat, mikor  $f = \sigma^2/\mu^2 = 1$ . (Megjegyezzük, hogy ha feltesszük, hogy  $\lambda$  eseményűrűségű Poisson-folyamat szerint érkező részecskéket számlálunk  $\tau$  holtidejű Geiger—Müller számlálósóval, úgy  $\mu = \tau + 1/\lambda$  és  $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ , azaz  $f = \sigma^2/\mu^2 = 1/(1 + \lambda\tau)^2$ , és ha a számlálást  $\tau$  impulzusidejű elektronsokszorzóval végezzük, úgy  $\mu = e^{\lambda\tau}/\lambda$  és  $\sigma^2 = (e^{\lambda\tau} - 2\lambda\tau)/\lambda^2$ , azaz  $f = \sigma^2/\mu^2 = 1 - 2\lambda\tau e^{-\lambda\tau}$ ).

Tegyük fel most, hogy az impulzusok  $\{t_n\}$  sorozata egy  $m$  fokozatú leosztón halad át és jelölje  $\{t'_n\}$  a leosztó után a regisztrálóhoz érkező impulzusok sorozatát. Megállapítandó az  $f'$  mennyiség. Ha a leosztó ideálisan működik, úgy minden  $v_i = 2^m$ -edik impulzust jelzi és ekkor  $f' = f/2^m$ .

A leosztó működési elve, mint ismeretes, a következő: Egy  $m$ -fokozatú leosztó minden egyes fokozata kétféle állapotban lehet, mondjuk  $A$  és  $B$  állapotban. Legyen  $t = 0$  időpontban valamennyi fokozat  $A$  állapotban. Az első impulzus hatására az első fokozat átmegy  $B$  állapotba. A második impulzus hatására az első fokozat visszabilen  $A$  állapotba és lead egy impulzust a második fokozatnak, mire az átmegy  $B$  állapotba. A jelenség hasonlóképpen folytatódik tovább, ha egy fokozat impulzust kap, úgy megváltoztatja állapotát és a  $B \rightarrow A$  átmenetek alkalmával a következő fokozatnak lead egy impulzust. Az utolsó fokozat által továbbított impulzusok vezérlik a regisztrálót.

BÉKÉSSY [1] dolgozatában azt az esetet vizsgálja, midőn a leosztó hibásan működik, azaz az impulzusok hatására nem következik be okvetlenül átbillenés, hanem csak bizonyos valószínűséggel. Mégpedig tegyük fel, hogy ha az  $i$ -edik fokozat impulzust kap és  $A$  állapotban van, úgy  $p_i$  valószínűséggel billen át, míg, ha  $B$  állapotban van, úgy  $q_i$  valószínűséggel billen át ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Ebben az esetben a leosztó mindegyik fokozata egy véletlen ritkítást végez. Jelölje rendre az  $1, 2, \dots, m$ -edik ritkításhoz tartozó  $v_l$  ( $l = 1, 2, 3, \dots$ ) változókat  $v_{1l}, v_{2l}, \dots, v_{ml}$  ( $l = 1, 2, 3, \dots$ ). Ezek eloszlása könnyen megállapítható, és pedig fennáll, hogy

$$(9) \quad \mathbf{P}\{v_{rl} = k\} = \sum_{j=1}^{k-1} (1-p_r)^{j-1} p_r (1-q_r)^{k-j-1} q_r,$$

ugyanis  $v_{rl}$  jelöli az  $r$ -edik fokozatnál azt, hogy az  $(l-1)$ -edik  $B \rightarrow A$  átmenet után hányadik impulzus hozza létre a következő  $B \rightarrow A$  átmenetet. A fent felírt valószínűség úgy adódik, hogy feltesszük, hogy a  $j$ -edik ( $j = 1, 2, \dots, k-1$ ) impulzusra  $A \rightarrow B$  átmenet és a  $k$ -adikra  $B \rightarrow A$  átmenet következik. Most a (9) valószínűségeloszlás generátorfüggvénye könnyen felírható:

$$(10) \quad u_r(s) = \sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{P}\{v_{rl} = k\} s^k = \frac{p_r s}{1 - (1-p_r)s} \cdot \frac{q_r s}{1 - (1-q_r)s}.$$

Ha a leosztót mint egészet tekintjük, úgy érvényes, hogy a leosztó is véletlen ritkítást végez, mégpedig a  $v_1$ -edik,  $(v_1 + v_2)$ -edik,  $\dots, (v_1 + v_2 + \dots + v_n)$ -edik,  $\dots$  impulzust választja ki. A  $v_i$  változó generátorfüggvénye:

$$(11) \quad U(s) = \mathbf{M}\{s^{v_i}\} = u_1(u_2(\dots u_m(s) \dots)).$$



Ez a következőképpen indokolható: A  $v_i$  valószínűségi változó úgy tekinthető, mint egy individuum által elindított kaszkád-procессzusnál az  $m$ -edik generációban levő individuumok száma, ha feltesszük, hogy az  $r$ -edik generációban a  $v_r$  változó írja le egy individuum utódainak számát. (Erre vonatkozólag utalunk például T. E. HARRIS [3] munkájára.)

A  $v_i$  változó várható értéke és szórásnégyzete (11) alapján könnyen meghatározható. Legyen egyszerűség kedvéért

$$\alpha_r = \frac{1}{p_r} + \frac{1}{q_r} \quad \text{és} \quad \beta_r = \frac{1-p_r}{p_r^2} + \frac{1-q_r}{q_r^2},$$

úgy

$$(12) \quad \mathbf{M}\{v_i\} = A_m = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$$

és

$$(13) \quad \mathbf{D}^2\{v_i\} = B_m^2 = \\ = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)^2 \left( \frac{\beta_1}{\alpha_1^2} + \frac{\beta_2}{\alpha_1 \alpha_2^2} + \frac{\beta_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^2} + \dots + \frac{\beta_m}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m^2} \right).$$

Ugyanis  $\mathbf{M}\{v_i\} = U'(1)$  és  $\mathbf{D}^2\{v_i\} = U''(1) + U'(1) - [U'(1)]^2$ .

Igy tehát (6) szerint a regisztrálóhoz érkező impulzusok sorozatára fennáll, hogy

$$(14) \quad f' = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{1}{A_m} + \frac{B_m^2}{A_m^2}.$$

Ha most azt is tekintetbe vesszük, hogy a regisztráló csupán  $p_{m+1}$  valószínűséggel jelzi az egyes impulzusokat, úgy a  $\{t'_n\}$  sorozatot a (8) képlettel kapcsolatban leírt modell szerint tovább kell ritkítani egy  $\{t''_n\}$  sorozattá, amely végülis a regisztrálások sorozata. Most (8) szerint erre fennáll, hogy

$$(15) \quad f'' = f' p_{m+1} + (1 - p_{m+1}) = \left( \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{1}{A_m} + \frac{B_m^2}{A_m^2} \right) p_{m+1} + (1 - p_{m+1}).$$

Az  $f''$  szolgáltatja végülis a regisztrálások sorozatára jellemző szórásnégyzet/várható-érték viszony határértékét  $t \rightarrow \infty$  esetben. Ha  $p_{m+1} = 1$ , úgy  $f'' = f'$ .

Vizsgáljuk meg a (14) alatti  $f'$  értékét néhány speciális esetben. Ha  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = \alpha$  és  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = \beta$ , úgy

$$f' = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{1}{\alpha^m} + \frac{\beta}{\alpha^{m+1}} \frac{\alpha^m - 1}{\alpha - 1}.$$

Ha  $p_r = q_r = p$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), úgy az előző képletben  $\alpha = 2/p$ ,  $\beta = 2(1-p)/p^2$  és

$$f' = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{p^m}{2^m} + \frac{1-p}{2-p} \left[ 1 - \left( \frac{p}{2} \right)^m \right].$$



Ha még azt is feltesszük, hogy  $\{t_n\}$  Poisson-folyamat, úgy  $\sigma^2/\mu^2 = 1$  és

$$f' = \frac{1}{2-p} \left[ 1 - p + \left( \frac{p}{2} \right)^m \right].$$

**Megjegyzés.** Érdekességgel bír annak az esetnek a megvizsgálása is, midőn  $\{t_n\}$  nem homogén Poisson-folyamat  $\lambda(u)$  ( $0 \leq u < \infty$ ) eseményűrűséggel. Ekkor

$$m(t) = d^2(t) = \int_0^t \lambda(u) du,$$

és a transzformált  $\{t'_n\}$  sorozatban

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D^2(t)}{M(t)} = 1 + \frac{\mathbf{D}^2\{v_i\}}{\mathbf{M}^2\{v_i\}},$$

feltéve, hogy  $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$ .

# IRODALOM

- [1] BÉKÉSSY A.: „Hibás scalerek (jelosztók) jeleinek valószínűségeloszlásáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 171—181.
- [2] S. TÄCKLIND: „Elementare Behandlung von Erneuerungsproblem für den stationären Fall.” *Skandinavisk Aktuarietidskrift* (1944) 1—15.
- [3] T. E. HARRIS: „Branching processes.” *Annals of Mathematical Statistics* 19 (1948) 474—494.

(Beérkezett: 1955. X. 1.)

## ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, СВЯЗАННОЙ С РЕГИСТРАЦИЕЙ ЧАСТИЦ

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ А. БЕКЕШИ

Л. ТАКАЧ

### Резюме

Предположим, что в промежутке  $0 \leq t < \infty$  к регистратору прибывают частицы (или к счётному устройству сигналы) в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . О промежутках времени  $t_n - t_{n-1} = \xi_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $t_0 = 0$ ) предположим, что они являются независимыми случайными величинами с одинаковыми распределениями, для которых  $\mathbf{M}\{\xi_n\} = \mu$  и  $\mathbf{D}^2\{\xi_n\} = \sigma^2$ . Выберем из последовательности  $\{t_n\}$   $v_1$ -ий,  $(v_1 + v_2)$ -ий,  $\dots$ ,  $(v_1 + v_2 + \dots + v_n)$ -ий элемент. Так мы получим разреженную последовательность  $\{t'_n\}$ . Предположим, что  $v_i$  есть суть независимые случайные величины, распределение которых  $\mathbf{P}\{v_i = n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) известно. Обозначим через  $m(t)$  математическое ожидание, а через  $d^2(t)$  дисперсию числа событий последовательности  $\{t_n\}$  происходящих в промежутке времени  $(0, t)$  а через  $M(t)$  и  $D^2(t)$  соответствующие величины для последовательности  $\{t'_n\}$ . Для этих величин имеют место соотношения

$$f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^2(t)}{m(t)} = \frac{\sigma^2}{\mu^2},$$

и

$$f' = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D^2(t)}{M(t)} = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{1}{\mathbf{M}\{v_i\}} + \frac{\mathbf{D}^2\{v_i\}}{\mathbf{M}^2\{v_i\}},$$



Рассматривается несколько примеров на применение этих формул. Так мы подробно рассматриваем результат А. БЕКЕШШИ [1], который указывает как отражается счёт с помощью дефектных счётчиков на величине  $f'$ . В настоящей работе показывается, что для вычисления этого отношения  $f'$  не требуется подробного исследования соответствующего стохастического процесса, как это делает БЕКЕШШИ, так как проблема может быть разрешена даже в более общем случае с помощью теории рекуррентных процессов.

## ON SOME PROBABILISTIC PROBLEMS CONCERNING THE COUNTING OF PARTICLES

A NOTE ON A PAPER OF A. BÉKÉSSY

L. TAKÁCS

### Summary

Suppose that in the time-interval  $(0 \leq t < \infty)$ , particles (or pulses) arrive to a counter-tube (or to a counting device) in the moments  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ . It will be supposed that the time-differences  $t_n - t_{n-1} = \xi_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $t_0 = 0$ ) are equally distributed independent random variables for which  $\mathbf{M}\{\xi_n\} = \mu$  and  $\mathbf{D}^2\{\xi_n\} = \sigma^2$ . Now, proceeding in the sequence  $\{t_n\}$  from member to member, let us choose the  $v_1$ -th,  $(v_1 + v_2)$ -th,  $\dots$ ,  $(v_1 + v_2 + \dots + v_n)$ -th,  $\dots$  element. Then we get the filtered sequence  $\{t_n\}$ . We suppose that  $v_i$  are independent random variables whose distribution  $\mathbf{P}\{v_i = n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) is known. Denote by  $m(t)$  resp.  $d^2(t)$  the expectation resp. the variance of the number of events occurring in the sequence  $\{t_n\}$  during the time interval  $(0, t)$ . The corresponding quantities for the sequence  $\{t'_n\}$  shall be denoted by  $M(t)$  and  $D^2(t)$ . Then following formulae hold:

$$f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^2(t)}{m(t)} = \frac{\sigma^2}{\mu^2},$$

and

$$f' = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D^2(t)}{M(t)} = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{1}{\mathbf{M}\{v_i\}} + \frac{\mathbf{D}^2\{v_i\}}{\mathbf{M}^2\{v_i\}}.$$

As an application of these formulae some examples are considered, especially the problem, treated by A. BÉKÉSSY [1], how a counting carried out with scalers which make sometimes mistakes influences of the value of  $f'$ . In the present paper it is shown, that in order to calculate  $f'$ , no detailed investigation of the stochastic process in question, as it is done in BÉKÉSSY's paper [1] is needed; as the problem can be solved, even under more general assumptions by means of the elementary theory of recurrent processes.



## EGY KÖZLEKEDÉSSSEL KAPCSOLATOS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI PROBLÉMÁRÓL

TAKÁCS LAJOS

### Bevezetés

A Közlekedéstudományi Műszaki Egyetem Matematikai Tanszékének megbízásából Intézetünk a következő kérdés megoldásával foglalkozott: Egy vasúti pályaudvarra  $t_1 + kT, t_2 + kT, \dots, t_n + kT$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) időpontokban érkeznek mozdonyok, és ezek  $u_1 + kT, u_2 + kT, \dots, u_n + kT$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) időpontokban hagyják el a pályaudvart. Legyen  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$  és  $0 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_n < T$ . (A gyakorlatban  $T = 1$  nap.) Tegyük fel, hogy a forgalmat minimális mozdonykészlet látja el, azaz a pályaudvaron nincs feleslegesen sok várakozó mozdony, hanem csak annyi, amennyi a forgalom lebonyolításához feltétlenül szükséges. Meghatározandó a mozdonyoknak egy  $T$  hosszúságú periódusra jutó állási ideje:  $\tau = \tau(t_1, t_2, \dots, t_n; u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

Vizsgálatainkban feltesszük, hogy a  $t_1, t_2, \dots, t_n$  és  $u_1, u_2, \dots, u_n$  időpontok valószínűségi változók, mégpedig a  $t_1, t_2, \dots, t_n$  időpontok és az  $u_1, u_2, \dots, u_n$  időpontok is a  $(0, T)$  intervallumon  $n$  számú független, egyenletes eloszlású pont nagyság szerint rendezett koordinátaival egyeznek meg. Ebben az esetben a  $\tau = \tau(t_1, t_2, \dots, t_n; u_1, u_2, \dots, u_n)$  állási időtartam is valószínűségi változó lesz.

A fenti feltevés azzal indokolható, hogy bár az egyes pályaudvarokra vonatkozó érkezési és indulási időpontok rögzített értékek, mégis országos viszonylatban igen különbözők, és bennünket az országos átlag érdekel. Ennek meghatározására viszont célszerű a fenti egyszerű feltevéssel élni, amelyben az előforduló időpontokat valószínűségi változóknak tekintjük.

A fenti esetre a  $\tau$  valószínűségi változó várható értékét SARKADI KÁROLY [1] dolgozatában meghatározta. SARKADI KÁROLY hasonló módszert alkalmazott, mint ZIERMANN MARGIT [2] dolgozatában gépalkatrészek raktározási idejének meghatározására használt. Ennek a módszernek lényege az, hogy nem kell az egyes mozdonyok érkezési és indulási idejét, illetve az egyes gépalkatrészek beérkezési és felhasználási időpontjait külön figyelembe venni, hanem elegendő a mozdonykészlet, illetve a raktárkészlet időbeli változását vizsgálni. Ezen a módon az átlagos állási idő meghatározható, de az állási idő szórásának, illetve eloszlásának meghatározása már nagy nehézségekbe ütközik.

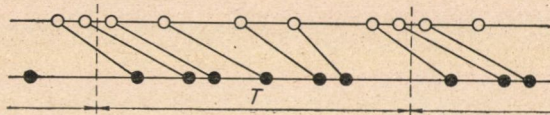




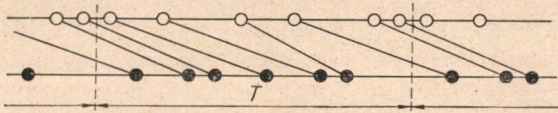


és  $(i + 1)$ -edik pont közötti szakaszon, amelynek hossza  $\xi_i$ , a veszteglő mozdonyok száma  $\eta_i + \eta_{2n}^*$ , és ennek alapján adódik (1).

Megjegyezzük, hogy az említett példánál optimális indítási rendszert tüntet fel a 3. ábra. Itt az egyes mozdonyok összetartozó érkezési és időpontjai össze vannak kötve. Nem optimális indítási rendszert tüntet fel a 4. ábra. Megjegyezzük azonban, hogy az állási időt nem érinti az a tény, hogy az egyidejűleg várakozó mozdonyok közül melyiket indítjuk el.



3. ábra



4. ábra

Az eddig felsorolt feltevésekből következik, hogy a  $\{\xi_i\}$  és az  $\{\eta_i\}$  valószínűségi változók egymástól függetlenek. A  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}$  valószínűségi változók ekvivalens valószínűségi változók, amelyekre fennáll, hogy  $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{2n} = T$ , és a  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i)$  változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i) = \frac{2n(2n-1) \dots (2n-i+1)}{T^i} \left(1 - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i}{T}\right)^{2n-i},$$

ha  $x_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, i$ ) és  $x_1 + x_2 + \dots + x_i \leq T$ ; ( $i = 1, 2, \dots, 2n-1$ ). Továbbá az  $\eta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) változók egy bolyongó pont mozgását írják le. Ha egy pont kiindul az  $x = 0$  pontból és  $n$  egységnyi lépést tesz előre és  $n$  egységnyi lépést hátra, és minden egyes lehetséges bolyongása egyenlően valószínű, úgy  $\eta_i$  jelöli a pont helyzetét  $i$  lépés megtétele után.  $\eta_i$  előállítható a következő alakban is:  $\eta_i = \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ), ahol a  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{2n}$  változók közül  $n$  számú 1 és  $n$  számú  $-1$ , és minden egyes választás egyenlően valószínű.

A fent elmondottak segítségével a  $\tau$  változó egyértelműen jellemezve van. Célszerű  $\tau$ -t a következő, (1)-gyel ekvivalens alakban felírni:

$$\tau = \sum_{i=1}^{2n} \eta_i \xi_i + T \eta_{2n}^*.$$

Az  $\{\eta_i\}$  és  $\{\xi_i\}$  változók eloszlásainak ismeretében  $\tau$  eloszlása is meghatározható. Most azonban csak  $\tau$  várható értékének és szórásának meghatározásával foglalkozunk.



## 2. §. A $\tau$ várható értékének meghatározása

Fennáll, hogy

$$\mathbf{M}\{\tau\} = T \mathbf{M}\{\eta_{2n}^*\}.$$

Ugyanis  $\mathbf{M}\{\eta_i \xi_i\} = 0$ , mert egyrészt  $\eta_i$  és  $\xi_i$  függetlensége következtében  $\mathbf{M}\{\eta_i \xi_i\} = \mathbf{M}\{\eta_i\} \mathbf{M}\{\xi_i\}$ , másrészt  $\mathbf{M}\{\eta_i\} = 0$ , mivel  $\eta_i$  eloszlása szimmetrikus a 0-pontra nézve.

Most

$$(2) \quad \mathbf{P}\{\eta_{2n}^* \geq c\} = \frac{\binom{2n}{n-c}}{\binom{2n}{n}},$$

és így

$$(3) \quad \mathbf{M}\{\eta_{2n}^*\} = \sum_{c=1}^n \mathbf{P}\{\eta_{2n}^* \geq c\} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} - 1 \right],$$

vagyis

$$(4) \quad \mathbf{M}\{\tau\} = \frac{T}{2} \left[ \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} - 1 \right].$$

(2) a következőképpen indokolható: Az említett bolyongásban az összes lehetséges utak száma  $\binom{2n}{n}$ . Az  $\eta_{2n}^* \geq c$  esemény akkor következik be, ha a pont bolyongása során érinti az  $x = -c$  pontot. Az  $x = -c$  pontot érintő utak száma viszont  $\binom{2n}{n-c}$ , ugyanis ez megegyezik azon utak számával, amelyeknél a pont az  $x = 0$  pontból kiindulva  $2n$  lépéssel az  $x = -2c$  pontba az  $x = 0$  pontnak  $x = -c$ -re vonatkozó tükörképébe jut.

## 3. §. A $\tau$ szórásnégyzetének meghatározása

$\mathbf{M}\{\tau\}$  már ismeretes, és  $\mathbf{D}^2\{\tau\} = \mathbf{M}\{\tau^2\} - [\mathbf{M}\{\tau\}]^2$ . Így elegendő  $\mathbf{M}\{\tau^2\}$ -et kiszámítani. Erre fennáll:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{M}\{\tau^2\} &= \mathbf{M}\{\xi_1^2\} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{M}\{\eta_i^2\} + \mathbf{M}\{\xi_1 \xi_2\} \sum_{i \neq j} \mathbf{M}\{\eta_i \eta_j\} + \\ &+ 2T \mathbf{M}\{\xi_1\} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{M}\{\eta_i \eta_{2n}^*\} + T^2 \mathbf{M}\{\eta_{2n}^{*2}\}. \end{aligned} \right.$$

Itt könnyen adódik, hogy



$$(6) \quad \mathbf{M}\{\xi_1\} = \frac{T}{2n},$$

$$(7) \quad \mathbf{M}\{\xi_1^2\} = \frac{2T^2}{2n(2n+1)},$$

és

$$(8) \quad \mathbf{M}\{\xi_1 \xi_2\} = \frac{T^2}{2n(2n+1)},$$

továbbá (2) szerint

$$(9) \quad \mathbf{M}\{\eta_{2n}^{*2}\} = \sum_{c=1}^n (2c-1) \mathbf{P}\{\eta_{2n}^* \geq c\} = n + \frac{1}{2} - \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}}.$$

A következőkben bebizonyítjuk, hogy

$$(10) \quad \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{M}\{\eta_i^2\} = \frac{n(n+1)}{3},$$

$$(11) \quad \sum_{i \neq j} \mathbf{M}\{\eta_i \eta_j\} = \frac{(n-1)n(2n+1)}{3}$$

és

$$(12) \quad \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{M}\{\eta_i \eta_{2n}^*\} = -\frac{n(2n+1)}{6}.$$

Ezek segítségével azt nyerjük, hogy

$$(13) \quad \mathbf{M}\{\tau^2\} = T^2 \left( \frac{5n}{6} + \frac{1}{2} - \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}} \right),$$

és

$$(14) \quad \mathbf{D}^2\{\tau\} = T^2 \left( \frac{5n}{6} + \frac{1}{4} - \frac{2^{4n-2}}{\binom{2n}{n}^2} \right).$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy

$$\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}},$$

úgy a következő aszimptotikus becslést nyerjük  $\mathbf{D}^2\{\tau\}$ -ra:

$$(15) \quad \mathbf{D}^2\{\tau\} = nT^2 \left( \frac{5}{6} - \frac{\pi}{4} \right) + \dots \sim nT^2 \cdot 0,0479 \dots$$



Ezután rátérünk a felhasznált (10), (11) és (12) eredmények bizonyítására.

(10) **bizonyítása.** Könnyen látható, hogy az  $\eta_i$  változó csupán a  $2r - i$  ( $r = 0, 1, 2, \dots, i$ ) értékeket veheti fel, és pedig fennáll, hogy

$$P\{\eta_i = 2r - i\} = \frac{\binom{i}{r} \binom{2n-i}{n-r}}{\binom{2n}{n}}.$$

Innen könnyű számítással adódik, hogy

$$M\{\eta_i^2\} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{r=0}^i (2r-i)^2 \binom{i}{r} \binom{2n-i}{n-r} = \binom{i}{1} - \frac{2}{2n-1} \binom{i}{2}$$

és így

$$\sum_{i=1}^{2n} M\{\eta_i^2\} = \binom{2n+1}{2} - \frac{2}{2n-1} \binom{2n+1}{3} = \frac{n(2n+1)}{3}.$$

(11) **bizonyítása.** Fennáll, hogy

$$M\{(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{2n})^2\} = \sum_{i=1}^{2n} M\{\eta_i^2\} + \sum_{i \neq j} M\{\eta_i \eta_j\}.$$

A jobboldal első tagját (10) szerint ismerjük. Ha a baloldal értékét is sikerül meghatározni, úgy ezzel a (11) kifejezés is ismertté válik. Most, mint már említettük,  $\eta_i = \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) írható, ahol a  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{2n}$  változók közül  $n$  számú 1-gyel és  $n$  számú  $(-1)$ -gyel egyenlő és minden egyes választás egyenlő valószínű, Ilyen körülmények között  $M\{\chi_i\} = 0$ ,  $D^2\{\chi_i\} = 1$  és  $M\{\chi_i \chi_j\} = -1/(2n-1)$ , ha  $i \neq j$ . Most

$$\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{2n} = 2n\chi_1 + (2n-1)\chi_2 + \dots + \chi_{2n},$$

és ebből

$$M\{(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{2n})^2\} = \frac{n^2(2n+1)}{3};$$

Végül (10) tekintetbe vételével

$$\sum_{i \neq j} M\{\eta_i \eta_j\} = \frac{(n-1)n(2n+1)}{3}.$$

(12) **bizonyítása.** Tekintsük először az  $\eta_i + \eta_{2n}^*$  változót. Ennek eloszlása könnyen meghatározható. Ugyanis fennáll, hogy



$$\mathbf{P}\{\eta_i = 2r - i, \eta_{2n}^* \geq c\} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\binom{i}{r} \binom{2n-i}{n-r}}{\binom{2n}{n}}, & \text{ha } 0 \leq r \leq \frac{i-c}{2}; \\ \frac{\binom{i}{r} \binom{2n-i}{n-c-r} + \binom{i}{c+r} \binom{2n-i}{n-r} - \binom{i}{c+r} \binom{2n-i}{n-c-r}}{\binom{2n}{n}}, & \text{ha } \frac{i-c}{2} \leq r \leq i. \end{cases}$$

Ez a következőképpen látható be: Az említett bolyongásnál az összes lehetséges utak száma  $\binom{2n}{n}$  és  $(\eta_i = 2r - i, \eta_{2n}^* \geq c)$  esemény ama utakra teljesül, amelyek az  $i$ -edik lépésben az  $x = 2r - i$  ponton haladnak át és közben érintik az  $x = -c$  pontot. Ha  $0 \leq r \leq \frac{1}{2}(i - c)$ , úgy az  $\eta_{2n}^* \geq c$  esemény önmagától teljesül, és a kedvező utak száma  $\binom{i}{r} \binom{2n-i}{n-r}$ . Ha  $\frac{1}{2}(i - c) \leq r \leq i$ , úgy az olyan utak száma, amelyek az  $i$ -edik lépés után elérik az  $x = -c$  pontot:  $\binom{i}{r} \binom{2n-i}{n-c-r}$ , az olyan utak száma, amelyek az  $i$ -edik lépésig elérik az  $x = -c$  pontot,  $\binom{i}{c+r} \binom{2n-i}{n-r}$ . Ezek összegében azonban kétszer szerepelnek azon utak, amelyek az  $i$ -edik lépés előtt és után is érintik az  $x = -c$  pontot. Ha az ilyen utak számát,  $\binom{i}{c+r} \binom{2n-i}{n-c-r}$ -et levonjuk az összegből, úgy a kedvező utak számát nyerjük.

A fenti valószínűség segítségével:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_i + \eta_{2n}^* \geq s\} &= \sum_{r=0}^i \mathbf{P}\{\eta_i = 2r - i, \eta_{2n}^* \geq s + i - 2r\} = \\ &= \sum_{0 \leq r < \frac{s+i}{2}} \frac{\binom{i}{r} \binom{2n-i}{n-r+s} + \binom{i}{r-s} \binom{2n-i}{n-r} - \binom{i}{r-s} \binom{2n-i}{n-r+s}}{\binom{2n}{n}} + \\ &\quad + \sum_{\frac{s+i}{2} \leq r \leq i} \frac{\binom{i}{r} \binom{2n-i}{n-r}}{\binom{2n}{n}} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{0 \leq r < \frac{s+i}{2}} \frac{\left[ \binom{i}{r} - \binom{i}{r-s} \right] \left[ \binom{2n-i}{n-r+s} - \binom{2n-i}{n-r} \right]}{\binom{2n}{n}} = \\
&= 1 + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{s+i} \frac{\left[ \binom{i}{r} - \binom{i}{r-s} \right] \left[ \binom{2n-i}{n-r+s} - \binom{2n-i}{n-r} \right]}{\binom{2n}{n}} = \\
&= 1 + \frac{1}{2} \frac{\binom{2n}{n+s} - 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-s}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\binom{2n}{n-s}}{\binom{2n}{n}}.
\end{aligned}$$

Vagyis azt nyertük eredményül, hogy  $\eta_{2n}^*$  eloszlása megegyezik  $\eta_i + \eta_{2n}^*$  eloszlásával.<sup>1)</sup> Következésképpen

$$\mathbf{M}\{(\eta_i + \eta_{2n}^*)^2\} = \mathbf{M}\{\eta_{2n}^{*2}\},$$

ahonnan

$$\mathbf{M}\{\eta_i \eta_{2n}\} = -\frac{1}{2} \mathbf{M}\{\eta_i^2\}$$

és így (10) szerint

$$\sum_{i=1}^{2n} \mathbf{M}\{\eta_i \eta_{2n}^*\} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{M}\{\eta_i^2\} = -\frac{n(2n+1)}{6},$$

amivel (12)-t is igazoltuk.

További feladat lenne a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\tau}{T\sqrt{n}} \leq x\right\},$$

határeloszlás meghatározása.

#### IRODALOM

- [1] SARKADI KÁROLY: „Mozdonyok várakozási idejéről.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 191—194.  
 [2] ZIERMANN MARGIT: „A raktárkészlet pótlásáról, II. A készletpótló rendelés.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 203—216.

(Beérkezett: 1955. IX. 15.)

<sup>1)</sup> SARKADI KÁROLY volt szíves figyelmemet felhívni arra, hogy a két eloszlás azonossága az  $\eta_i$  definíciójának közvetlen következménye.



ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СВЯЗАННОЙ  
С ТРАНСПОРТОМ

Л. ТАКАЧ

## Резюме

Предположим, что на какой то вокзал в течение одного дня ( $T = 1$  день) прибывает и отправляется  $n$  паровозов. Пусть времена прибытия и отправления являются независимыми друг от друга случайными величинами с равномерным распределением. Требуется определить суточное время простоя паровозов при возможно лучшей системе отправки. К. ШАРКАДЪИ уже определил в статье [1] математическое ожидание времени простоя. Теперь мы предлагаем метод, который делает возможным помимо вычисления математического ожидания также вычисление дисперсии и моментов высшего порядка. Математическое ожидание времени простоя дается формулой (4), дисперсия — формулой (14).

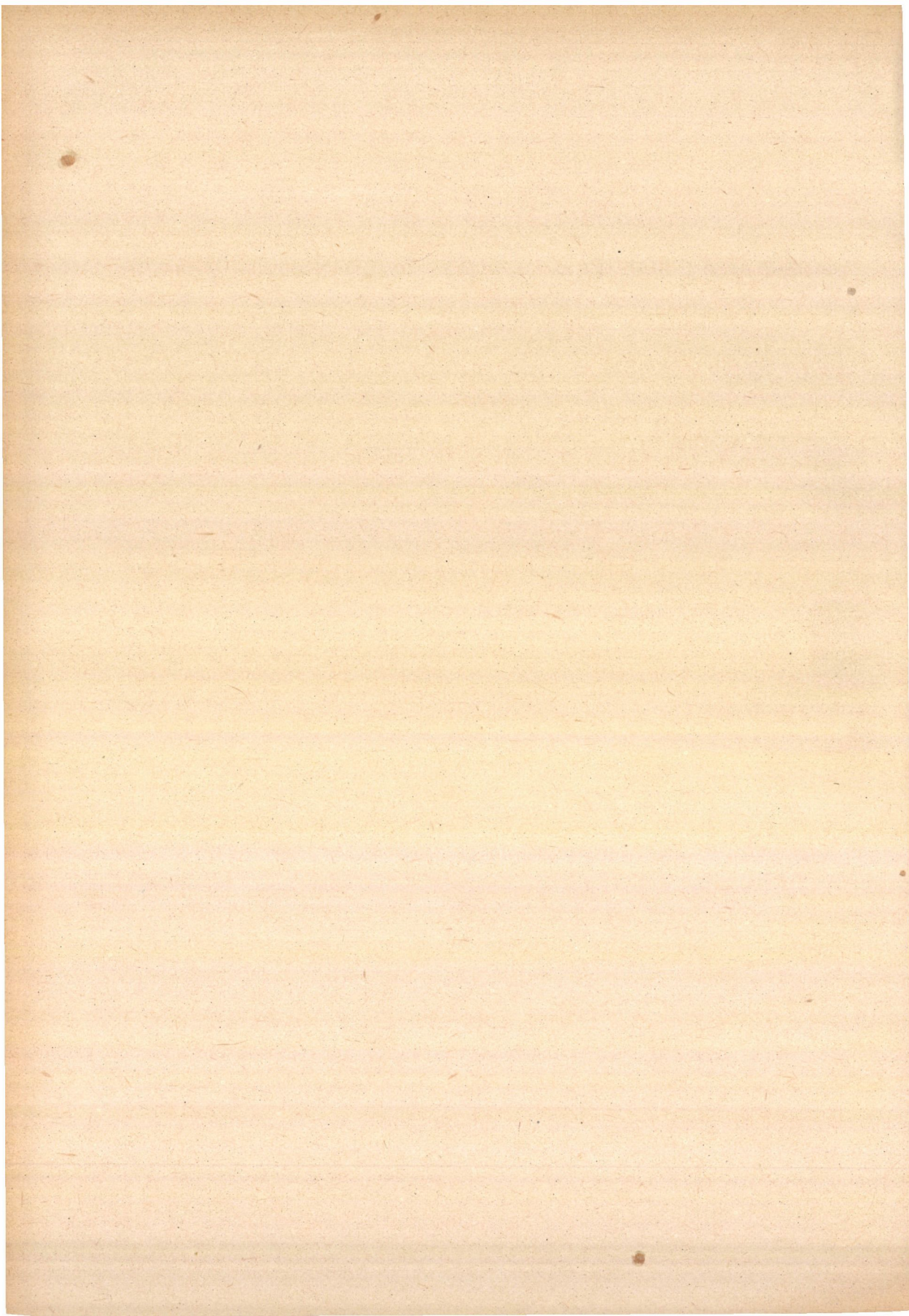
 ON A PROBABILISTIC PROBLEM ARISING IN SOME TRAFFIC  
INVESTIGATIONS

L. TAKÁCS

## Summary

Suppose that there are  $n$  locomotives arriving in and departing from a railway station during a day ( $T = 1$  day). Suppose that all the moments of arrivals and departures are mutually independent uniformly distributed random variables. We investigate the daily resting time of the locomotives when an optimal dispatching system has been established. The expectation of the resting time has already been determined by K. SARKADI [1]. The present paper deals with a new method which enables to calculate also the standard deviation and the higher moments besides the expectation. The expectation and the variance of the resting time  $\tau$  are given by (4) and (14), respectively.







# RÉGI ÉS ÚJ MÓDSZEREK LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSÁRA<sup>1)</sup>

EGERVÁRY JENŐ

## Bevezetés

Tudvalevő, hogy bár a lineáris egyenletrendszerek elmélete az algebra teljesen feltárt területének tekinthető, a különféle megoldási eljárások mégis mind a mai napig számos dolgot tárgyát képezik. Arra vonatkozóan, hogy a lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló — első pillanatban a matematikus számára unalmasnak és száraznak tűnő — módszerek érdekesek is lehetnek, elegendő G. E. FORSYTHENEK nemrég megjelent idevágó munkájára utalni [9]. E dolgozatban egyrészt rövid áttekintést kívánunk adni lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló klasszikus és modern módszerekről, másrészt részletesen ismertetni kívánunk egy általános — véges iterációs — megoldási eljárást, amely több ismert módszert is magában foglal, mint speciális esetet, ezenfelül általánosságánál fogva tetszőleges — tehát akár „téglalapalakú” együttható-matrixszal bíró — homogén vagy inhomogén egyenletrendszerek megoldására alkalmas, végül a benne előforduló műveletek egyszerűségénél és áttekinthetőségénél fogva a megoldás gépesítésének alapjául szolgálhat.

## 1. §. Az együtthatómatrix invertálása a karakterisztikus egyenlet alapján

Tekintsük az

$$(1) \quad Ax = b; \quad |A| \neq 0$$

alakban megadott, nem-szinguláris együtthatómatrixszal bíró inhomogén egyenletrendszert. Nyilvánvalóan ennek megoldását

$$x = A^{-1}b$$

<sup>1)</sup>Jelen dolgozat a szerzőnek egy idegen nyelven sajtó alatt álló dolgozatát, valamint a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetében 1956. január 18-án elhangzott előadását tartalmazza. A dolgozat anyagának sajtó alá rendezésénél jelentős segítséget nyújtott RÓZSA PÁL, melyért a szerző e helyen is köszönetet mond.



alakban nyerjük. A feladat tehát lényegében az  $\mathbf{A}^{-1}$  reciprokmatrix meghatározása.

Legkezdetlegesebb az az eljárás, amikor  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  komponenseit közvetlenül írjuk fel két determináns hányadosaként (*Cramer-szabály*). Noha ezzel a reguláris inhomogén egyenletrendszerek megoldása elvileg elintézettnak tekinthető, a determinánsok közvetlen kiszámítása gyakorlatilag kivihetetlennek bizonyul. Egy  $n$ -ismeretlenű egyenletrendszer megoldásához ugyanis  $(n+1)!$  szorzatot kellene kiszámítani, ami pl.  $n = 26$  esetén egy olyan elektronikus számológéppel, amely 2600 szorzást végez másodpercenként, kb.  $10^{17}$  évet venne igénybe [9].

A fentivel nagyságrendben körülbelül megegyező műveletet igényel az az ugyancsak ismert invertálási eljárás is, amikor a reciprokmatrixot a karakterisztikus egyenlet segítségével számítjuk ki. Ez a módszer *Cayley—Hamilton tételén* alapszik, amely szerint minden matrix kielégíti karakterisztikus egyenletét. Azaz, ha  $\varphi(\lambda) \equiv c_0 - c_1\lambda - \dots - c_n\lambda^n$  jelenti a karakterisztikus polinomot, ahol  $c_0 = |\mathbf{A}|$ , akkor  $\varphi(\mathbf{A}) = 0$  a következőképpen is írható:

$$c_0 \mathbf{E} = \mathbf{A} \{ c_1 \mathbf{E} + c_2 \mathbf{A} + \dots + c_n \mathbf{A}^{n-1} \}.$$

Innen kiolvasható, hogy a keresett reciprok:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{A}^{k-1}.$$

A fő nehézséget itt a  $c_k$  együtthatók — azaz  $2^n - 1$  számú főminor — kiszámítása okozza.

Újabban ez az eljárás gyakorlatibb formát nyert annak a — néhány szerző által követett<sup>2)</sup> — módszernek a segítségével, amely tulajdonképpen polinom helyettesítési értékének kiszámítására szolgáló jólismert úgynevezett Horner-féle módszernek az általánosítása. Ennek főelőnye, hogy determináns számítása nem szerepel benne, csak matrixok szorzása és „nyom”-ának (*Spur, след* — a fődiagonál-elemek összege) meghatározása. Ezek szerint, ha  $\sigma(\mathbf{A})$  jelenti az  $\mathbf{A}$  matrix nyomát, és képezzük az

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A} \left\{ \mathbf{A}_k - \frac{1}{k} \sigma(\mathbf{A}_k) \mathbf{E} \right\}; \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$$

iterációs sorozatot, akkor a keresett reciprokot

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{n}{\sigma(\mathbf{A}_n)} \left\{ \mathbf{A}_{n-1} - \frac{1}{n-1} \sigma(\mathbf{A}_{n-1}) \mathbf{E} \right\}$$

szolgáltatta. Nem nehéz meggyőződni arról, hogy ennél az invertálási eljárásnál csak kb.  $n^3$  számú skalárszorzatot kell kiszámítani, tehát ez a módszer a megoldás lényeges egyszerűsítését biztosítja.

<sup>2)</sup> Lásd pl. [8], [12].



## 2. §. Invertálás konvergens iterációval

Lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy másik irányát az iteratív megoldási módszerek képezik. Ezek kezdetben a skalár egyenleteknél már korábban kidolgozott iteratív eljárásokat vették alapul, s mivel a skalár egyenletek megoldására szolgáló iteratív módszerek szinte kivétel nélkül végtelen processzusok, egyes szerzők a lineáris egyenletrendszerek megoldására is kezdetben végtelen iteratív processzusokat konstruáltak.

Tekintsük először az  $x = \varphi(x)$  egyismeretlenű (skalár) egyenletet. Ennek megoldására az  $x_{k+1} = \varphi_k(x_k)$  általános iterációs „Ansatz” szolgál. Amennyiben olyan intervallumban, ahol van gyök, a  $\varphi_k(x)$  függvényt sorozat egyenletesen konvergál a  $\varphi(x)$  függvényhez,  $x_k$  pedig egy  $x$  értékhez, akkor  $x$  szükségképpen az egyenlet egyik gyökét szolgáltatja. Ha olyan intervallumban indulunk ki, ahol csak egy gyök van és  $\varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x)$ , ha  $x_k \rightarrow x$ , akkor ebben az intervallumban  $x$  az egyenlet egyetlen megoldását adja.

Ennek legegyszerűbb esetét mutatja az

$$x = mx + b$$

egyismeretlenű elsőfokú egyenlet,<sup>3)</sup> illetve annak megoldására szolgáló

$$x_{k+1} = mx_k + b$$

iteratív algoritmus, amely a fenti általános esetből a

$$\varphi_k(x) = mx + b$$

speciális választással keletkezik. Ez az iteráció egyrészt stacionárius, mert  $\varphi_k(x) = \varphi(x) = mx + b$  nem függ a  $k$  indextől, másrészt lineáris.

Az iteráció céljaira az olyan egyenlet bizonyul „jó”-nak, ahol az eredeti egyenletben  $x$  együtthatója 1-hez közel áll. Tegyük fel, hogy  $|m| < 1$ , ez esetben a létező egyetlen megoldás eleget tesz az

$$(2) \quad x = mx + b$$

egyenletnek. Az iterációs egyenlet

$$x_{k+1} = mx_k + b.$$

A (2) és (3) egyenletből

$$(3) \quad x_{k+1} - x = m(x_k - x) = \dots = m^k(x_1 - x).$$

Innen látható, hogy  $|m| < 1$  esetén a közelítő értékek olymódon konvergálnak a pontos értékhez, hogy a szukcesszív hibák csökkenő mértani sorozatot alkotnak. A konvergencia annál gyorsabb, minél kisebb az eredeti egyenlet együtthatójának az egységtől való eltérése. Az eljárás szemléltetésére szolgál az 1. ábra (lásd: a következő oldalon).

Az inhomogén lineáris egyenletrendszerek iteratív megoldása a fenti egyszerű eljárás közvetlen általánosításával történik. Az előzők szerint az (1) kiindulási egyenletet következőképpen alakítjuk át:

$$x = (E - A)x + b.$$

<sup>3)</sup> Bármely  $ax = b$  egyenlet felírható  $x = (1 - a)x + b$  alakban. Rövidség kedvéért a továbbiakban  $1 - a$  helyett  $m$ -et írunk.



Legyen  $\mathbf{E}$  „eltérése” az eredeti  $\mathbf{A}$  matrixtól  $\mathbf{M}$ , ekkor

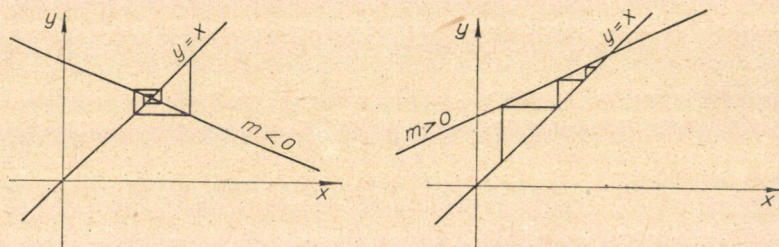
$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

stacionárius iteráció esetén a közelítő megoldási vektorok közötti összefüggés

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}.$$

A fentiek alapján

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) = \dots = \mathbf{M}^k(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}).$$



1. ábra

Ha azt kívánjuk, hogy az iterációval nyert közelítések bármely  $\mathbf{x}_1$  kiindulási vektor mellett az  $\mathbf{x}$  megoldáshoz tartsanak, akkor ehhez szükséges és elegendő, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}^k = 0$$

legyen. A gyakorlatban legtöbbszörre diagonalizálható matrixok szerepelnek, s ezekre nézve a fenti konvergenciakövetelmény megfogalmazható, mint az  $\mathbf{M}$  matrix sajátértékeire vonatkozó feltétel. Ha ugyanis  $\mathbf{M}$  sajátértékei  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , bal-, illetve jobboldali normált sajátvektorai  $\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \dots, \mathbf{v}_n^*$ , és  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ , akkor a matrix kanonikus alakja

$$\mathbf{M} = \sum_{p=1}^n \lambda_p \mathbf{u}_p \mathbf{v}_p^*,$$

amelyből hatványozással

$$\mathbf{M}^k = \sum_{p=1}^n \lambda_p^k \mathbf{u}_p \mathbf{v}_p^*$$

adódik. Tehát a  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}^k = 0$  feltétel teljesüléséhez elegendő, hogy az összes sajátértékek abszolút értékében 1-nél kisebbek legyenek. Ebből az is megállapítható, hogy a konvergencia annál gyorsabb, minél kisebbek abszolút értékben az egységmatrixtól való eltérést mérő  $\mathbf{M} = \mathbf{E} - \mathbf{A}$  matrix sajátértékei.

### 3. §. G. Schulz konvergencia-gyorsító eljárása

Amennyiben az abszolút értékben legnagyobb sajátérték 1-től keveset tér el, a most ismertetett iteráció konvergenciája nagyon meglassulhat. Az iteráció konvergenciájának meggyorsítására G. SCHULZ szerkesztett egy stacionárius,



de nem-lineáris iteratív eljárást [11]. Ennek az iterációnak az ismertetésénél célszerű a megoldandó egyenletet az

$$(\mathbf{E} - \mathbf{M})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

alakban írni. Ha  $\mathbf{M}$  a fenti feltételnek eleget tesz, akkor az  $(\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}$  reciprokmatrix az

$$(\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^2 + \dots$$

konvergens geometriai sorral fejezhető ki. G. SCHULZ gyorsító eljárásának mármint az a lényege, hogy  $k$  iterációs lépéssel a fenti mértani sornak  $2^k - 1$  tagú részletösszegét tudjuk előállítani:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{2^k-1} &= \sum_{v=0}^{2^k-1} \mathbf{M}^v = \sum_{v=0}^{2^k-1} \mathbf{M}^v (\mathbf{E} + \mathbf{M}^{2^k-1}) = \sum_{v=0}^{2^k-1} \mathbf{M}^v \{2\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{M}^{2^k-1})\} = \\ &= \sum_{v=0}^{2^k-1} \mathbf{M}^v \left\{ 2\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{M}) \sum_{v=0}^{2^k-1} \mathbf{M}^v \right\}. \end{aligned}$$

Mivel pedig  $\mathbf{E} - \mathbf{M} = \mathbf{A}$  tehát

$$\mathbf{S}_{2^k-1} = \mathbf{S}_{2^{k-1}-1} \{2\mathbf{E} - \mathbf{A} \mathbf{S}_{2^{k-1}-1}\}.$$

#### 4. §. A Gauss—Banachiewicz-féle eliminációs módszer, mint véges iteráció

A lineáris egyenletrendszerek megoldásának talán legismertebb és legáltalánosabban használt módszere az ismeretlenek, a Gauss-féle algoritmus segítségével történő eliminációja. Ennek matrixtechnikai eszközökkel való kivitele az együtthatómatrixnak a — T. BANACHIEWICZTŐL származó — úgynevezett trianguláris faktorizációjára vezet ([1], [6], [13]). Ennek az eljárásnak a lényege az, hogy ha az együtthatómatrixot egy alsó és egy felső háromszögmatrix szorzatára tudjuk bontani, akkor lehetővé válik az ismeretlenek közvetlen, rekurzív módon való kiszámítása. A módszer hátránya azonban, hogy — mivel a trianguláris faktorizációnak szükséges és elégséges feltétele az, hogy a sarokminorok 0-tól különbözők legyenek, — a számítás során indexcserék és egyéb korrekciók válhatnak szükségessé.

Lényegében a T. BANACHIEWICZ-féle trianguláris faktorizációnak az általánosítása tetszőleges együtthatómatrixszal bíró homogén és inhomogén egyenletrendszerekre az a — szerző által kidolgozott — algoritmus, amely diádok szukszesszív leválasztásával bontja fel az  $(r$ -edrangú) együtthatómatrixot egy nem-szinguláris kvadratikusan matrix és egy  $(r$ -edrangú) háromszögmatrix szorzatára ([5], [6]). A Gauss-féle eliminációs algoritmusnak így módon való kivitelét véges iterációs eljárásnak minősíthetjük, mivel a megoldást közvetlenül szolgáltató háromszögmatrixhoz véges számú iterációs lépéssel juthatunk el.

#### 5. §. A Stiefel—Hestenes-féle véges iteráció

A véges iteratív eljárások között kell megemlíteni a modern irodalomban sokat vitatott és feltétlenül érdeklődésre számot tartó konjugált irányok módszerét, melynek megalkotása E. STIEFEL és M. R. HESTENES nevéhez



fűződik [10]. A konjugált irányok módszere egy nem-lineáris stacionárius (véges) iterációs eljárás, melynek lényege olyan  $u_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) irányoknak a meghatározása, amelyek a (szimmetrikus és pozitív definit)  $A$  együtthatómatrixra ortogonálisak (konjugáltak), vagyis eleget tesznek az

$$u_i A u_j^* = 0 \quad (i \neq j)$$

összefüggéseknek. Ezek ismeretében ugyanis a keresett reciprokmatrix

$$A^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{u_k u_k^*}{u_k^* A u_k}$$

alakban adódik. További mellékfeltételek nélkül a konjugált irányok kiválasztása nagy fokban határozatlan feladat. E. STIEFEL és M. R. HESTENES ennek a módszernek a gyakorlati alkalmazhatóságát nagy mértékben fokozták az által, hogy a számításban az úgynevezett konjugált gradiens irányokat alkalmazták. Ezeknek az  $u_k$  irányoknak a meghatározása a

$$v_k = b - A x_k$$

lineárisan független vektoroknak az ( $A$  matrixra való) ortogonalizálásával történik. Itt az  $x_k$  vektorok az

$$x_{k+1} = x_k + \frac{u_k v_k^* u_k}{u_k^* A u_k} A u_k,$$

a  $v_k$  vektorok a

$$v_{k+1} = v_k - \frac{v_k^* u_k}{u_k^* A u_k} A u_k,$$

az  $u_k$  vektorok pedig az

$$(4) \quad u_{k+1} = v_{k+1} - \frac{v_{k+1}^* A u_k}{u_k^* A u_k} u_k$$

iterációval nyerhetők, ahol  $u_1 = v_1 = b - A x_1$ , és  $x_1$  tetszőleges kiindulási vektor.

A konjugált gradiensek módszerének az ötletessége abban rejlik, hogy  $v_{k+1}$  az  $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$  irányokra már automatikusan konjugált, és a (4) összefüggés biztosítja, hogy az  $u_k$  irányra is konjugált legyen.

A módszer geometriailag úgy interpretálható, hogy a (szimmetrikus és pozitív definit)  $A$  együtthatómatrix által meghatározott  $n$ -dimenziós hiperellipszoid-seregből kiválasztjuk azt, amelyik a tetszőlegesen választott (kiindulási)  $x_1$  ponton áthalad. Ezután az  $x_1$  pontból kiinduló felületi normálisnak meghatározzuk azt az  $x_2$  pontját, amelyben a hozzá konjugált  $(n-1)$ -dimenziós hipersíkot döfi. Ebben a hipersíkban fekvő  $(n-1)$ -dimenziós hiperellipszoid-seregből kiválasztva azt, amelyik áthalad az  $x_2$  ponton, az eljárást ugyanígy tovább folytatjuk. Véges (legfeljebb  $n$ ) számú lépésben eljutunk a hiperellipszoid-sereg középpontjába, amely az egyenlet megoldását reprezentálja.<sup>4)</sup>

<sup>4)</sup> Megjegyezzük, hogy kikerekítési hibák miatt előfordulhat, hogy  $n$  lépésben nem jutunk el a megoldáshoz, ekkor az iteráció tovább folytatható.



Megjegyezzük még, hogy amennyiben az  $u_k$  irányoknak éppen az

$$A u_k = \lambda_k u_k$$

egyenletekkel definiált sajátirányokat választjuk, akkor automatikusan kiadódik a reciprokmatrixnak — az  $A$  matrix kanonikus felbontásából triválisan következő —

$$A^{-1} = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1} u_k u_k^*$$

alakú előállítás.

Felvetődik mármost az a kérdés, nem volna-e lehetséges a különböző véges iterációs eljárásoknak egy olyan fokú egységesítése, amely magában foglalná speciális esetekként a fent említett megoldási módszereket, s ezenkívül tetszőleges homogén és inhomogén egyenletrendszerek megoldására egyaránt alkalmazható volna. Mint a következőkben látni fogjuk, ez az egységesítés a legáltalánosabb rangesökkentő művelet megállapításával és alkalmazásával válik lehetségessé.

## 6. §. Bázisfaktorokra bontás véges iterációval

A szerző több korábbi dolgozatában [2] — [6] rámutatott, hogy matrixok bázisfaktorokra való bontása lehetővé teszi a matrix-elméletben alkalmazott számos eljárás egységes és egyszerű alakban való tárgyalását. Egy  $n \times m$ -edrendű és  $r$ -edrangú matrix bázisfaktorokra való bontása

$$A = B \cdot C^* \\ n \times m \quad n \times r \quad r \times m$$

alakú. Itt  $B$   $r$  oszlopa  $A$  oszlopvektorainak,  $C^*$   $r$  sora pedig  $A$  sorvektorainak egy bázisa. Ez a felbontás, eltekintve a triviális

$$A = B T T^{-1} C^*$$

transzformációtól, egyértelműen meghatározott.

A szerző egyik korábbi dolgozatában [2] a bázisfaktorok tényleges kiszámítására az alábbi iteratív eljárást adta meg, amelynek lényege abban áll, hogy alkalmasan választott diádok (elsőrangú matrixok) ismételt leválasztása által az adott matrix rangja fokozatosan csökken:

$$A_{k+1} = A_k - \frac{A_k e_k e_k^* A_k}{e_k^* A_k e_k}$$

Itt  $e_k$  és  $e_k^*$  oszlop-, illetve sor-egységvektort jelentenek.

Dolgozatunk most következő részében a fenti eljárást is magában foglaló általános rangesökkentő eljárást fogunk kifejteni, és rámutatunk annak különböző alkalmazásaira a lineáris egyenletrendszerek megoldásánál.

A jól ismert

$$\varrho(A) - 1 \leq \varrho(A - bc^*) \leq \varrho(A) + 1$$



egyenlőtlenségek azt mutatják, hogy ha egy adott  $\mathbf{A}$  matrixból egy diádot levonunk, akkor  $\mathbf{A}$  rangja vagy eggyel nő, vagy csökken, vagy pedig változatlan marad.

Könnyen belátható, hogy ezzel az eljárással  $\mathbf{A}$  rangja csak akkor csökkenhet, ha a baloldali  $\mathbf{b}$  tényező  $\mathbf{A}$  matrix oszlopvektor-terében, a jobboldali  $\mathbf{c}^*$  tényező pedig  $\mathbf{A}$  sorvektor-terében van. Ekkor azonban  $\mathbf{b}$  felírható  $\mathbf{A}\mathbf{u}$  alakban,  $\mathbf{c}^*$  pedig  $\mathbf{v}^*\mathbf{A}$  alakban, tehát csak  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{A}\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{A}$  rangját kell vizsgálnunk, ahol  $\lambda$  skalár paraméter.

Legyen  $\mathbf{A} = \mathbf{BC}^*$  az  $\mathbf{A}$  matrix bázisfaktorokra bontott alakja. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{A}\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{A} = \mathbf{BC}^* - \lambda \mathbf{BC}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{BC}^* = \mathbf{B}(\mathbf{E}_r - \lambda \mathbf{C}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{B})\mathbf{C}^*,$$

$$r - 1 \leq \varrho(\mathbf{E}_r - \lambda \mathbf{C}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{B}).$$

Abból, hogy  $|\mathbf{E}_r - \lambda \mathbf{C}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{B}| = 1 - \lambda \mathbf{v}^*\mathbf{BC}^*\mathbf{u}$ , következik, hogy

$$\varrho(\mathbf{E}_r - \lambda \mathbf{C}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{B}) = r - 1$$

akkor és csak akkor áll fenn, ha  $\mathbf{v}^*\mathbf{BC}^*\mathbf{u} = \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{u} \neq 0$  és  $\lambda = (\mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{u})^{-1}$ .

Bebizonyítottuk tehát a következő lemmát:

**Lemma:** Ha valamely  $\mathbf{A}$  matrixból  $\mathbf{bc}^*$  diádot levonunk,  $\mathbf{A}$  rangja akkor és csak akkor csökken eggyel, ha a  $\mathbf{bc}^*$  diád

$$\mathbf{bc}^* = \frac{\mathbf{A}\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{A}}{\mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{u}}.$$

alakban írható fel, ahol  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  tetszőleges, csupán a  $\mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{u} \neq 0$  feltételt kielégítő vektorok.

Ha most egy tetszőleges  $r$ -edrangú  $\mathbf{A}$  matrixból indulunk ki, azt  $r$  lineárisan független diád összegére tudjuk bontani az alábbi iteratív eljárással:

$$(5) \quad \mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k - \frac{\mathbf{A}_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* \mathbf{A}_k}{\mathbf{v}_k^* \mathbf{A}_k \mathbf{u}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

ahol  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$  és  $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$  tetszőleges, csupán a

$$\mathbf{v}_k^* \mathbf{A}_k \mathbf{u}_k \neq 0$$

feltételt kielégítő vektorok. Ekkor  $\mathbf{A}$  diadikus felbontását

$$(6) \quad \mathbf{A} = \sum_{k=1}^r \frac{\mathbf{A}_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* \mathbf{A}_k}{\mathbf{v}_k^* \mathbf{A}_k \mathbf{u}_k}$$

szolgáltatja.

A (6) összefüggés magában foglalja a legtöbb ismert felbontást, mint speciális esetet. Ha  $\mathbf{A}$  kvadratikusan, szimmetrikus, nem-szinguláris és definit, akkor

I.  $\mathbf{u}_k = \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k^* = \mathbf{e}_k^*$  választása esetén  $\mathbf{A}$  trianguláris faktorizációjára jutunk (GAUSS—BANACHIEWICZ).



II. A  $v_k = u_k$ ,  $u_k^* A u_l = 0$ , ha  $k \neq l$  összefüggéseket kielégítő konjugált vektorok rendszerének a választása esetén az

$$A = \sum_{k=1}^r \frac{A u_k u_k^* A}{u_k^* A u_k},$$

felbontásra jutunk, amely az úgynevezett konjugált irányok módszerénél fordul elő (STIEFEL—HESTENES).

III. Az

$$A u_k = \lambda u_k; \quad u_k^* u_l = \delta_{kl}$$

összefüggésekkel definiált sajátvektorok választása az

$$A = \sum_{k=1}^r \lambda_k u_k u_k^*$$

(kanonikus) felbontást adja.

### 7. §. Általános lineáris egyenletrendszer megoldása fokozatos dimenziócsökkentéssel

A lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló legtöbb klasszikus és modern módszer az (1) reguláris, inhomogén egyenletrendszerrel foglalkozik. Az (1) egyenletrendszer megoldása azonban nyilvánvalóan megegyezik az

$$[A, -b] \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = 0, \quad |A| \neq 0$$

homogén egyenletrendszernek  $x_{n+1} = 1$ -hez tartozó partikuláris megoldásával. Tehát az

$$(7) \quad AX = 0, \quad \varrho(X) = n - \varrho(A)$$

általános homogén egyenlet megoldására szolgáló megfelelő eljárásnak magában kell foglalnia az inhomogén egyenlet megoldását is.

Felhasználva az  $A$  matrix bázisfaktorokra való bontását, a (7) egyenlet megoldására igen egyszerű és explicit eljárást adhatunk meg. Legyen  $A$  egy bázisfaktorokra bontott alakja  $A = BC^*$ . Ekkor a  $B$  matrixnak van baloldali inverze, következésképpen az

$$AX = 0$$

egyenlet megoldása egyértelmű a

$$C^*X = 0$$

egyenlet megoldásával.

Nyilvánvaló azonban, hogy

$$|C^*C| \neq 0, \quad C^*\{E - C(C^*C)^{-1}C^*\} = 0$$

$$\varrho\{E - C(C^*C)^{-1}C^*\} = n - \varrho(A),$$



innen következik, hogy

$$(8) \quad \mathbf{X} = \mathbf{E} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^* \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^*$$

a (7) egyenlet teljes megoldása.

A megoldásnak ez az alakja csupán elméleti szempontból jelentős, mivel meglehetősen bonyolult matrix-műveleteket tartalmaz.

Most megmutatjuk, hogy a (7) egyenlet egy, a (8) formulának megfelelő teljes megoldását megkaphatjuk az előzőekben kifejtett rangesőkkentő eljárás véges iterációjával.

Ebből a célból írjuk a (7) egyenletet

$$(9) \quad \mathbf{A} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^* \\ \mathbf{a}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^* \end{bmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad \text{vagy} \quad \begin{array}{l} \mathbf{a}_1^* \mathbf{X} = 0 \\ \mathbf{a}_2^* \mathbf{X} = 0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^* \mathbf{X} = 0 \end{array}$$

alakban.

Ezen egyenletek mindegyikét rangesőkkentő művelet segítségével fogjuk kielégíteni. Ez a módszer azokat az egyenleteket, amelyek a megelőzőknek következményei, automatikusan eliminálja.

Az (5) összefüggésnek megfelelően (kiindulva az egységmatrixból, vagyis  $\mathbf{A} = \mathbf{E}$  esetén) kiszámítjuk az

$$(10) \quad \mathbf{X}_1 = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1^*}{\mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1}$$

$(n-1)$ -edrangú szimmetrikus projektort.  $\mathbf{X}_1$  kielégíti (9) első egyenletét, amint arról közvetlenül meggyőződhetünk:

$$\mathbf{a}_1^* \mathbf{X}_1 = \mathbf{a}_1^* - \frac{\mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1^*}{\mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1}.$$

Most két esetet kell megkülönböztetnünk:

1. Ha  $\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 = 0$  akkor  $\mathbf{a}_2^* = \text{konst.} \cdot \mathbf{a}_1^*$  (mivel  $\mathbf{X}_1$   $(n-1)$ -edrangú), azaz (9) második egyenlete az elsőnek következménye, ennél fogva elhagyható.

2. Ha  $\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \neq 0$  akkor mivel  $\mathbf{X}_1$  pozitív szemidefinit,  $\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_2 \neq 0$ , s így a következő iterációs lépés

$$(11) \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 - \frac{\mathbf{X}_1 \mathbf{a}_2^* \mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1}{\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_2}.$$

A (11) összefüggésből látható, hogy  $\mathbf{X}_2$  kielégíti az  $\mathbf{a}_1^* \mathbf{X}_2 = 0$  egyenletet. Ezenkívül  $\mathbf{X}_2$  kielégíti (9) második egyenletét is, ami az

$$\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_2 = \mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 - \mathbf{a}_2^* \frac{\mathbf{X}_1 \mathbf{a}_2^* \mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1}{\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_2}.$$

összefüggésből közvetlenül látható. Megjegyezzük, hogy  $\mathbf{X}_2^2 = \mathbf{X}_2$ , tehát  $\mathbf{X}_2$   $(n-2)$ -edrangú szimmetrikus projektor.



Tegyük fel, hogy  $\mathbf{X}_k$  kielégíti az

$$\mathbf{a}_1^* \mathbf{X}_k = \mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_k = \dots = \mathbf{a}_{\nu_k-1}^* \mathbf{X}_k = 0$$

egyenleteket és  $\mathbf{a}_{\nu_k}^* \mathbf{X}_k \neq 0$ , továbbá

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k^*, \quad \mathbf{X}_k^2 = \mathbf{X}_k; \quad \varrho(\mathbf{X}_k) = n - k \quad (k = 1, 2, \dots, \nu_k).$$

Ekkor az általános iterációs lépés

$$(12) \quad \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \frac{\mathbf{X}_k \mathbf{a}_{\nu_k} \mathbf{a}_{\nu_k}^* \mathbf{X}_k}{\mathbf{a}_{\nu_k}^* \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k \mathbf{a}_{\nu_k}}$$

és  $\mathbf{X}_{k+1}$  kielégíti az

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_{k+1}^*; \quad \mathbf{X}_{k+1}^2 = \mathbf{X}_{k+1}, \quad \varrho(\mathbf{X}_{k+1}) = n - k - 1$$

összefüggéseket.

Ezzel tehát — figyelmen kívül hagyva azokat az egyenleteket, amelyek az előzőknek következményei — végül eljutunk ahhoz, az  $(n - r)$ -edrangú  $\mathbf{X}_r$  szimmetrikus projektorhoz, amely valamennyi egyenletet kielégíti, azaz

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_r = 0, \quad \varrho(\mathbf{X}_r) = n - r.$$

E módszer geometriai interpretációja a következő. Az  $\mathbf{A} \mathbf{X} = 0$  egyenlet megoldását megtalálni annyit jelent, mint meghatározni  $\mathbf{A}$  sorvektor-terének ortogonális komplementumát. Az első lépés (10) a teljes  $n$ -dimenziós vektorteret arra az  $(n - 1)$ -dimenziós altérre redukálja, amely ortogonális az  $\mathbf{a}_1$  vektorra. Ha  $\mathbf{a}_2^*$  nem párhuzamos  $\mathbf{a}_1^*$ -gyel, akkor a második iterációs lépés eredményeként olyan  $(n - 2)$ -dimenziós altérre jutunk, amely ortogonális mind az  $\mathbf{a}_1^*$ , mind az  $\mathbf{a}_2^*$  vektorra. Végül  $r$  iterációs lépés után eljutunk  $\mathbf{A}$  sorvektor-terének ortogonális komplementumához.

Innen a (3) egyenlet általános megoldását közvetlenül

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_r \mathbf{t}$$

alakban nyerjük, ahol  $\mathbf{t}$  tetszőleges paraméter-vektor.

Érvényes tehát a következő

**Tétel:** Az

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^* \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2^* \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^* \mathbf{x} \end{bmatrix} = 0, \quad \varrho(\mathbf{A}) = r$$

homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldását

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_r \mathbf{t}$$



szolgáltatta, ahol  $\mathbf{t}$  tetszőleges,  $\mathbf{A}_r$  pedig egy  $(n-r)$ -edrangú szimmetrikus projektor, amelyet az

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \frac{\mathbf{X}_k \mathbf{a}_{v_k} \mathbf{a}_{v_k}^* \mathbf{X}_k}{\mathbf{a}_{v_k}^* \mathbf{X}_k \mathbf{a}_{v_k}}$$

iterációval nyerünk. Azok az  $\mathbf{a}_\mu^* \mathbf{X} = 0$  egyenletek, amelyekre  $\mu \neq v_k$ , az előző egyenletek következményei és automatikusan eliminálódnak.

Abból a célból, hogy a (7) egyenlet lineárisan független megoldásainak egy teljes rendszerét megkapjuk, meg kell határozni az  $\mathbf{X}_r$  matrix

$$\mathbf{X}_r = \mathbf{Y} \mathbf{Y}^*; \quad \mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-r}]$$

bázisfaktorokra bontott alakját (ez legcélszerűbben a [2]-ben közölt eljárás segítségével valósítható meg). Ekkor, mivel  $\mathbf{A}$  szimmetrikus projektor, az  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{n-r}$  vektorok automatikusan eleget tesznek az  $\mathbf{y}_i^* \mathbf{y}_j = \delta_{ij}$  összefüggésnek, tehát a (7) egyenlet lineárisan független megoldásainak egy ortonormált rendszerét alkotják.

Abból a célból, hogy az (1) reguláris inhomogén egyenletet megoldjuk, az

$$[\mathbf{A}, -\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}_{n+1} \end{bmatrix} = 0$$

homogén egyenletnek azt a partikuláris megoldását kell megtalálnunk, amely eleget tesz az  $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{1}$  feltételnek. Ez esetben azonban  $\varrho[\mathbf{A}, -\mathbf{b}] = \varrho[\mathbf{A}] = = n$ ,  $\varrho(\mathbf{Y}) = 1$ , tehát  $\mathbf{Y}_n$

$$\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n+1} \end{bmatrix} [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{n+1}]$$

alakban írható, ahol  $\mathbf{y}_{n+1} \neq 0$  és ezzel (1) megoldására

$$x_1 = \frac{y_1}{y_{n+1}}; \quad x_2 = \frac{y_2}{y_{n+1}}; \quad \dots, \quad x_n = \frac{y_n}{y_{n+1}}$$

adódik.

Ha az általunk bevezetett módszert más véges iterációs eljárásokkal hasonlítjuk össze, azt látjuk, hogy a szükséges műveletek száma ugyanolyan nagyságrendű, mint akár a Gauss-féle kiküszöböléses módszernél, akár a konjugált irányok módszerénél, továbbá úgy véljük, hogy ezen módszer teljes általánossága és a műveletek egyszerűsége miatt (csupán vektorok skaláris és diadikus szorzatát kell számítani) a nevezettek mellett is figyelemet érdemel.

Végül megjegyezzük, hogy az (5) összefüggésben, a diádokban szereplő oszlopvektorok, módszerünk egyéb alkalmazásainál, tetszőlegesen választhatók. Ez az eljárás pl. eredményesen felhasználható homogén lineáris diofantikus egyenletrendszerek iteratív megoldása során [7].



## 8. §. Példa

Oldjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert az általános rangsökkentő eljárással:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ -6x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Ugyanez matrixegyenletként felírva:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tekintettel arra, hogy megoldásként az ismeretlenek értékeire csupán viszonyyszámokat kapunk, a számítás során fellépő törteket elkerülhetjük azáltal, hogy a (10), (11) és általában a (12) összefüggések jobboldalát a nevezővel végigszorozzuk. Ezzel tehát

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1 \mathbf{E} - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^* = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = (\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_2) \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 = 8 \cdot \begin{bmatrix} 16 & 4 & -4 & 24 \\ 4 & 28 & 26 & 6 \\ -4 & 26 & 28 & -6 \\ 24 & 6 & -6 & 36 \end{bmatrix}.$$

Mivel  $\mathbf{a}_3^* \mathbf{X}_2 = 0$  és  $\mathbf{a}_4^* \mathbf{X}_2 = 0$ , a megoldást  $\mathbf{x} = \mathbf{X} \mathbf{t}$  alakban kapjuk, ahol  $\mathbf{t}$  tetszőleges vektor, és az  $\mathbf{X}$  mátrixot  $\mathbf{X}_2$  diadikus felbontásának segítségével nyerjük:

$$\frac{1}{8} \mathbf{X}_2 = \mathbf{X} \mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4t_1 \\ x_2 &= t_1 + t_2 \\ x_3 &= -t_1 + t_2 \\ x_4 &= 6t_1 \end{aligned}$$

ahol  $t_1$  és  $t_2$  tetszőleges paraméterek.



## IRODALOM

- [1] T. BANACHIEWICZ : „Méthode de résolution numérique des équations linéaires du calcul des déterminants et des inverses, et de réduction des formes quadratiques.” *Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A., Sciences Math.* (1938) 393—404.
- [2] E. EGERVÁRY : „On a property of the projector matrices and its application to the canonical reduction of matrix functions.” *Acta Scientiarum Mathematicarum* (Szeged) **15** (1953) 1—6.
- [3] EGERVÁRY J. : „Matrix-függvények kanonikus előállításáról és azok néhány alkalmazásáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **3** (1953) 417—458.
- [4] E. EGERVÁRY : „On a lemma of Stieltjes on matrices.” *Acta Scientiarum Mathematicarum* (Szeged) **15** (1954) 99—103.
- [5] EGERVÁRY J. : „Matrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldására.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 11—32.
- [6] E. EGERVÁRY : „Über die Faktorisierung von Matrizen und ihre Anwendung auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen.” *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **35** (1955) 111—118.
- [7] E. EGERVÁRY : „Auflösung homogenen linearen diophantischen Gleichungssysteme mit Hilfe von Projektormatrizen.” *Publicationes Mathematicae* (sajtó alatt).
- [8] Д. К. ФАДДЕЕВ—И. С. СОМИНСКИЙ : *Сборник задач высшей алгебры*. Гостехиздат, Москва, 1949. (2-е изд.)
- [9] G. E. FORSYTHE : „Solving linear algebraic equations can be interesting.” *Bulletin of the American Mathematical Society* **59** (1953) 299—329.
- [10] M. R. HESTENES—E. STIEFEL : „Method of conjugate gradients for solving linear systems.” *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **49** (1952) 409—436.
- [11] G. SCHULZ : „Iterative Berechnung der reziproken Matrix.” *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **13** (1933) 57—59.
- [12] R. SOURIAU : „Une méthode pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices.” *Comptes Rendus de l'Académie Sci. (Paris)* **227** (1948) 1010—1011.
- [13] R. ZURMÜHL : „Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme.” *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **29** (1949) 76—84.

(Beérkezett : 1956. II. 13.)

# СТАРЫЕ И НОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. ЭГЕРВАРИ

## Резюме

Первая часть работы содержит короткое перечисление общеизвестных старых и новых методов решения систем линейных уравнений : методы, связанные с характеристическим уравнением матрицы, сходящиеся итерационные процессы, решение *конечной итерацией* (ГАУСС—БАНАХИЕВИЧ, ШТИФЕЛ—ХЕСТЕНЕС). Во второй части работы автор даёт общий метод понижения ранга, частным случаем которого являются большинство методов конечной итерации. Этот метод понижения ранга основывается на следующей теореме : Если из какой нибудь матрицы **A** вычесть *diadu* **bc\*** её ранг понизится на единицу в том и только в том случае, если **bc\*** может быть записана в виде

$$bc^* = \frac{Auv^*A}{v^*Au}$$



где  $u$  и  $v$  любые векторы, удовлетворяющие условию  $v^*Au \neq 0$ . С помощью этой теоремы автор разрабатывает простой новый метод решения наиболее общих систем линейных уравнений.

Этот метод непосредственно даёт ортогональное дополнение пространства, образованного стоящими в отдельных строках матрицы векторами.

## OLD AND NEW METHODS FOR SOLVING LINEAR EQUATIONS

J. EGERVÁRY

### Summary

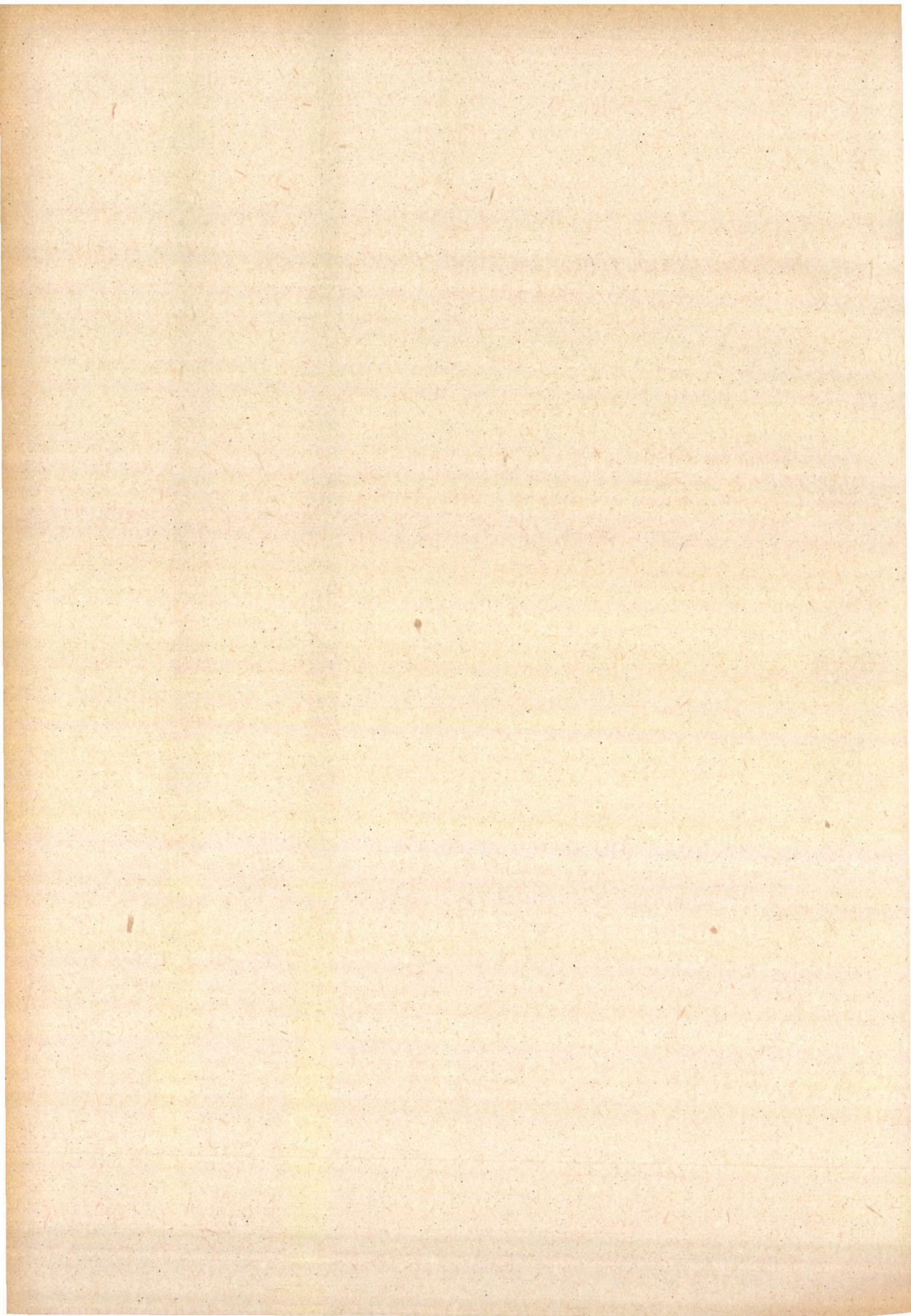
The first part of the paper contains a short survey of generally known old and new methods for solving linear equations : methods related to the characteristic equation of the matrix, convergent iterative processes, finite iterations (GAUSS—BANACHIEWICZ, STIEFEL—HESTENES). In the second part of the paper the author develops a general rank-diminishing procedure, which contains most of the finite iterations, as particular cases. This rank-diminishing is founded on the following theorem : By the subtraction of a dyade  $bc^*$  from a given matrix  $A$ , the rank of  $A$  decreases exactly by one if and only if  $bc^*$  has the form

$$bc^* = \frac{Auv^*A}{v^*Au},$$

where  $u$  and  $v$  are arbitrary vectors subject only to the condition  $v^*Au \neq 0$ .

By means of this theorem the author indicates a simple and new method for solving the most general system of linear equations. This method furnishes directly the orthogonal complement of the row-space of the given matrix.







# EGERVÁRY J. HIPERMATRIX-ALGORITMUSÁNAK ALKALMAZÁSA TÖBBFÁZISÚ TRANSZFORMÁTOROK MATEMATIKAI VIZSGÁLATÁRA

LOVASS-NAGY VIKTOR

## Bevezetés

Jelen dolgozat célja, hogy a matrix-elmélet néhány legújabb eredményének [1] felhasználásával keresse az egy- és többfázisú transzformátorokban fellépő stacionárius és tranziens villamos folyamatok matematikai leírására szolgáló differenciálegyenletrendszerek egységes és áttekinthető megoldását.

A tárgyalás általánossága végett feltételezzük, hogy a vizsgálandó transzformátor  $n$  fázisú, azaz  $2n$  számú, adott ohmikus ellenállással és öninduktivitással bíró, egymással induktíve csatolt tekercsből álló rendszer. Feltételezzük továbbá, hogy úgy a transzformátor „primer oldal”-át alkotó  $n$  számú tekercs, mint a transzformátor „szekunder oldal”-ának tekintett  $n$  darab tekercs úgynevezett „csillag-kapcsolás”-ban vannak összekötve.<sup>1)</sup> Vezessük be a következő jelöléseket:

$r_{pk} \dots$  transzformátor primer oldalán levő  $k$ -edik tekercs ohmikus ellenállása,

$r_{sk} \dots$  a transzformátor szekunder oldalán levő  $k$ -edik tekercs ohmikus ellenállása,

$l_{pkk} \dots$  a transzformátor primer oldalán levő  $k$ -edik tekercs öninduktivitása,

$l_{skk} \dots$  a transzformátor szekunder oldalán levő  $k$ -edik tekercs öninduktivitása;

$l_{pkl} \dots$  a transzformátor primer oldalán levő  $k$ -edik és  $l$ -edik tekercsek közötti kölcsönös induktivitás,

$l_{skl} \dots$  a transzformátor szekunder oldalán levő  $k$ -edik és  $l$ -edik tekercsek közötti kölcsönös induktivitás,

<sup>1)</sup> A feltételezett „csillag-kapcsolás” esetére levezetett eredményekből az egyéb kapcsolás-típus esetére érvényes összefüggések már egyszerű számítás segítségével nyerhetők.



$m_{kl} \dots$  a transzformátor primer oldalán levő  $k$ -edik tekercs és a szekunder oldalon levő  $l$ -edik tekercs közötti kölcsönös induktivitás.

Jelöljük továbbá a primer oldal  $k$ -edik tekercsében folyó áramerősséget  $i_{pk}$ -val, a tekercs feszültségét pedig  $u_{pk}$ -val; hasonlóképpen jelöljük a szekunder oldal  $k$ -edik tekercsében folyó áramerősséget  $i_{sk}$ -val, a tekercs feszültségét pedig  $u_{sk}$ -val.

A transzformátor matrix-alakban felírt differenciálegyenletében szereplő matrixok a következők:

a) *Oszlop-matrixok:*

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_{p1}(t) \\ \vdots \\ i_{pn}(t) \\ i_{s1}(t) \\ \vdots \\ i_{sn}(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{p1}(t) \\ \vdots \\ u_{pn}(t) \\ u_{s1}(t) \\ \vdots \\ u_{sn}(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_0 = \begin{bmatrix} i_{p1}(0) \\ \vdots \\ i_{pn}(0) \\ i_{s1}(0) \\ \vdots \\ i_{sn}(0) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} u_{p1}(0) \\ \vdots \\ u_{pn}(0) \\ u_{s1}(0) \\ \vdots \\ u_{sn}(0) \end{bmatrix}.$$

b) *Kvadratikus matrixok:*

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{p1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_{p2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{pn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{s1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & r_{s2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & r_{sn} \end{bmatrix} = \langle r_{p1}, r_{p2}, \dots, r_{pn}, r_{s1}, r_{s2}, \dots, r_{sn} \rangle; \text{ (diagonál-matrix);}$$



$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{p11} & l_{p12} & \dots & l_{p1n} & m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ l_{p21} & l_{p22} & \dots & l_{p2n} & m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{pn1} & l_{pn2} & \dots & l_{pnn} & m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \\ m_{11} & m_{21} & \dots & m_{n1} & l_{s11} & l_{s12} & \dots & l_{s1n} \\ m_{12} & m_{22} & \dots & m_{n2} & l_{s21} & l_{s22} & \dots & l_{s2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{1n} & m_{2n} & \dots & m_{nn} & l_{sn1} & l_{sn2} & \dots & l_{snn} \end{bmatrix}$$

$$(\text{itt } l_{pjk} = l_{pkj}, \quad l_{sjk} = l_{skj}, \quad m_{jk} = m_{kj}.)$$

Kirchhoff „második” törvényéből [2] a primer oldal  $k$ -adik tekercsére, illetve a szekunder oldal  $k$ -adik tekercsére a következő összefüggések írhatók fel:

$$(1) \quad r_{pk} i_{pk} + \sum_{v=1}^n l_{pkv} \frac{d}{dt} i_{pv} + \sum_{v=1}^n m_{kv} \frac{d}{dt} i_{sv} = u_{pk},$$

illetve

$$(2) \quad r_{sk} i_{sk} + \sum_{v=1}^n l_{skv} \frac{d}{dt} i_{sv} + \sum_{v=1}^n m_{kv} \frac{d}{dt} i_{pv} = u_{sk}.$$

Az (1), illetve (2) egyenleteket a primer és szekunder oldal valamennyi tekercsére képezve, egy állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszert nyerünk, mely  $2n$  darab egyenletből áll; e differenciálegyenlet-rendszer a fenti jelölések felhasználásával a következő matrix-differenciálegyenletté foglalható össze:

$$(3) \quad \mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i} + \mathbf{R} \mathbf{i} = \mathbf{u}.$$

A továbbiak során feladatunkat a (3) lineáris, állandó együtthatós, inhomogén matrix-differenciálegyenletnek az  $\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0$  kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldásának meghatározására képezi. E probléma megoldása tetszésszerűen elemekkel bíró ellenállás-, illetve induktivitás-matrix esetén is előállítható [3], különösen érdekes alakban állítható azonban elő a megoldás azon esetben, midőn a transzformátor felépítése olyan, hogy egyrészt a primer oldalon elhelyezett tekercsek anyagi és geometriai adatai azonosak, másrészt a szekunder oldal tekercsei is egyformák, továbbá a teker-



csek elhelyezésében ciklikus szimmetria mutatkozik.<sup>2)</sup> Ez esetben ugyanis az ellenállás-, illetve az induktivitás-matrix a következő alakot nyeri (hiper-matrix-alakban írva):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_p \mathbf{E} & 0 \\ 0 & r_s \mathbf{E} \end{bmatrix}.$$

(itt  $\mathbf{E}$  az  $n$ -edrendű egységmatrix); illetve

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_p & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L}_s \end{bmatrix},$$

ahol  $\mathbf{L}_p$ ,  $\mathbf{L}_s$  és  $\mathbf{M}$  mind  $n$ -edrendű ciklikus matrixok, tehát a következő alakban írhatók (lásd: [4], 451. oldal):

$$\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(l_{p0}, l_{p1}, \dots, l_{p(n-1)}); \quad l_{pv} = l_{p(n-v)}$$

$$\mathbf{L}_s = \mathbf{L}_s(l_{s0}, l_{s1}, \dots, l_{s(n-1)}); \quad l_{sv} = l_{s(n-v)}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(m_0, m_1, \dots, m_{n-1}); \quad m_v = m_{n-v}.$$

Az alábbi tárgyalás során feltesszük, hogy a vizsgált „ $n$ -fázisú” transzformátor ilyen ciklikus szimmetriával bír. Feltesszük továbbá, hogy valamennyi tekercs feszültsége az időnek függvénye, éspedig ugyanazon periódussal bír, tehát  $\mathbf{u} = e^{j\omega t} \mathbf{u}_0$  alakban írható.<sup>3)</sup>

### 1. §. A matrix-differenciálegyenlet megoldása

A (3) egyenlet — amelynek  $\mathbf{L}$  és  $\mathbf{R}$  együttható-matrixai, a fentiek értelmében, ciklikus blokkokból álló hipermatrixok, és  $\mathbf{u} = e^{j\omega t} \mathbf{u}_0$ , — célszerű a következőképpen átalakítani:

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i} + \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i} = e^{j\omega t} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{u}_0.$$

Legyen  $\mathbf{T}$  az a matrix, amelynek segítségével  $\sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}}$  diagonál-alakra hozható (lásd: [1], 212. oldal), azaz amely kielégíti az alábbi egyenleteket:

$$\mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}}) \mathbf{T}^* = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \mathbf{A}; \quad \mathbf{T} \mathbf{T}^* = \mathbf{E}.$$

(Itt  $\mathbf{T}^*$ -on a  $\mathbf{T}$  matrix konjugált transzportáltja értendő.)

<sup>2)</sup> A ciklikus szimmetria feltételezése kétfázisú transzformátor esetén minden további nélkül jogosult; háromfázisú transzformátor esetén pedig általában megengedhető (százalék nagyságrendű) elhanyagolás árán akkor is feltételezhető, ha a való-ságban a transzformátor kialakítása nem bír ciklikus szimmetriával.

<sup>3)</sup> Az  $\mathbf{u}_0$  oszlop-matrix komponensei komplex számok is lehetnek. A levezetendő eredmény valós része fogja szolgáltatni az adott elektrotechnikai feladat megoldását.



A  $\mathbf{T}$  matrix segítségével a (4) egyenlet a következőképpen írható át:

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i} + \mathbf{A} \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i} = e^{j\omega t} \mathbf{A} \mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{u}_0.$$

Célszerű továbbá az  $\mathbf{i}(0) = \mathbf{i}_0$  kezdeti feltételt  $\mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i}(0) = \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i}_0$  alakban írni. Bevezetve az  $\mathbf{x} = \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i}$  és a  $\mathbf{g} = e^{j\omega t} \mathbf{A} \mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{u}_0$  rövid jelöléseket, az (5) differenciálegyenletet és a hozzátartozandó kezdeti feltételt így is írhatjuk:

$$(6) \quad \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{g}; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Nyilván a (6) inhomogén differenciálegyenletet és az  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  inhomogén kezdeti feltételt egyidejűleg kielégítő  $\mathbf{x}(t)$  függvény  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$  összegként állítható elő, ahol  $\mathbf{x}_1$  kielégíti az  $\dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A} \mathbf{x}_1 = \mathbf{g}$  inhomogén differenciálegyenletet és az  $\mathbf{x}_1(0) = 0$  homogén kezdeti feltételt, továbbá  $\mathbf{x}_2$  kielégíti az  $\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{A} \mathbf{x}_2 = 0$  homogén differenciálegyenletet és az  $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_0$  inhomogén kezdeti feltételt.

Az irodalomból ismeretes (lásd: [4], 212. oldal), hogy

$$\mathbf{x}_1 = \int_0^t e^{-\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{g}(\tau) d\tau$$

és

$$\mathbf{x}_2 = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0.$$

Tehát (bevezetve a  $\mathbf{g} = e^{j\omega t} \mathbf{g}_0$  jelölést) írhatjuk, hogy

$$(7) \quad \mathbf{x} = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \left[ \int_0^t e^{(\mathbf{A} + j\omega \mathbf{E})\tau} d\tau \right] e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{g}_0,$$

azaz, az integrálás elvégzése és kis átalakítása után

$$(8) \quad \mathbf{x} = e^{j\omega t} (j\omega \mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{g}_0 + e^{-\mathbf{A}t} [\mathbf{x}_0 - (j\omega \mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{g}_0].$$

Minthogy  $\mathbf{x} = \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i}$ , tehát  $\mathbf{i} = (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* \mathbf{x}$ , azaz:

$$(9) \quad \mathbf{i} = (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{i}_0 - \\ - (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* [\mathbf{A}(j\omega \mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{E} \cdot e^{j\omega t} - e^{-\mathbf{A}t})] \mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{u}_0.$$

## 2. §. A levezetett megoldás alkalmazása az egyfázisú transzformátorra

Annak érdekében, hogy a fentiekben levezetett (9) összefüggésnek az  $n$ -fázisú transzformátorra való alkalmazása során nyert eredmény értékeléséhez összehasonlítási anyaggal rendelkezünk, mindenekelőtt bemutatjuk a (9) képletnek az egyfázisú transzformátorra való alkalmazását.



Az egyfázisú transzformátor esetében nyilván :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_p & m \\ m & l_s \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix}.$$

Ez esetben tehát

$$\mathbf{L}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{L}}{|\mathbf{L}|} = \frac{1}{l_p l_s - m^2} \begin{bmatrix} l_s & -m \\ -m & l_p \end{bmatrix},$$

továbbá

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} &= \frac{1}{l_p l_s - m^2} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_s & -m \\ -m & l_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{l_p l_s - m^2} \begin{bmatrix} r_p l_s & -\sqrt{r_p r_s} m \\ -\sqrt{r_p r_s} m & r_s l_p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az  $\sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}}$  matrix sajátértékei :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{(l_p l_s - m^2)} \frac{r_p l_s + r_s l_p \mp \sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4 r_p r_s m^2}}{2},$$

az  $\sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}}$  matrix sajátvektorainak komponensei pedig például a következőképpen írhatók:<sup>4)</sup>

$$\gamma = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \sigma = \sin \frac{\varphi}{2},$$

ahol

$$\text{tg } \varphi = \frac{-2 m \sqrt{r_p r_s}}{r_p l_s - r_s l_p}.$$

Az  $\sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}}$  matrix sajátértékeinek és sajátvektorainak ismeretében írhatjuk, hogy

$$\sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix}.$$

<sup>4)</sup> Az itt felhasznált összefüggések helyessége a

$$\begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix}$$

szorzat kiszámítása és  $\lambda_1, \lambda_2, \gamma, \sigma$  értékeinek behelyettesítése által egyszerűen igazolható.



Az egyfázisú transzformátor esetében tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

és

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix}.$$

Mint hogy az  $\mathbf{A}$  matrixnak bármely polinomja vagy hatványsorba fejthető függvénye a következő alakban írható:

$$f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix},$$

tehát

$$\begin{aligned} & (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* f(\mathbf{A}) \mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}}) = \\ & = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \gamma^2 f(\lambda_1) + \sigma^2 f(\lambda_2) & -\sqrt{\frac{r_s}{r_p}} \gamma \sigma [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \\ -\sqrt{\frac{r_p}{r_s}} \gamma \sigma [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] & \sigma^2 f(\lambda_1) + \gamma^2 f(\lambda_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ez az összefüggés még a következőképpen is írható: minthogy

$$\begin{aligned} \gamma^2 f(\lambda_1) + \sigma^2 f(\lambda_2) &= \frac{1 + \cos \varphi}{2} f(\lambda_1) + \frac{1 - \cos \varphi}{2} f(\lambda_2) = \\ &= \frac{1}{2} [f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] + \frac{\cos \varphi}{2} [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)], \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} \sigma^2 f(\lambda_1) + \gamma^2 f(\lambda_2) &= \frac{1 - \cos \varphi}{2} f(\lambda_1) + \frac{1 + \cos \varphi}{2} f(\lambda_2) = \\ &= \frac{1}{2} [f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] - \frac{\cos \varphi}{2} [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)]; \end{aligned}$$

és  $\gamma \sigma = \frac{1}{2} \sin \varphi$ , tehát



$$\begin{aligned}
(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T} f(\mathbf{A}) \mathbf{T}^* (\sqrt{\mathbf{R}}) &= \frac{1}{2} [f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \\
&- \frac{1}{2} [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sqrt{\frac{r_s}{r_p}} \sin \varphi \\ \sqrt{\frac{r_p}{r_s}} \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ [f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \right. \\
&- [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \frac{1}{\sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4 r_p r_s m^2}} \begin{bmatrix} r_p l_s - r_s l_p & -2 r_s m \\ -2 r_p m & r_s l_p - r_p l_s \end{bmatrix} \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned}
(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T} f(\mathbf{A}) \mathbf{T}^* (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} &= \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\sigma \\ \sigma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} [\gamma^2 (\lambda_1) + \sigma^2 f(\lambda_2)] & -\frac{1}{\sqrt{r_p r_s}} \gamma \sigma [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \\ -\frac{1}{\sqrt{r_p r_s}} \gamma \sigma [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] & \frac{1}{r_s} [\sigma^2 f(\lambda_1) + \gamma^2 f(\lambda_2)] \end{bmatrix};
\end{aligned}$$

amely összefüggés a  $\gamma$ ,  $\sigma$  és  $\varphi$  között fennálló, fentebb felsorolt identitások figyelembevételével a következőképpen alakítható át:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T} f(\mathbf{A}) \mathbf{T}^* (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} &= \frac{1}{2} [f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{bmatrix} - \\
&- \frac{1}{2} [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} \cos \varphi & -\frac{1}{\sqrt{r_p r_s}} \sin \varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{r_p r_s}} \sin \varphi & -\frac{1}{r_s} \cos \varphi \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} \left\{ [f(\lambda_1) + f(\lambda_2)] \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{bmatrix} - \right. \\ \left. - [f(\lambda_1) - f(\lambda_2)] \frac{1}{\sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4r_p r_s m}} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} (r_p l_s - r_s l_p) & -2m \\ -2m & \frac{1}{r_s} (r_s l_p - r_p l_s) \end{bmatrix} \right\}$$

A  $(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}f(\mathbf{A})\mathbf{T}^* \sqrt{\mathbf{R}}$ , továbbá  $(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}f(\mathbf{A})\mathbf{T}^*(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1}$  itt levezetett kifejezéseit felhasználva, az (9) képletből az egyfázisú transzformátor tekercseiben fellépő áramokra a következő matrix-összefüggést nyerjük:

$$\begin{bmatrix} i_p \\ i_s \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ [e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \right. \\ \left. - [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}] \frac{1}{d} \begin{bmatrix} r_p l_s - r_s l_p & -2r_s m \\ -2r_p m & r_s l_p - r_p l_s \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_{p0} \\ i_{s0} \end{bmatrix} + \\ + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda_1}{j\omega + \lambda_1} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_1 t}) + \frac{\lambda_2}{j\omega + \lambda_2} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_2 t}) \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\lambda_1}{j\omega + \lambda_1} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_1 t}) - \frac{\lambda_2}{j\omega + \lambda_2} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_2 t}) \right] \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} (r_p l_s - r_s l_p) & -2m \\ -2m & \frac{1}{r_s} (r_s l_p - r_p l_s) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_{p0} \\ u_{s0} \end{bmatrix}$$

(A rövidebb és áttekinthetőbb írásmód végett bevezettük a

$$d = \sqrt{(r_p l_s - r_s l_p)^2 + 4r_p r_s m^2}$$

rövidítést.)

Abban a speciális esetben, amikor a transzformátor primer és szekunder oldala egyforma, azaz  $r_p = r_s = r$  és  $l_p = l_s = l$ , nyilván

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{l^2 - m^2} \frac{2rl \mp 2rm}{2}; \quad \lambda_1 = \frac{r}{l+m}; \quad \lambda_2 = \frac{r}{l-m};$$



továbbá

$$d = 2rm,$$

tehát<sup>5)</sup>

$$(10) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} i_p \\ i_s \end{bmatrix} = & \frac{1}{2} \left\{ \left[ e^{-\frac{r}{l-m}t} + e^{-\frac{r}{l+m}t} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \left[ e^{-\frac{r}{l-m}t} + e^{-\frac{r}{l+m}t} \right] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_{p0} \\ i_{s0} \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{r - j\omega(l-m)}{r^2 + \omega^2(l+m)^2} \left( e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l-m}t} \right) + \right. \right. \\ & + \frac{r - j\omega(l+m)}{r^2 + \omega^2(l-m)^2} \left( e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l+m}t} \right) \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \\ & - \left[ \frac{r - j\omega(l-m)}{r^2 + \omega^2(l-m)^2} \left( e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l-m}t} \right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{r - j\omega(l+m)}{r^2 + \omega^2(l+m)^2} \left( e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{l+m}t} \right) \right] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_{p0} \\ u_{s0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

<sup>5)</sup> Például a megegyező primer és szekunder oldallal bíró egyfázisú transzformátor „rövidzárási áramait” a (10) képletből  $u_{p0} = U_0 e^{j\psi}$ ,  $u_{s0} = 0$ ,  $i_{p0} = I_0 e^{j\psi}$ ,  $i_{s0} = 0$  helyettesítéssel nyerhetjük. (Ez esetben tehát a primer feszültséget  $U_0 e^{j\omega t}$ , a primer feszültséggel megegyező fázisú mágnesezési áramot pedig  $I_0 \exp(j\omega t)$  alakban írjuk; a szekunder oldal rövidzárásának pillanatában a primer feszültség és a mágnesezési áram fázisszöge:  $\psi$ .) Ha  $r$ -et — az irodalomban szokásos módon — induktivitásokhoz képest elhanyagolhatóan kicsinynek tekintjük, a rövidzárási áramokra a következő képletek adódnak:

$$\begin{aligned} i_{pr} = & \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{r}{l-m}t} + e^{-\frac{r}{l+m}t} \right) I_0 e^{j\psi} - 2j \frac{U_0}{\omega l \left( 1 - \frac{m^2}{l^2} \right)} e^{j(\omega t + \psi)} + \\ & + \left( \frac{l+m}{l} e^{-\frac{r}{l-m}t} - \frac{l-m}{l} e^{-\frac{r}{l+m}t} \right) j \frac{U_0}{\omega l \left( 1 - \frac{m^2}{l^2} \right)} e^{j\psi}; \\ i_{sr} = & -\frac{1}{2} \left( e^{-\frac{r}{l-m}t} - e^{-\frac{r}{l+m}t} \right) I_0 e^{j\psi} + 2 \frac{m}{l} j \frac{U_0}{\omega l \left( 1 - \frac{m^2}{l^2} \right)} e^{j(\omega t + \psi)} - \\ & - \left( \frac{l+m}{l} e^{-\frac{r}{l-m}t} - \frac{l-m}{l} e^{-\frac{r}{l+m}t} \right) j \frac{U_0}{\omega l \left( 1 - \frac{m^2}{l^2} \right)} e^{j\psi}, \end{aligned}$$

Ezek a képletek olyan alakra hozhatók, amelyek megegyeznek a *Handbuch der Physik*



### 3. §. A levezetett megoldás alkalmazása többfázisú transzformátorokra

Abban az esetben, ha a vizsgált „ $n$ -fázisú” transzformátor a fentebb vázolt ciklikus szimmetriával bír, tehát a  $\mathbf{L}$  és  $\mathbf{R}$  matrixok ciklikus blokkokból álló hipermatrixok, a (9) összefüggésből az alábbiakban vázolt módon olyan képletet nyerhetünk, amely az egyfázisú transzformátorra fentebb levezetett eredménnyel figyelemreméltó analógiát mutat.

Ez esetben ugyanis (lásd: [1], 215. oldal, (9)):

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{-1} &= \text{adj } \mathbf{L} (\det \mathbf{L} \cdot \times \mathbf{E})^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{L}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s (\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} & -\mathbf{M} (\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} \\ -\mathbf{M} (\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} & \mathbf{L}_p (\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Továbbá

$$\sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} r_p \mathbf{L}_s (\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} & -\sqrt{r_p r_s} \mathbf{M} (\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} \\ -\sqrt{r_p r_s} \mathbf{M} (\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} & r_s \mathbf{L}_p (\mathbf{L}_p \mathbf{L}_s - \mathbf{M}^2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Minthogy  $\mathbf{L}_p$ ,  $\mathbf{L}_s$  és  $\mathbf{M}$  mind ciklikus matrixok, e matrixok sajátértékei

XVII. kötetének 359. oldalán található (26) és (27) jelű képletekkel, ha bevezetjük az

$$I_{pr} = \frac{U_0}{j\omega l \left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right)} = -j \frac{U_0}{\omega l \left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right)}$$

és

$$I_{sr} = -\frac{m}{l} I_{pr}$$

jelöléseket a rövidzárási áramok stacionárius értékei számára és felhasználjuk az  $\frac{m}{l+m} \cong \frac{1}{2}$  közelítést. Ez esetben ugyanis az általunk levezetett képletek a következő alakot öltik:

$$\begin{aligned}i_{pr} &= I_{pr} \left[ e^{j(\omega t + \psi)} - \frac{m}{l} e^{j\psi} e^{-\frac{r}{l-m}t} \right] + \frac{1}{4} I_0 e^{j\psi} e^{-\frac{r}{l+m}t} \\ i_{sr} &= I_{sr} \left[ e^{j(\omega t + \psi)} - e^{j\psi} e^{-\frac{r}{l-m}t} \right] + \frac{1}{4} I_0 e^{j\psi} e^{-\frac{r}{l+m}t}\end{aligned}$$

Ha még bevezetjük az áramerősségek „effektív értékei”-nek jelölésére az  $I_{0\text{eff}} = J_0$ ,  $I_{1k\text{eff}} = J_{1k}$ ,  $I_{2k\text{eff}} = J_{2k}$  jelöléseket, az általunk levezetett képletek valós része megadja a *Handbuch der Physik* idézett képleteit:

$$\begin{aligned}\text{Re}(i_{pr}) &= \sqrt{2} J_{1k} \left[ \cos(\omega t + \psi) - \frac{m}{l} \cos \psi e^{-\frac{r}{l-m}t} \right] + \frac{\sqrt{3}}{4} J_0 \cos \psi e^{-\frac{r}{l+m}t}; \\ \text{Re}(i_{sr}) &= \sqrt{2} J_{2k} \left[ \cos(\omega t + \psi) - \cos \psi e^{-\frac{r}{l-m}t} \right] + \frac{\sqrt{2}}{4} J_0 \cos \psi e^{-\frac{r}{l+m}t}\end{aligned}$$



az ismert módon (lásd: [1], 218. oldal) a következőképpen nyerhetők:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_p \text{ } k\text{-adik sajátértéke: } \lambda_{pk} &= l_{p0} + l_{p1} \omega_k + \dots + l_{p(n-1)} \omega_k^{n-1}; \\ \mathbf{L}_s \text{ } k\text{-adik sajátértéke: } \lambda_{sk} &= l_{s0} + l_{s1} \omega_k + \dots + l_{s(n-1)} \omega_k^{n-1}; \\ \mathbf{M} \text{ } k\text{-adik sajátértéke: } \mu_k &= m_0 + m_1 \omega_k + \dots + m_{n-1} \omega_k^{n-1}; \end{aligned}$$

ahol  $\omega_k = e^{2k\pi i/n}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ), azaz az „ $n$ -edik egységgyökök” közül a  $k$ -adik.

A  $\mathbf{L}_p$ ,  $\mathbf{L}_s$  és  $\mathbf{M}$  sajátértékeinek ismeretében<sup>6)</sup> írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} &= \frac{1}{n} \left[ \begin{array}{c|c} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r_p \lambda_{sk}}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] & - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{r_p r_s} \mu_k}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] \\ \hline - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{r_p r_s} \mu_k}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r_p \lambda_{pk}}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} \begin{bmatrix} r_p \lambda_{sk} & -\sqrt{r_p r_s} \mu_k \\ -\sqrt{r_p r_s} \mu_k & r_s \lambda_{pk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] \end{aligned}$$

A továbbiakban szükségünk lesz azon  $\mathbf{T}$ , illetve  $\mathbf{T}^*$  matrixokra, amelyekkel a  $\sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}}$  matrixot balról, illetve jobbról megszorozva, a  $\mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{T}^*$  szorzat-matrix *diagonál-matrix* lesz. E  $\mathbf{T}$ , illetve  $\mathbf{T}^*$  matrixok a következőképpen állíthatók elő (lásd [1], 218. oldal):

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}^* \mathbf{P}^* (\mathbf{U}^* \cdot \times \mathbf{E}_2),$$

illetve

$$\mathbf{T}^* = (\mathbf{U} \cdot \times \mathbf{E}_2) \mathbf{P} \mathbf{V}.$$

<sup>6)</sup> Ugyanis, ha  $\mathbf{C}_1$  és  $\mathbf{C}_2$  tetszés szerinti ciklikus matrixok, nyilván:

$$f_1(\mathbf{C}_1) f_2(\mathbf{C}_2) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_1(\lambda_{1k}) f_2(\lambda_{2k}) \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}]$$

ahol  $\lambda_{1k}$ , illetve  $\lambda_{2k}$  a  $\mathbf{C}_1$ , illetve  $\mathbf{C}_2$  matrix  $k$ -adik sajátértéke.



Jelen esetben:<sup>7)</sup>

$$U = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{n-1} \\ 1 & \omega_1^2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Ha bevezetjük (a rövidebb és áttekinthetőbb írásmód végett) a következő rövidítéseket:

$$\begin{aligned} \frac{r_p \lambda_{sk}}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \lambda_k^2} &= \varphi_k \\ - \frac{\sqrt{r_p r_s} \mu_k}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} &= \varrho_k \\ \frac{r_s \lambda_{pk}}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} &= \psi_k \end{aligned}$$

akkor nyilvánvaló, hogy

$$(U^* \cdot \times E_2) \sqrt{RL^{-1}} \sqrt{R} (U \cdot \times E_2) =$$

$$= \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \varphi_0 & 0 & \dots & 0 & \varrho_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_1 & \dots & 0 & 0 & \varrho_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_{n-1} & 0 & 0 & \dots & \varrho_{n-1} \\ \hline \varrho_0 & 0 & \dots & 0 & \psi_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varrho_1 & \dots & 0 & 0 & \psi_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varrho_{n-1} & 0 & 0 & \dots & \psi_{n-1} \end{array} \right]$$

<sup>7)</sup> Ugyanis  $T^*$  a  $T$  matrix konjugált transzponáltját jelenti!



Továbbá :

$$\mathbf{P} = \left[ \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \dots & \mathbf{P}_{1n} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \dots & \mathbf{P}_{2n} \end{bmatrix}.$$

(Jelen esetben  $\mathbf{P}$  olyan hipermatrix, amelynek  $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \dots$  blokkjai diadikus szorzatok. E diádok oszlop-vektorai  $n$  eleműek ; maga a  $\mathbf{P}$  hipermatrix  $2n$  blokkból, azaz két sorból és  $n$  oszlopból áll.)

Amint egyszerű matrix-aritmetikai számítással igazolható :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^*(\mathbf{U}^* \cdot \times \mathbf{E}_2) \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} (\mathbf{U} \cdot \times \mathbf{E}_2) \mathbf{P} = \\ & = \left[ \begin{array}{cc|cc|ccc} \varphi_0 & \varrho_0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \varrho_0 & \psi_0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varphi_1 & \varrho_1 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho_1 & \psi_1 & & & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & & \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & & \varphi_{n-1} & \varrho_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \varrho_{n-1} & \psi_{n-1} \end{array} \right] = \\ & = \left\langle \begin{bmatrix} \varphi_0 & \varrho_0 \\ \varrho_0 & \psi_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varrho_1 \\ \varrho_1 & \psi_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \varphi_{n-1} & \varrho_{n-1} \\ \varrho_{n-1} & \psi_{n-1} \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$



E diagonál-hipermatrix fődiagonalisában álló másodrendű kvadratikus matrixok bármelyike előállítható

$$\begin{bmatrix} \varphi_k & \varrho_k \\ \varrho_k & \psi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_k & \sigma_k \\ -\sigma_k & \gamma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{k1}^* & 0 \\ 0 & \lambda_{k2}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_k & -\sigma_k \\ \sigma_k & \gamma_k \end{bmatrix}$$

alakban, ahol

$$\lambda_{k1}^*, \lambda_{k2}^* = \frac{1}{\lambda_{pk} \lambda_{sk} - \mu_k^2} \frac{r_p \lambda_{sk} + r_s \lambda_{pk} \mp \sqrt{(r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk})^2 + 4 r_p r_s \mu_k^2}}{2}$$

jelenti a

$$\begin{bmatrix} \varphi_k & \varrho_k \\ \varrho_k & \psi_k \end{bmatrix}$$

matrix sajátértékeit, és  $\gamma_k = \cos \alpha_k/2$ ;  $\sigma_k = \sin \alpha_k/2$  jelentik a szóbanforgó matrix sajátvektorainak komponenseit. Itt

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{-2 \mu_k \sqrt{r_p r_s}}{r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk}}.$$

Tehát jelen esetben  $\mathbf{V} = \langle \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{n-1} \rangle$ , ahol

$$\mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} \gamma_k & -\sigma_k \\ \sigma_k & \gamma_k \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}_k^* = \begin{bmatrix} \gamma_k & \sigma_k \\ -\sigma_k & \gamma_k \end{bmatrix}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} & \mathbf{V}^* \mathbf{P}^* (\mathbf{U}^* \cdot \times \mathbf{E}_2) \sqrt{\mathbf{R}} \mathbf{L}^{-1} \sqrt{\mathbf{R}} (\mathbf{U} \cdot \times \mathbf{E}_2) \mathbf{P} \mathbf{V} = \\ & = \langle \langle \lambda_{01}^*, \lambda_{02}^* \rangle, \langle \lambda_{11}^*, \lambda_{12}^* \rangle, \dots, \langle \lambda_{n-1,1}^*, \lambda_{n-1,2}^* \rangle \rangle = \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Ezen  $\mathbf{A}$  matrix bármely polinomja, vagy hatványsorba fejthető függvénye

$$f(\mathbf{A}) = \langle \langle f(\lambda_{01}^*), f(\lambda_{02}^*) \rangle, \dots, \langle f(\lambda_{n-1,1}^*), f(\lambda_{n-1,2}^*) \rangle \rangle$$

alakba írható, tehát:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* f(\mathbf{A}) \mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}}) = \\ & = (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* \langle \langle f(\lambda_{01}^*), f(\lambda_{02}^*) \rangle, \dots, \langle f(\lambda_{n-1,1}^*), f(\lambda_{n-1,2}^*) \rangle \rangle \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

A továbbiak során feladatunkat a  $(\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* f(\mathbf{A}) \mathbf{T} (\sqrt{\mathbf{R}})$  szorzat kiszámítása képezi.

Nyilvánvaló, hogy



$$\begin{aligned}
 (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T}^* &= \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} \mathbf{E}_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_p}} \mathbf{E}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \dots, \mathbf{P}_{1n} \\ \mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22}, \dots, \mathbf{P}_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{V}_{n-1} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \mathbf{V}_0 & \mathbf{P}_{12} \mathbf{V}_1 & \dots & \mathbf{P}_{1n} \mathbf{V}_{n-1} \\ \mathbf{P}_{21} \mathbf{V}_0 & \mathbf{P}_{22} \mathbf{V}_1 & \dots & \mathbf{P}_{2n} \mathbf{V}_{n-1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Továbbá

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} \sqrt{\mathbf{R}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_1^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{V}_{n-1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^* & \mathbf{P}_{21}^* \\ \mathbf{P}_{12}^* & \mathbf{P}_{22}^* \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{P}_{1n}^* & \mathbf{P}_{2n}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^* & 0 \\ 0 & \mathbf{U}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} \mathbf{E}_n & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \mathbf{E}_n \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0^* \mathbf{P}_{11}^* & \mathbf{V}_0^* \mathbf{P}_{21}^* \\ \mathbf{V}_1^* \mathbf{P}_{12}^* & \mathbf{V}_1^* \mathbf{P}_{22}^* \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{V}_{n-1}^* \mathbf{P}_{1n}^* & \mathbf{V}_{n-1}^* \mathbf{P}_{2n}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} \mathbf{U}^* & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \mathbf{U}^* \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Nyilván

$$\mathbf{P} \mathbf{V} / (\mathbf{A}) \mathbf{V}^* \mathbf{P}^* =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \mathbf{V}_0 & \mathbf{P}_{12} \mathbf{V}_1 & \dots & \mathbf{P}_{1n} \mathbf{V}_{n-1} \\ \mathbf{P}_{21} \mathbf{V}_0 & \mathbf{P}_{22} \mathbf{V}_1 & \dots & \mathbf{P}_{2n} \mathbf{V}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\lambda_{01}^*) & 0 \\ 0 & f(\lambda_{02}^*) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0^* \mathbf{P}_{11}^* & \mathbf{V}_0^* \mathbf{P}_{21}^* \\ \mathbf{V}_1^* \mathbf{P}_{12}^* & \mathbf{V}_1^* \mathbf{P}_{22}^* \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{V}_{n-1}^* \mathbf{P}_{1n}^* & \mathbf{V}_{n-1}^* \mathbf{P}_{2n}^* \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \gamma_0^2 f(\lambda_{01}^*) + \sigma_0^2 f(\lambda_{02}^*) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_{n-1}^2 f(\lambda_{n-1,2}^*) + \sigma_{n-1}^2 f(\lambda_{n-1,1}^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma_0 \sigma_0 [f(\lambda_{01}^*) - f(\lambda_{02}^*)] & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\gamma_{n-1} \sigma_{n-1} [f(\lambda_{n-1,1}^*) - f(\lambda_{n-1,2}^*)] \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -\gamma_0 \sigma_0 [f(\lambda_{01}^*) - f(\lambda_{02}^*)] & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\gamma_{n-1} \sigma_{n-1} [f(\lambda_{n-1,1}^*) - f(\lambda_{n-1,2}^*)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0^2 f(\lambda_{01}^*) + \gamma_0^2 f(\lambda_{02}^*) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{n-1}^2 f(\lambda_{n-1,1}^*) + \gamma_{n-1}^2 f(\lambda_{n-1,2}^*) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r_p} \mathbf{U}^* & 0 \\ 0 & \sqrt{r_s} \mathbf{U}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \mathbf{D}_{11} \mathbf{U}^* & \sqrt{\frac{r_s}{r_p}} \mathbf{U} \mathbf{D}_{12} \mathbf{U}^* \\ \sqrt{\frac{r_p}{r_s}} \mathbf{U} \mathbf{D}_{21} \mathbf{U}^* & \mathbf{U} \mathbf{D}_{22} \mathbf{U}^* \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



Ha  $\mathbf{D} = \langle d_0, d_1, \dots, d_{n-1} \rangle$  tetszőszerinti diagonál-matrix és

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{n}} [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}],$$

továbbá

$$\mathbf{U}^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^* \\ \mathbf{u}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n-1}^* \end{bmatrix},$$

ahol

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_k^* = [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}];$$

akkor nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^* = \frac{1}{n} [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}] \begin{bmatrix} d_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^*.$$

Tehát a szóbanforgó matrix-szorzat végeredményben így írható (analógiában az egyfázisú transzformátornál levezetett megfelelő összefüggéssel):

$$\begin{aligned} & (\langle \mathbf{R} \rangle \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{E}_2) \mathbf{P} \mathbf{V} / (A) \mathbf{V}^* \mathbf{P}^* (\mathbf{U}^* \times \mathbf{E}_2) \rangle \langle \mathbf{R} \rangle = \\ & = \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [\gamma_k^2 / (\lambda_{k1}^*) + \sigma_k^2 / (\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] - \sqrt{\frac{r_s}{r_p}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \sigma_k [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{\frac{r_p}{r_s}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \sigma_k [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [\sigma_k^2 / (\lambda_{k1}^*) + \gamma_k^2 / (\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] \right] = \\ & = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} \gamma_k^2 / (\lambda_{k1}^*) + \sigma_k^2 / (\lambda_{k2}^*) & - \sqrt{\frac{r_s}{r_p}} \gamma_k \sigma_k [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] \\ \sqrt{\frac{r_p}{r_s}} \gamma_k \sigma_k [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] & \sigma_k^2 / (\lambda_{k1}^*) + \gamma_k^2 / (\lambda_{k2}^*) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] \end{aligned}$$



Vagy felhasználva a „direkt szorzat” írásmód által nyújtott lehetőséget az eredmény áttekinthetőbbé tételére :

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T} f(\mathbf{A}) \mathbf{T}^* \sqrt{\mathbf{R}} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ [f(\lambda_{k1}^*) + f(\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \right. \\
 &- [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] \frac{1}{\sqrt{(r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk})^2 + 4 r_p r_s \mu_k^2}} \begin{bmatrix} r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk} & -2 r_s \mu_k \\ -2 r_p \mu_k & r_s \lambda_{pk} - r_p \lambda_{sk} \end{bmatrix} \Big\} \cdot \times \\
 &\cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}].
 \end{aligned}$$

A fenti részletes levezetésben közölt számításokkal teljesen analóg módon adódik, hogy

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{T} f(\mathbf{A}) \mathbf{T}^* (\sqrt{\mathbf{R}})^{-1} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ [f(\lambda_{k1}^*) + f(\lambda_{k2}^*)] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r_p}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_s}} \end{bmatrix} - \right. \\
 &- [f(\lambda_{k1}^*) - f(\lambda_{k2}^*)] \frac{1}{\sqrt{(r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk})^2 + 4 r_p r_s \mu_k^2}} \cdot \\
 &\cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} (r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk}) & -2 \mu_k \\ -2 \mu_k & \frac{1}{r_s} (r_s \lambda_{pk} - r_p \lambda_{sk}) \end{bmatrix} \Big\} \cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}].
 \end{aligned}$$

Tehát a (9) képlet az „ $n$ -fázisú” transzformátor esetén az alábbi alakot nyeri (teljes analógiában az egyfázisú transzformátorra levezetett megfelelő képlettel) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_p \\ \mathbf{i}_s \end{bmatrix} = \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ [e^{-\lambda_{k1} t} + e^{-\lambda_{k2} t}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \right. \right.$$



$$\begin{aligned}
& - [e^{-\lambda_{k1}^* t} - e^{-\lambda_{k2}^* t}] \frac{1}{d_k^*} \begin{bmatrix} r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk} & -2 r_s \mu_k \\ -2 r_p \mu_k & r_s \lambda_{pk} - r_p \lambda_{sk} \end{bmatrix} \cdot \times \\
& \cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] \left\{ \begin{bmatrix} i_{p0} \\ i_{s0} \end{bmatrix} + \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left[ \frac{\lambda_{k1}^*}{j\omega + \lambda_{k1}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k1}^* t}) + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\lambda_{k2}^*}{j\omega + \lambda_{k2}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k2}^* t}) \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r_p & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{k1}^*}{j\omega + \lambda_{k1}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k1}^* t}) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{\lambda_{k2}^*}{j\omega + \lambda_{k2}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\lambda_{k2}^* t}) \right] \right\} \right\} \\
& \cdot \frac{1}{d_k^*} \begin{bmatrix} 1 \\ r_p (r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk}) & -2 \mu_k \\ -2 \mu_k & r_s (r_s \lambda_{pk} - r_p \lambda_{sk}) \end{bmatrix} \cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_k, \dots, \bar{\omega}_k^{n-1}] \cdot \begin{bmatrix} u_{p0} \\ u_{s0} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Minthogy további tetszőszerinti  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$  matrix esetén fennállnak az alábbi azonosságok:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K} \cdot \times (\mathbf{u} \mathbf{u}^*)] \mathbf{i}_0 &= \begin{bmatrix} k_{11} \mathbf{u} \mathbf{u}^* & k_{12} \mathbf{u} \mathbf{u}^* \\ k_{21} \mathbf{u} \mathbf{u}^* & k_{22} \mathbf{u} \mathbf{u}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{p0} \\ i_{s0} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} k_{11} \mathbf{u}(\mathbf{u}^* \mathbf{i}_{p0}) + k_{12} \mathbf{u}(\mathbf{u}^* \mathbf{i}_{s0}) \\ k_{21} \mathbf{u}(\mathbf{u}^* \mathbf{i}_{p0}) + k_{22} \mathbf{u}(\mathbf{u}^* \mathbf{i}_{s0}) \end{bmatrix} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^* \mathbf{i}_{p0} \\ \mathbf{u}^* \mathbf{i}_{s0} \end{bmatrix} \right\} \cdot \times \mathbf{u}
\end{aligned}$$



tehát az „ $n$ -fázisú” transzformátor fenti képletet a következő alakba is írható:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 \begin{bmatrix} i_p \\ i_s \end{bmatrix} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left[ (e^{-\dot{\lambda}_{k1}t} + e^{-\dot{\lambda}_{k2}t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \right. \right. \\
 &- (e^{-\dot{\lambda}_{k1}t} - e^{-\dot{\lambda}_{k2}t}) \frac{1}{d_k^*} \begin{bmatrix} r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk} & -2 r_s \mu \\ -2 r_p \mu_k & r_s \lambda_{pk} - r_p \lambda_{sk} \end{bmatrix} \left. \right\} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_k^v I_{p,v+1} \\ \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_k^v I_{s,v+1} \end{bmatrix} - \\
 &- \left[ \left( \frac{\lambda_{k1}^*}{j\omega + \lambda_{k1}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\dot{\lambda}_{k1}t}) + \frac{\lambda_{k2}^*}{j\omega + \lambda_{k2}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\dot{\lambda}_{k2}t}) \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_s} \end{bmatrix} + \right. \\
 &+ \left( \frac{\lambda_{k1}^*}{j\omega + \lambda_{k1}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\dot{\lambda}_{k1}t}) - \frac{\lambda_{k2}^*}{j\omega + \lambda_{k2}^*} (e^{j\omega t} - e^{-\dot{\lambda}_{k2}t}) \right) \frac{1}{d_k^*} \cdot \\
 &\cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_p} (r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk}) & -2 \mu_k \\ -2 \mu_k & \frac{1}{r_s} (r_p \lambda_{sk} - r_s \lambda_{pk}) \end{bmatrix} \cdot \left. \begin{bmatrix} \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_k^v U_{p,v+1} \\ \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_k^v U_{s,v+1} \end{bmatrix} \right\} \cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \right\} \quad (11)
 \end{aligned}$$

Itt

$$\begin{aligned}
 i_{p0} &= \begin{bmatrix} I_{pn} \\ \vdots \\ I_{pn} \end{bmatrix}; & i_{s0} &= \begin{bmatrix} I_{s1} \\ \vdots \\ I_{sn} \end{bmatrix}; & u_{p0} &= \begin{bmatrix} U_{p1} \\ \vdots \\ U_{pn} \end{bmatrix}; & u_{s0} &= \begin{bmatrix} U_{s1} \\ \vdots \\ U_{sn} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

A levezetett képletekben szereplő skalár- és matrix-mennyiségek kiszámítása a gyakorlat számára érdekességgel bíró két- és háromfázisú esetben a következőképpen történik:



**Kétfázisú transzformátor :**

$$(n = 2)$$

$$\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_p \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} r_s & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} l_{p0} & l_{p1} \\ l_{p1} & l_{p0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} l_{s0} & l_{s1} \\ l_{s1} & l_{s0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 \\ m_1 & m_0 \end{bmatrix};$$

$$\boxed{\omega_0 = 1; \quad \omega_1 = -1}$$

$$\lambda_{p1} = l_{p0} + l_{p1}; \quad \lambda_{p2} = l_{p0} - l_{p1};$$

$$\lambda_{s1} = l_{s0} + l_{s1}; \quad \lambda_{s2} = l_{s0} - l_{s1};$$

$$\mu_1 = m_0 + m_1; \quad \mu_2 = m_0 - m_1;$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v I_{p,v+1} = I_{p1} + I_{p2};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v I_{p,v+1} = I_{p1} - I_{p2};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v U_{p,v+1} = U_{p1} + U_{p2};$$

**Háromfázisú transzformátor :**

$$(n = 3)$$

$$\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} r_p & 0 & 0 \\ 0 & r_p & 0 \\ 0 & 0 & r_p \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} l_{p0} & l_{p1} & l_{p1} \\ l_{p1} & l_{p0} & l_{p1} \\ l_{p1} & l_{p1} & l_{p0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} l_{s0} & l_{s1} & l_{s1} \\ l_{s1} & l_{s0} & l_{s1} \\ l_{s1} & l_{s1} & l_{s0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_1 \\ m_1 & m_0 & m_1 \\ m_1 & m_1 & m_0 \end{bmatrix};$$

$$\boxed{\omega_0 = 1; \quad \omega_1 = \varepsilon; \quad \omega_2 = \bar{\varepsilon};}$$

$$\lambda_{p1} = l_{p0} + 2l_{p1}; \quad \lambda_{p2} = \lambda_{p3} = l_{p0} - l_{p1};$$

$$\lambda_{s1} = l_{s0} + 2l_{s1}; \quad \lambda_{s2} = \lambda_{s3} = l_{s0} - l_{s1};$$

$$\mu_1 = m_0 + 2m_1; \quad \mu_2 = \mu_3 = m_0 - m_1;$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v I_{p,v+1} = I_{p1} + I_{p2} + I_{p3};$$

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v I_{p,v+1} &= I_{p1} + \varepsilon I_{p2} + \varepsilon I_{p3} = \\ &= I_{p1} - \frac{1}{2}(I_{p2} + I_{p3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}j(I_{p2} - I_{p3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_2^v I_{p,v+1} &= I_{p1} + \varepsilon I_{p2} + \bar{\varepsilon} I_{p3} = \\ &= I_{p1} - \frac{1}{2}(I_{p2} + I_{p3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}j(I_{p2} - I_{p3}); \end{aligned}$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v U_{p,v+1} = U_{p1} + U_{p2} + U_{p3};$$



**Kétfázisú transzformátor :**

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v U_{p,v+1} = U_{p1} - U_{p2};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v I_{s,v+1} = I_{s1} + I_{s2};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v I_{s,v+1} = I_{s1} - I_{s2};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v U_{s,v+1} = U_{s1} + U_{s2};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v U_{s,v+1} = U_{s1} - U_{s2}.$$

**Háromfázisú transzformátor :**

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v U_{p,v+1} = U_{p1} + \varepsilon U_{p2} + \varepsilon U_{p3} =$$

$$= U_{p1} - \frac{1}{2} (U_{p2} + U_{p3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} j (U_{p2} - U_{p3})$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_2^v U_{p,v+1} = U_{p1} + \varepsilon U_{p2} + \bar{\varepsilon} U_{p3} =$$

$$= U_{p1} - \frac{1}{2} (U_{p2} + U_{p3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} j (U_{p2} - U_{p3});$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v I_{s,v+1} = I_{s1} + I_{s2} + I_{s3};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v I_{s,v+1} = I_{s1} + \varepsilon I_{s2} + \varepsilon I_{s3} =$$

$$= I_{s1} - \frac{1}{2} (I_{s2} + I_{s3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} j (I_{s2} - I_{s3});$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_2^v I_{s,v+1} = I_{s1} \varepsilon I_{s2} + \bar{\varepsilon} I_{s3} =$$

$$= I_{s1} - \frac{1}{2} (I_{s2} + I_{s3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} j (I_{s2} - I_{s3});$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_0^v U_{s,v+1} = U_{s1} + U_{s2} + U_{s3};$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_1^v U_{s,v+1} = U_{s1} + \varepsilon U_{s2} + \varepsilon U_{s3} =$$

$$= U_{s1} - \frac{1}{2} (U_{s2} + U_{s3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} j (U_{s2} - U_{s3})$$

$$\sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_2^v U_{s,v+1} = U_{s1} + \varepsilon U_{s2} + \bar{\varepsilon} U_{s3} =$$

$$= U_{s1} - \frac{1}{2} (U_{s2} + U_{s3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} j (U_{s2} - U_{s3})$$



Abban a speciális esetben, midőn a primer és a szekunder oldal egyforma, azaz  $\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_s$  és  $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_s$ , a képlet a következő alakot nyeri: tehát

$$\lambda_{k1}^*, \lambda_{k2}^* = \frac{1}{\lambda_k^2 - \mu_k^2} \frac{2r\mu_k \mp 2r\mu_k}{2};$$

$$\lambda_{k1}^* = \frac{r}{\lambda_k + \mu_k}; \quad \lambda_{k2}^* = \frac{r}{\lambda_k - \mu_k},$$

tehát

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_p \\ i_s \end{bmatrix} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left[ \left( e^{-\frac{r}{\lambda_k - \mu_k} t} + e^{-\frac{r}{\lambda_k + \mu_k} t} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \right. \right. \\ &+ \left( e^{-\frac{r}{\lambda_k - \mu_k} t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k + \mu_k} t} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \left[ \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_k^v I_{p,v+1} \right] + \\ &+ \left[ \frac{r - j\omega(\lambda_k - \mu_k)}{r^2 + \omega^2(\lambda_k - \mu_k)^2} \left( e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k - \mu_k} t} \right) + \right. \\ &+ \frac{r - j\omega(\lambda_k + \mu_k)}{r^2 + \omega^2(\lambda_k + \mu_k)^2} \left( e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k + \mu_k} t} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \\ &- \left( \frac{r - j\omega(\lambda_k - \mu_k)}{r^2 + \omega^2(\lambda_k - \mu_k)^2} \left( e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k - \mu_k} t} \right) - \right. \\ &- \left. \left. \frac{r - j\omega(\lambda_k + \mu_k)}{r^2 + \omega^2(\lambda_k + \mu_k)^2} \left( e^{j\omega t} - e^{-\frac{r}{\lambda_k + \mu_k} t} \right) \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right] \cdot \\ &\cdot \left. \left[ \sum_{v=0}^{n-1} \bar{\omega}_k^v U_{p,v+1} \right] \right\} \cdot \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



## IRODALOM

- [1] E. EGERVÁRY : „On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **15** (1954) 211—222.
- [2] A. SOMMERFELD : *Elektrodynamik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949. (p. 140.)
- [3] LOVASS-NAGY V.—GYÖRY T. : „Csatolt rezgőkörök matematikai vizsgálata.” *A Magyar Tudományos Akadémia Akalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 65—79.
- [4] EGERVÁRY J. : „Matrixfüggvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **3** (1953) 417—458.

(Beérkezett: 1955. IX. 27.)

# ПРИМЕНЕНИЕ ГИПЕРМАТРИЧНОГО АЛГОРИФМА Е. ЭГЕРВАРИ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ МНОГОФАЗИСНЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ

В. ЛОВАШ-НАДЬ

## Резюме

Цель настоящей работы дать единое и обозримое решение системы дифференциальных уравнений, описывающих стационарные и *транзиентные* электрические процессы, протекающие в многофазисных трансформаторах, с помощью некоторых новейших результатов теории матриц, полученных Е. Эгервари, система неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида (1) и (2), математически описывающая некоторый  $n$ -фазисный трансформатор, может быть представлена единственным матричным дифференциальным уравнением (3), решение которого в случае любых матричных коэффициентов может быть получено из общей формулы, выведенной в одной из предыдущих работ автора [3].

В том случае, когда трансформатор таков, что во-первых, материальные и геометрические данные катушек, расположенных на первичной стороне, тождественны, во-вторых, катушки вторичной стороны также одинаковы, наконец, в расположении катушек наблюдается циклическая симметрия, матричные коэффициенты, фигурирующие в уравнении (3), суть гиперматрицы состоящие из циклических блоков. В этом случае решение общего вида (9) уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию  $i(0) = i_0$  может быть приведено к виду (11), если использовать гиперматричный алгоритм Е. Эгервари [1] и привести гиперматрицы, фигурирующие в решении общего вида (9) и состоящие из циклических и поэтому попарно перестановочных блоков, к диагональному виду. Выведенная таким образом формула (11) даёт обозримое и годное для численных вычислений решение проблемы и совершенно аналогична формула (10), описывающей однофазисный трансформатор.

В конце работы автор применяет полученные общие результаты для случая двух- и трехфазисных трансформаторов.

## ON AN APPLICATION OF J. EGERVÁRY'S HYPERMATRIX ALGORISM TO THE MATHEMATICAL INVESTIGATION OF POLYPHASE TRANSFORMERS

V. LOVASS-NAGY

## Summary

The object of this paper is to present, by employing some of the latest results of the matrix theory obtained by J. EGERVÁRY, the solution of the system of inhomogeneous linear differential equations with constant coefficients serving for the mathematical description of stationary and transient phenomena occurring in polypphase-transformers. The system of differential equations serving for the mathematical investigation of an



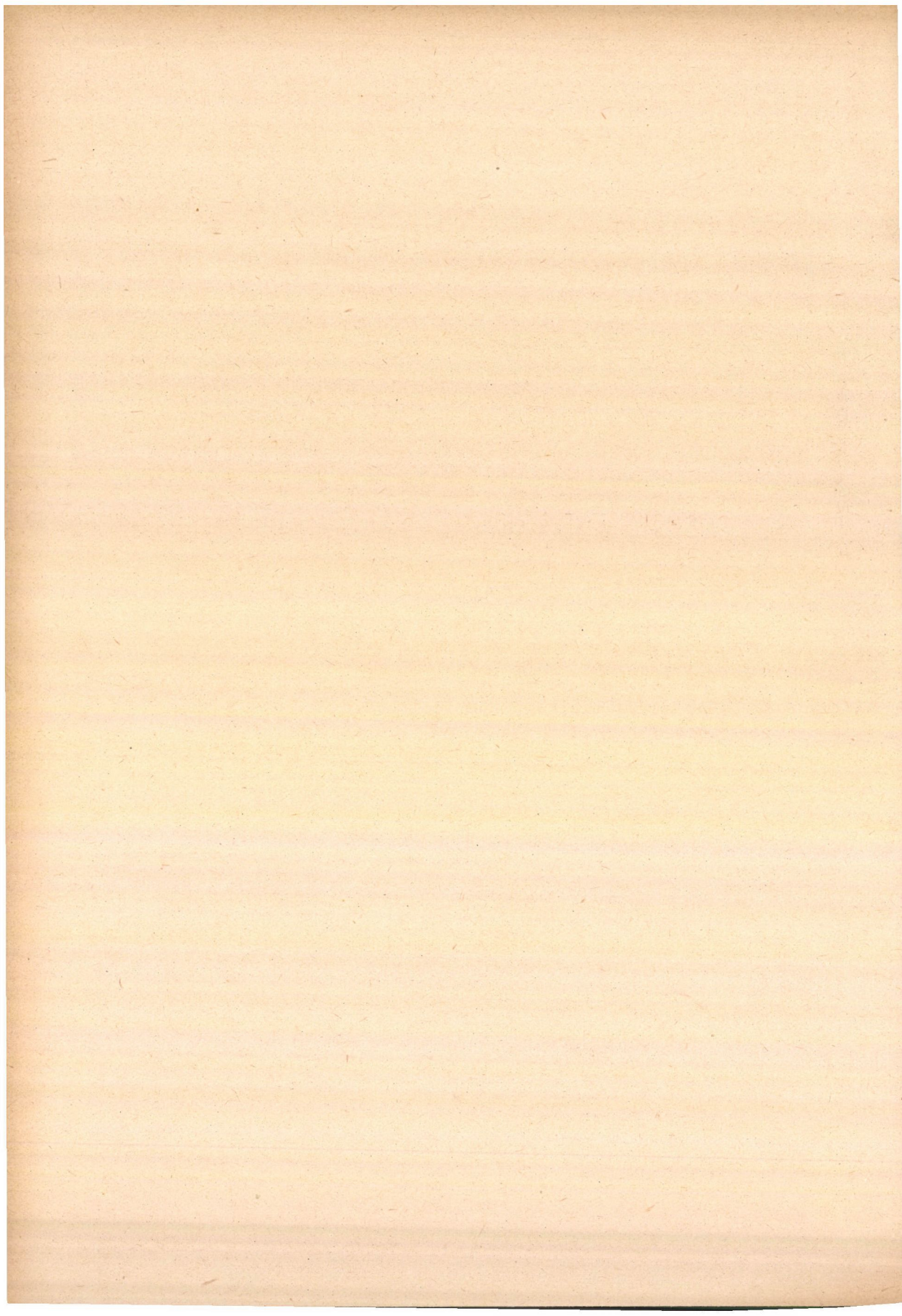
$n$ -phase transformer, consisting of differential equations of the form (1), respectively (2), can be compounded into the single matrix differential equation (3).

If the coefficient matrices of the equation (3) are arbitrary matrices, the solution of equation (3) is obtained by a formula deduced by the author in one of his earlier papers [3].

In case the construction of the transformer is such that the geometrical and material constants of the primary coils are equal as well as the secondary coils are identical and the arrangement of both the primary and the secondary coil system has a cyclical symmetry, the coefficient matrices of the equation (3) are hypermatrices the blocks of which are cyclic matrices. In this case the solution (9) of the equation (3) satisfying the initial condition  $i(0) = i_0$  can be transformed into the formula (11), applying the hypermatrix-algorithm of J. EGERVÁRY [1] and constructing the spectral decompositions of the hypermatrices occurring in the formula (9), the blocks of which are cyclic matrices and therefore are pairwise commutable. The formula (11) thus obtained gives the solution of the problem, in a concise form, which is also appropriate for numerical computations and analogous with the formula (10) serving for the description of single-phase transformers.

At the end of the paper the author presents the application of the above deduced results for the calculation of two-phase and three-phase transformers.







## A KÖRLEMEZRE VONATKOZÓ DIRICHLET-ELV ALKALMAZHATÓSÁGÁRÓL

FREUD GÉZA

A Dirichlet-elv, mint ismeretes, az alábbiakból áll: legyen az  $(x, y)$ -síkban fekvő  $G$  tartomány határa  $\Gamma$ , Jordan-görbékből összetehető, és létezzék olyan  $F(x, y)$  függvény, amely  $G$ -ben folytonos, továbbá legyen  $G$  véges sok összefüggő részre bontható úgy, hogy minden egyes ilyen összefüggő részén  $G$ -nek  $F$  folytonosan differenciálható:

$$(1) \quad D(F) = \iint_G \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy < \infty;$$

akkor található egy és csak egy harmonikus  $f(x, y)$  függvény, melyre

$$(2) \quad f(x, y) = F(x, y), \quad \text{ha } (x, y) \in \Gamma,$$

és erre lesz a  $D(f)$  integrál értéke a legkisebb.

Ha egy adott  $F(P)$ ;  $P \in \Gamma$  peremfüggvényt sikerül úgy kiterjesztenünk az egész tartományra, hogy (1) teljesüljön, a (2) peremfeltételhez tartozó harmonikus peremértékfeladat megoldásának létezését és egyértelműségét is bebizonyítottuk, és egyben azt is kimutattuk, hogy az a Dirichlet-féle variációs elv megoldásaként állítható elő. Tekintettel arra, hogy a peremértékfeladatban csak  $F$ -nek a  $\Gamma$  peremen felvett értékei szerepelnek, célszerű olyan feltételeket keresnünk, amelyek biztosítják, hogy a peremen adott  $F$ -et úgy lehet  $G$ -be folytatni, hogy (1) teljesüljön. Körlemez alakú tartományra szorítva, ilyen szükséges és elégséges feltételt könnyen meg tudunk adni a peremfüggvény Fourier-együtthatói segítségével. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a körlemez az  $x^2 + y^2 \leq 1$  egységgör. Vezessünk be  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  polárkoordinátákat, és a peremfüggvény az  $r = 1$  sugarú körön Fourier-sorba fejtve legyen

$$(3) \quad F(1, \varphi) = F(\varphi) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \varphi + b_k \sin k \varphi);$$

akkor a Dirichlet-feladat Dirichlet-elv alapján való megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Lásd: R. COURANT [1].



$$(4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) < \infty$$

teljesülése. Sz. M. NYIKOLSZKIJ [3] vetette fel a kérdést, nem lehet-e a Dirichlet-elv alkalmazhatóságára olyan feltételt megadni, amely nem a peremfüggvény Fourier-együtthatóit, hanem a peremfüggvény szerkezeti tulajdonságait tartalmazza. Bebizonyította, hogy ha  $F(\varphi) \in \text{Lip}(\alpha, 2)$ ,  $\alpha > 1/2$ , azaz

$$\omega_2(\delta, F) = \sup_{|h| \leq \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} |F(\varphi) - F(\varphi + h)|^2 d\varphi \right\}^{1/2} = O(\delta^\alpha),$$

akkor (4) teljesül, tehát a Dirichlet-elv alkalmazható; és fordítva, ha a Dirichlet-elv alkalmazható és ennek következtében (4) teljesül, akkor  $F(\varphi) \in \text{Lip}(1/2, 2)$ . Az alábbiakban NYIKOLSZKIJ-nak ezt a tételét kiterjesztve, szükséges és elégséges feltételt adunk a körlemezre vonatkozó Dirichlet-elv alkalmazhatóságára.

Legyen a továbbiakban

$$(5) \quad \psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [F(\varphi + t) - F(\varphi)]^2 d\varphi.$$

**Tétel:** A körlemezre vonatkozó Dirichlet-elv akkor és csak akkor alkalmazható az  $F(\varphi)$  peremfüggvényre, ha

$$(6) \quad \int_0^1 \frac{\psi(t)}{t^2} dt < \infty.$$

Mielőtt áttérünk a tétel bizonyítására, kimutatjuk, hogy (6) egyenértékű az alábbi feltétellel:

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{1}{n}\right) < \infty,$$

ahol

$$(8) \quad \Phi(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \psi(t) dt.$$

Ugyanis

$$(9) \quad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \psi(t) \sum_{n \leq t^{-1}} n dt = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \psi(t) [t^{-1}] ([t^{-1}] + 1) dt, \end{aligned}$$



és tekintettel arra, hogy

$$\frac{1}{2}t^{-2} \leq [t^{-1}]([t^{-1}] + 1) \leq 2t^{-2},$$

a (9) jobboldalán álló integrál akkor és csak akkor véges, ha a (6) integrál is véges.

Hogy a tételt bebizonyítsuk, azt kell kimutatnunk, hogy (7)-ből következik (4) és viszont.

(4)-ből **következik** (7). Ugyanis (3) következtében

$$(10) \quad \Phi(h) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin kh}{kh}\right) (a_k^2 + b_k^2),$$

tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin k/n}{k/n}\right).$$

Miután  $\frac{\sin x}{x} = 1 + o(x^2)$ , kapjuk, hogy<sup>2)</sup>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin k/n}{k/n}\right) \leq k + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} < c_2 k,$$

tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{1}{n}\right) \leq c_2 \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) < \infty, \quad \text{q. e. d.}$$

(7)-ből **következik** (4). Ennek bizonyítására RÉNYI ALFRÉD egy ötletét használjuk fel, amelyet a szerző már a [2] dolgozatában is felhasznált:  $k \geq n$  esetén

$$1 - \frac{\sin k/n}{k/n} \geq c_3^{-1},$$

tehát (10)-ből

$$\sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq c_3 \Phi\left(\frac{1}{n}\right);$$

ennek következtében

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq c_3 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

<sup>2)</sup>  $c_1, c_2, \dots$  a továbbiakban konstansokat jelentenek.



Ha  $F(\varphi) \in \text{Lip}(\alpha, 2)$ , akkor  $\psi(t) = O(t^{2\alpha})$ , tehát  $\alpha > \frac{1}{2}$  esetén a (6) integrál konvergál, és így a Dirichlet-elv alkalmazható. Tehát NYIKOLSZKIJ tételének első fele tételünk közvetlen következménye. NYIKOLSZKIJ tételének második fele azt mondja ki, hogy a Dirichlet-elv alkalmazhatóságához szükséges, hogy  $\psi(t) = O(t)$  legyen. Ez az állítás közvetlenül nem olvasható ki tételünkéből, viszont tételünk segítségével élesíthető: kimutatjuk, hogy  $\psi(t) = o(t)$  is szükséges.

A  $\psi(t)$ -t definiáló (5) egyenletből (tekintettel arra, hogy  $F(\varphi)$   $2\pi$  szerint periódikus) leolvasható, hogy

$$\psi(t_1 + t_2) \leq 2\psi(t_1) + 2\psi(t_2);$$

ebből pedig

$$\psi(\tau - h) \geq \frac{1}{2}\psi(\tau) - \psi(h) \geq \frac{1}{2}\psi(\tau) - c_4 h.$$

Itt felhasználtuk NYIKOLSZKIJ tételét, amelynek értelmében  $\psi(h) \leq c_4 h$ . Ha tehát

$$h \leq \frac{\psi(\tau)}{4c_4} \leq \frac{1}{4}\tau,$$

akkor

$$\psi(\tau - h) \geq \frac{1}{4}\psi(\tau).$$

Ennek következtében

$$\int_{\tau - \frac{\psi(\tau)}{4c_4}}^{\tau} \frac{\psi(t)}{t^2} dt > \frac{1}{4}\psi(\tau) \int_{\tau - \frac{\psi(\tau)}{4c_4}}^{\tau} \frac{dt}{t^2} > \frac{1}{16c_4} \left( \frac{\psi(\tau)}{\tau} \right)^2.$$

Tekintettel (6)-ra, a baloldal  $\tau \rightarrow 0$  esetén zérushoz tart, tehát  $\psi(\tau) = o(\tau)$ , ezzel állításunkat bebizonyítottuk.<sup>3)</sup>

#### IRODALOM

- [1] R. COURANT : *Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces*. Interscience Publishing Company, New York, 1950.
- [2] FREUD G. : „Ortogonalis polinomok abszolút konvergenciájáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 5 (1955) 49—56.
- [3] С.М. НИКОЛЬСКИЙ : „К задаче Дирихле для круга и полупространства.” *Математический Сборник* 35 (1954) 247—266.

(Beérkezett: 1956. I. 12. — Átdolgozva: 1956. II. 8.)

<sup>3)</sup> Megjegyzés a korrektúránál: A dolgozat szedése alatt jelent meg Л. Н. СЛОБОДЕЦКИ—В. М. БАБИЧ: „Об ограниченности интеграла Дирихле” című dolgozata [Доклады Академии Наук СССР 106 (1956) 604—606], amely ugyanezt a tételt tartalmazza. A  $\psi(t) = o(t)$  feltétel szükségessége viszont jelen cikkben szerepel először.



## О ПРИМЕНИМОСТИ ПРИНЦИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ КРУГА

Г. ФРЕЙД

## Резюме

Как известно, принцип Дирихле, относящийся к кругу, может быть применен, если коэффициенты Фурье граничной функции удовлетворяют условию (4). В настоящей работе доказывается, что для выполнения (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (6). Фигурирующая здесь функция  $\psi(t)$  определяется формулой (5). Отсюда получается следующее необходимое условие применимости метода Дирихле:  $\omega_2(\delta, F) = o(h^{1/2})$ . Эти результаты обобщают и уточняют результаты С. М. НИКОЛЬСКОГО опубликованные в работе [3].

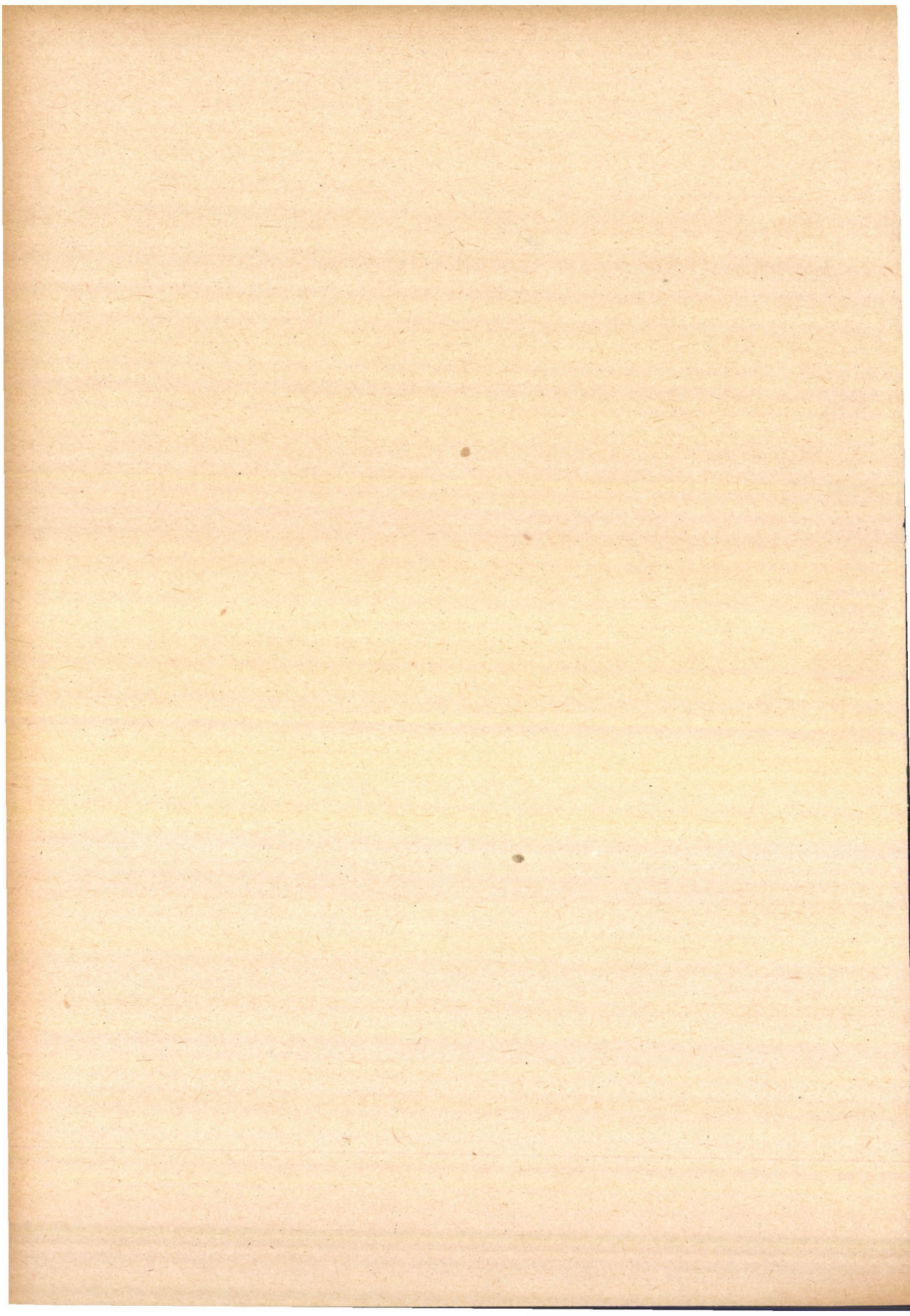
ÜBER DIE ANWENDBARKEIT DES DIRICHLETSCHEN  
PRINZIPS FÜR DEN KREIS

G. FREUD

## Zusammenfassung

Das Dirichlet'sche Prinzip für den Kreis ist bekanntlich anwendbar, falls die Fouriersche Koeffizienten der Randfunktion  $F(\varphi)$  der Bedingung (4) genügen. Es wird gezeigt, dass (6) eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Erfüllsein von (4) darstellt; hierbei ist  $\psi(t)$  durch (5) definiert. Daraus kann gefolgert werden, dass  $\omega_2(\delta; F) = o(h^{1/2})$  eine notwendige Bedingung für die Anwendbarkeit des Dirichlet'schen Prinzips darstellt. Diese Resultate verallgemeinern und verschärfen frühere Resultate von S. M. NIKOLSKY [3].







# A HŐVEZETÉS DIFFERENCIÁLEGYENLETÉNEK MAXIMUM-ELVÉRŐL, I.

ADLER GYÖRGY és FREUD GÉZA

## Bevezetés

A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elve értelmében korlátos tartományra kiterjedt hővezető testben a hőmérsékleti maximum (és hasonlóképpen a hőmérsékleti minimum) vagy a kezdő időpontban, vagy pedig a hővezető test peremén lép fel. (L. LEVI [3], ТЫИОНОВ [6]). Ezt a tételt a továbbiakban röviden ТЫИОНОВ-tételnek fogjuk nevezni, miután legügyesebb bizonyítása ТЫИОНОВ-tól származik.

Várható, hogy amennyiben a test peremének egy része hőszigetelt, úgy hőmérsékleti maximum, illetve minimum a perem hőszigetelt részén sem léphet fel, kivéve esetleg a kezdő időpontot. Az alábbiakban ezt fogjuk igazolni. Két tételt mondunk ki és bizonyítunk be. Az első tételben csak a két-dimenziós esetre szorítkozunk, viszont ezen a kereten belül a test hővezetési együtthatója függhet a helytől. A második tétel akárhány dimenzió esetén érvényes, de a hővezetési együtthatónak helytől függetlennek kell lennie. Megjegyezzük, hogy egydimenziós esetben a probléma majdnem trivális módon visszavezethető a ТЫИОНОВ-tételre, amint a szerzők egyike egy korábbi dolgozatában megmutatta (lásd : FREUD G. [1]). Lényegében ugyanezt az eljárást (tudniillik a hőmérsékleti függvény tükrözését a hőszigetelt peremen) használjuk fel az I. tétel bizonyításánál. A II. tétel bizonyításánál E. LEVI egy ötletét használjuk fel (lásd : [3]).

## 1. §. A maximum-elv kiterjesztése a kétdimenziós esetben

**I. tétel:** A  $V(x, y, t)$  függvény tegyen eleget az  $(x, y)$  sík Jordan-görbével határolt  $R$  korlátos tartományában a hővezetés

$$(1) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = a(x, y, t)^2 \frac{\partial V}{\partial t} \quad \left( a(x, y, t) > 0 \right)$$

differenciálegyenletének  $0 \leq t \leq T$  esetén, továbbá elégítse ki a  $R$  tartomány  $S$  peremének  $S^*$  nyílt részhalmazán a

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$$



peremfeltételt, ahol  $n$  a belső normálist jelenti.  $S^*$ -ról feltételezzük, hogy összefüggő komponensei analitikus ívekből állnak.  $V(x, y, t)$   $S^*$ -on is legyen kétszer folytonosan differenciálható, elégítse ki az (1) egyenletet és az egész  $S$ -en legyen folytonos. Ekkor  $V(x, y, t)$  maximumát, illetve minimumát csak a  $S$  perem  $S - S^*$  részhalmazán, vagy pedig a  $t = 0$  időpillanatban veheti fel.

**Bizonyítás:** Először bebizonyítjuk a tételt egy speciális esetben.

Legyen  $R$  félkör és az  $S^*$  peremrész a félkör átmérője. Kimutatjuk, hogy  $V(x, y, t)$  maximumát, illetve minimumát csak a félkör ívalakú peremén, vagy pedig a  $t = 0$  időpillanatban veheti fel. Ez a következőképpen látható be: Tükrözzük a félkört az  $S^*$  átmérőre. Az így kapott teljes kör alsó felében értelmezzük  $V(x, y, t)$ -t úgy, hogy az  $S^*$  átmérőre szimmetrikus pontokban egyenlő értékeket vegyen fel. Ekkor  $V(x, y, t)$  a teljes nyílt körlemezen kielégíti az (1) egyenletet és a peremen is folytonos. Így alkalmazható rá a ТРИХОНОВ-тétel. Tehát  $V(x, y, t)$  maximumát, illetve minimumát  $0 \leq t \leq T$  esetén csak a kör kerületén, vagy pedig a  $t = 0$  időpillanatban veheti fel. Minthogy az eredeti félkör  $S^*$  átmérője a teljes kör belsejébe esik,  $V(x, y, t)$  valóban nem veheti fel maximumát, illetve minimumát az  $S^*$  szakaszon.

Az általános esetet most visszavezetjük a fenti speciális esetre.

A  $V(x, y, t)$  függvény elégítse ki a hővezetés (1) egyenletét az  $(x, y)$ -sík  $R$  tartományában. Tegyük fel, hogy  $V$  szélsőértékét az  $S^*$  hőszigetelt perem egy  $P_0$  pontjában veszi fel. Kimutatjuk, hogy ez lehetetlenség.

Minthogy  $S^*$  nyílt halmaz,  $P_0$  benne van  $S^*$ -nak egy  $S_1^*$  összefüggő nyílt részhalmazában. A Riemann-féle leképezési tétel szerint van egy olyan, a tartomány belsejében analitikus  $w = \varphi(z)$  komplex változós ( $z = x + iy$ ) egyrétű függvény, mely az  $(x, y)$  sík  $R$  tartományát az  $(u, v)$  sík ( $w = u + iv$ ) egy félkörébe viszi át, mégpedig oly módon, hogy a  $R$  tartomány  $S_1^*$  peremrészének a félkör átmérője feleljen meg. Ezen  $u + iv = \varphi(x, y)$  transzformációnál az (1) egyenlet a következőbe megy át:

$$2) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = \frac{a^2}{|\varphi'|^2} \frac{\partial V}{\partial t},$$

ahol  $\varphi'$  a leképező függvény deriváltja, mely a leképezés egyrétűsége következtében nem tűnhet el.

Tekintettel arra, hogy  $S_1^*$  analitikus ív, a  $V(u, v, t)$  függvény a félkör átmérőjén is kétszer folytonosan differenciálható marad, a  $V(u, v, t)$  függvényre alkalmazható a ТРИХОНОВ-тétel élesítésének fentebb már bebizonyított speciális esete, melynek értelmében  $V(u, v, t)$  szélső értékét, vagy a perem félkörív alakú részén, vagy pedig a  $t = 0$  időpillanatban veszi fel. Tekintettel arra, hogy a  $V$  függvény az  $(x, y)$  sík és az  $(u, v)$  sík egymásnak megfelelő pontjaiban egyenlő értékeket vesz fel, következik, hogy a  $V(x, y, t)$  függvény a félkör átmérőjének megfelelő  $S_1^*$  peremszakaszon  $t > 0$  esetén nem veheti fel szélsőértékét.

## [ 2. §. A maximum-elv többdimenziós esetben

Mint ismeretes, egy felületet Ljapunov-felületnek nevezünk, ha eleget tesz az alábbi feltételeknek:

1. Minden pontjában van érintősíkja;



2. A felület  $P$  pontjában húzott  $\mathbf{n}(P)$  normális vektora, mint a felületi pont függvénye, eleget tesz az

$$|\mathbf{n}(P_1) - \mathbf{n}(P_2)| \leq A(\overline{P_1 P_2})^\delta$$

Lipschitz-feltételnek ( $A$  és  $\delta$  pozitív állandók).

**II. tétel:**  $A V(x, y, z; t)$  függvény tegyen eleget az  $(x, y, z)$  tér egy korlátos  $R$  tartományában a hővezetés

$$(3) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t} \quad (a^2 > 0, \text{ konst.})$$

differeciálegyenletének  $0 < t \leq T$  esetén, továbbá elégítse ki a  $R$  tartomány  $S$  peremének  $S^*$  nyílt részhalmazán a  $\partial V / \partial \mathbf{n} = 0$  peremfeltételt.  $S^*$  legyen véges sok Ljapunov-felület egyesítése és  $S$  legyen Jordan-felület. Feltesszük, hogy  $V$  az egész  $S$ -en folytonos és **grad**  $V$   $S^*$ -on folytonos és korlátos. Ekkor  $V(x, y, z; t)$   $R + S$ -beli maximumát, illetve minimumát vagy felveszi a  $S$  perem  $S - S^*$  részhalmazán, vagy pedig csak a  $t = 0$  időpillanatban veheti fel.

A bizonyítás egyszerű gondolatmenete mellett néhány hosszadalmasabb megfontolásra lesz szükségünk. Ezeket segéd tételek formájában a bizonyítás után közöljük.

### Bizonyítás :

Tegyük fel indirekte, hogy  $V(x, y, z; t)$  pl.  $M$  maximumát az  $S^*$  peremen veszi fel a  $t_1 > 0$  időpillanatban, míg  $0 \leq t \leq t_1$  esetén az  $S - S^*$  peremen  $V(x, y, z; t)$  maximumára :

$$\text{Max}_{(x, y, z) \in S - S^*} V(x, y, z; t) = N < M.$$

A  $V(x, y, z; t)$  függvény a  $M$  maximumát csak az  $S^*$  belső részhalmazán veheti fel, mert  $V$ -ről feltettük, hogy az egész  $S$  peremen folytonos és  $V$  maximuma a zárt  $S - S^*$  peremrészén határozottan kisebb  $M$ -nél.

Legyen  $P$  olyan pontja az  $S^*$  peremrésznek, hogy itt

$$V(P, t_1) = M.$$

Tekintsük az

$$F: V(x, y, z; t) = c \quad (N < c < M, \quad \text{Max } |V(x, y, z, 0)| < c)$$

nívó-felületet. Ennek egy  $F_1$  összefüggő része  $S^*$  egy belső  $S_1^*$  részével olyan zárt felületet alkot, hogy  $P \in S_1^*$ .

Ekkor azonban a  $F + S_1^*$  zárt felület által határolt  $R^*$  tartományban — tekintettel arra, hogy a peremen a  $V(x, y, z; t)$  függvény a

$$\begin{aligned} V(x, y, z; t) &= c, & (x, y, z) \in F \\ \frac{\partial V(x, y, z; t)}{\partial \mathbf{n}} &= 0 & (x, y, z) \in S_1^* \end{aligned} \quad (0 < t \leq t_1)$$

peremfeltételeket elégíti ki és a bizonyítandó 1. segéd tétel szerint a kérdéses peremértékfeladat unicitása fennáll — csak  $V(x, y, z; t) \equiv c$  ( $0 < t \leq t_1$ ) lehet, ami ellentmond annak, hogy a  $P$  pontban  $V(x, y, z; t)$  az  $M$  értéket veszi fel.



**1. (unicitás) szerédtétel:** Legfeljebb egy olyan  $V(x, y, z; t)$  függvény van, mely a fentebb definiált  $R^*$  tartományban ( $0 < t \leq t_1$ ) esetén kielégíti a (3) differenciálegyenletet a II. tételben kirótt feltételek mellett.

Tegyük fel ugyanis, hogy két olyan  $V_1$  és  $V_2$  függvény létezik, mely eleget tesz a feltételeknek. Alkalmazzuk a Green-tételt [4] az  $u = V_1 - V_2$  függvényre rögzített  $t$  mellett a  $R^*$  tartomány esetén<sup>1)</sup> ( $R^*$   $t$  függvénye):

$$\int_{R^*} u \Delta u d\tau + \int_{R^*} (\text{grad } u)^2 d\tau = \int_{F+S_1^*} u \frac{\partial u}{\partial n} df;$$

(3)-ból helyettesítve  $\Delta u = t$ :

$$\frac{1}{2} a^2 \int_{R^*} \frac{\partial}{\partial t} u^2 d\tau + \int_{R^*} (\text{grad } u)^2 d\tau = \int_{F+S_1^*} u \frac{\partial u}{\partial n} df.$$

A peremfeltételekből következik, hogy a jobboldali integrál eltűnik. Ezt figyelembevéve, és 0-tól  $t$ -ig  $t$  szerint integrálva:

$$\frac{1}{2} a^2 \int_0^t dt \int_{R^*} \frac{\partial}{\partial t} u^2 d\tau + \int_0^t dt \int_{R^*} (\text{grad } u)^2 d\tau = 0.$$

Itt az első integrált úgy fogjuk fel, mint egy  $(x, y, z, t)$  térbeli térfogati integrált és az integrációk sorrendjét megcserélve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} a^2 \int_0^t dt \int_{R^*} \frac{\partial}{\partial t} u^2 d\tau = \frac{1}{2} a^2 \int_{R^*} u^2 d\tau.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\frac{1}{2} a^2 \int_{R^*} u^2 d\tau + \int_0^t dt \int_{R^*} (\text{grad } u)^2 d\tau = 0.$$

Ez azonban csak úgy lehetséges, ha  $u = 0$ , tehát  $V_1 \equiv V_2$  az egész  $R^*$  tartományban.

Még hátra van annak kimutatása, hogy a Green-tétel alkalmazható a  $R^*$  tartomány esetében.<sup>2)</sup> Ehhez kimutatjuk, hogy a  $F$  nívó-felület Ljapunov-felület, illetve egyes szinguláris pontjainak és az  $S^*$  felülettel alkotott metszészonalának tetszőleges környezete elhagyása után már Ljapunov-felület. Ezt a 2. segéd-tételben bizonyítjuk be. Ha az  $F$  felület teljesen egészében Ljapunov-felület, akkor — tekintettel  $S_1^*$  véges sok Ljapunov-felületből álló volta — a Green-tétel minden további megfontolás nélkül alkalmazható.

<sup>1)</sup> Azt, hogy a Green-tétel az  $R^*$  tartomány esetén alkalmazható-e, a továbbiakban részletesen meg fogjuk vizsgálni.

<sup>2)</sup> A Gauss-tétel, illetve a Green-tétel alkalmazhatóságára vonatkozóan lásd [2] 27. oldalát.



Amennyiben a  $F$  felületnek fentebb említett szinguláris pontjai vannak, illetve az  $S^*$  felülettel alkotott metszésvonalának tetszőlegesen kicsiny környezete elhagyása után lesz csak  $F$  Ljapunov-felület, úgy ez a nehézség az alább vázolt módon küszöbölhető ki.

Az  $F$  felületből elég kicsiny sugarú gömbökkel kirekesztjük a szinguláris pontokat, és egy vékony csőszerű felülettel — melynek felszínét majd zérushoz tartatjuk — kirekesztjük a  $F + S_1^*$  felületből az  $F$  és  $S^*$  felületek metszésvonalát. A metszésvonal ily módon való kirekeszthetőségéhez a 3. segéd-tételben behatározzuk, hogy a metszésvonal rektifikálható görbe.

A szinguláris pontok, illetve a metszésvonal kirekesztése után a  $R^*$  tartomány megmaradó részére már alkalmazható a Green-tétel. A kirekesztő gömbök és a csőszerű felület felszínét zérushoz tartatva, tekintettel  $V$  és  $\text{grad } V$   $R$ -beli és így  $R^*$ -beli korlátosságára, kapjuk, hogy a Green-tétel az eredeti  $R^*$  tartomány esetén is alkalmazható.

**2. segéd-tétel:** A hővezetés differenciálegyenletét kielégítő  $V(x, y, z; t)$  függvény  $V(x, y, z; t) = c$   $F$  nívó-felületének bármely, teljesen a  $R$  tartomány belsejében levő  $F^*$  részfelülete Ljapunov-felület, legfeljebb egyes izolált pontok tetszőlegesen kicsiny környezete kivételével.

Ennek igazolására be kell bizonyítani, hogy a kérdéses  $F^*$  nívó-felület kielégíti a Ljapunov-felület három kritériumát, legfeljebb egyes pontok tetszőlegesen kicsiny környezete kivételével.

a) A felület bármely pontjában van egyértelműen meghatározott érintősík és így meghatározott felületi normális is. Ez nyilvánvaló következménye annak az ismert ténynek, hogy a hővezetés differenciálegyenletét kielégítő  $V(x, y, z; t)$  függvény bármely változója szerint akárhányszor folytonosan differenciálható a tartomány belsejében.

b) Ha  $\vartheta$  az  $M_1$  és  $M_2$  pontbeli normálisok hajlásszöge, akkor

$$(4) \quad \vartheta < E(M_1 M_2)^\delta \quad (0 < \delta \leq 1),$$

ahol  $E$  és  $\delta$  meghatározott számok. Elegendő a (4) tulajdonságot az  $M_1$  és  $M_2$  pontbeli normálisok iránycosinusaira bizonyítani, ebből már nyilvánvalóan következik a  $\vartheta$ -ra vonatkozó állítás is.

A normálisnak például az  $x$  tengellyel bezárt szögének iránycosinusa:

$$\cos \alpha = \frac{\partial V / \partial x}{|\text{grad } V|}.$$

Tekintettel arra, hogy a  $V(x, y, z; t_1)$  függvény minden  $t_1 > 0$  időpontban a helykoordinátáknak a tartomány belsejében analitikus függvénye,  $\text{grad } V$  csak véges sok pontban tűnhet el. Ezeket a pontokat, továbbá az  $F$  felület és az  $S^*$  felület metszésvonalát egy kis környezetükkel együtt kizárjuk a felületből. A megmaradó felületén  $\cos \alpha$  az  $x, y, z$  koordináták folytonosan differenciálható függvénye, tehát  $\delta = 1$  exponensű egyenletes Lipschitz-feltételnek tesz eleget.

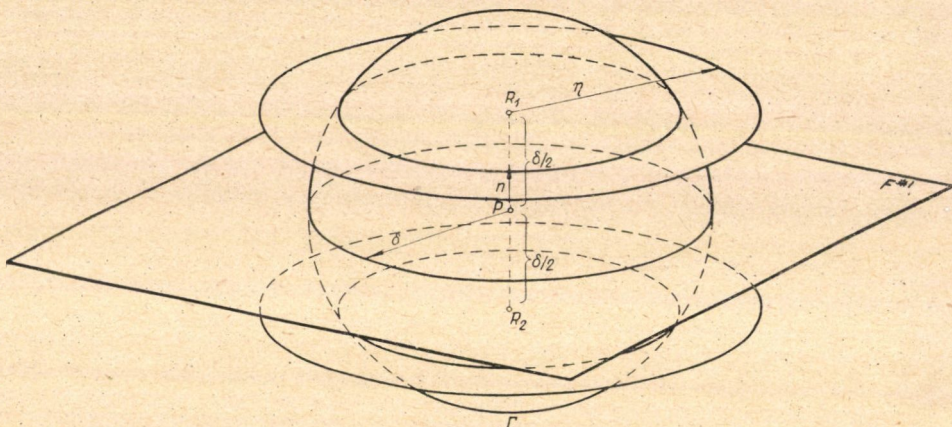
c) Létezik olyan  $d > 0$  szám, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: a felület bármely  $M$  pontjához tartozó normálisával párhuzamos egyenes legfeljebb egy pontjában dőli a felületnek az  $M$  centrumú,  $d$  sugarú gömbben levő részét.



Ez a következőképpen látható be: Legyen  $F^{**}$  az  $F^*$ -nak azon zárt részhalmaza, melyet  $F^*$ -ből a  $F^*$ -felület  $|\text{grad } V| < \varepsilon$  egyenlőtlenségnek eleget tevő pontjai elhagyásával kapunk. Tehát a  $F^{**}$  felületen  $|\text{grad } V| \geq \varepsilon$ .

Minthogy  $\text{grad } V$  az egész  $S$  felület által határolt tartomány belsejében folytonos, ezért ezen tartomány minden belső zárt résztartományán egyenletesen folytonos. Egy ilyen belső zárt résztartomány legyen  $Z$ , melynek  $F^{**}$  a belsejében van, és  $\varepsilon > 0$  olyan, az egyenletes folytonosságnak megfelelő szám, hogy a  $\overline{P_1 P_2} < \delta$  ( $P_1, P_2 \in Z$ ) egyenlőtlenségnek eleget tevő pontokra

$$|\text{grad } V(P_1) - \text{grad } V(P_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$



1. ábra

Az  $F^{**}$  egy tetszőleges  $P$  pontja körül  $\delta$  sugárral gömböt rajzolunk. E gömbön belül  $|\text{grad } V| > \varepsilon/2$ . Tehát a  $P$  pontbeli  $\mathbf{n}$  felületi normális egyenesen  $P$ -től  $\delta/2$  távolságban levő  $R_1$ , illetve  $R_2$  pontokban a  $V(x, y, z; t_1)$  függvény értékére:

$$V(R_1) > c + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\delta}{2} = c + \frac{\varepsilon \delta}{4},$$

illetve

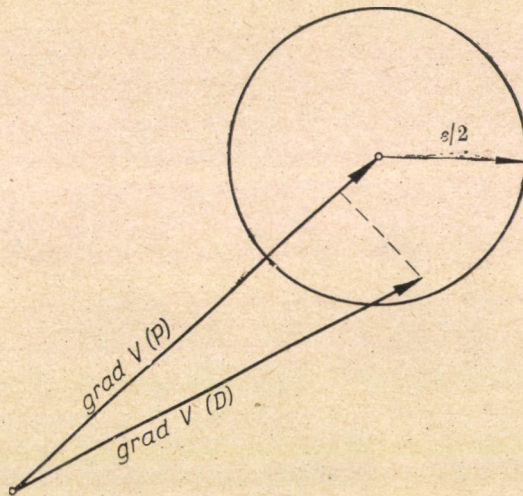
$$V(R_2) < c - \frac{\varepsilon \delta}{4}.$$

A  $V$  függvény  $Z$ -beli egyenletes folytonosságából következik, hogy van olyan  $\eta > 0$  szám, hogy  $\overline{P_1 P_2} < \eta$  ( $P_1, P_2 \in Z$ ) esetén  $|V(P_1) - V(P_2)| < \varepsilon \delta / 8$ . Tehát az  $R_1$ , illetve  $R_2$  centrumú,  $\eta$  sugarú gömbökben  $V > c + \varepsilon \delta / 8$ , illetve  $V < c - \varepsilon \delta / 8$ . Tekintsük a  $P$  pont körül  $h = \min(\delta, \eta)$  sugárral rajzolt gömböt. Minden olyan, a  $P$  pontbeli  $\mathbf{n}$  normálissal párhuzamos  $g$  egyenes, mely a  $P$  ponttól  $h$ -nál kisebb távolságra van, áthalad az  $R_1$  és  $R_2$  centrumú,  $\eta$  sugarú gömbökön. Tehát egy ilyen  $g$  egyenes mentén a  $V(x, y, z; t_1)$  függ-



vény felvesz  $c$ -nél nagyobb, illetve  $c$ -nél kisebb értékeket az  $F^*$  egyik, illetve másik oldalán. Ennélfogva közben a  $g$  egyenes mentén  $V = c$ , mégpedig a  $g$  egyenes és a  $P^*$  felület  $D$  dőféspontjában. Ilyen dőféspont azonban a  $\Gamma$  gömbön belül csak egy lehet, mert ha  $V(x, y, z; t_1)$  két helyen venné fel a  $g$  egyenesen a  $\Gamma$  gömbön belül a  $c$  értéket, akkor közben  $\text{grad } V(D)$   $n$ -irányú komponense eltűnne, ami lehetetlen. Ugyanis  $\text{grad } V(P)$ -t és  $\text{grad } V(D)$ -t egy pontból felrajzolva,  $\text{grad } V(D)$  végpontjának benne kell lennie a  $\text{grad } V(P)$  végpontja körül  $\varepsilon/2$  sugárral rajzolt gömbben, és minthogy  $|\text{grad } V(P)| \geq \varepsilon$ ,  $\text{grad } V(D)$ -nek  $\text{grad } V(P)$  irányú (mivel  $F$  nívófelület, ezért  $\text{grad } V(P)$  iránya egyben  $n$  iránya is!) komponensére  $|\text{grad}_n V(D)| \geq \varepsilon/2$ .

Tehát  $h$  választható a Ljapunov-felület  $c$ ) kritériumában szereplő  $d > 0$  szám gyanánt.



2. ábra

**3. segéd-tétel.** A  $V(x, y, z; t)$  függvény  $V(x, y, z; t_1) = c$  nívó-felülete az  $F(x, y, z) = 0$  egyenlettel jellemzett  $S^*$  peremfelületet csak véges sok rektifikálható ívből álló görbében metszheti.

Minthogy  $S^*$  véges sok Ljapunov-felületből áll, elég bizonyítani, hogy a kérdéses nívó-felületnek és tetszőleges Ljapunov-felületnek (ennek egyenlete is  $F(x, y, z) = 0$  legyen) metszészvonala rektifikálható görbe.

Ugyanis a

$$V(x, y, z; t_1) = c,$$

$$F(x, y, z) = 0$$

rendszerből az implicit függvényrendszerre vonatkozó tétel (lásd pl.: [5], II. kötet 396. oldal) alapján a metszészvonal paraméteres egyenletrendszere, az

$$x = x(s)$$

$$y = y(s)$$

$$z = z(s)$$



differentiálható függvények kiszámíthatók. Ez abból következik, hogy a metszésgörbe olyan, egymást átfedő szakaszokra bontható, hogy egy ilyen szakaszon belül a

$$\frac{\partial(F, V)}{\partial(y, z)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial(F, V)}{\partial(x, z)}, \quad \frac{\partial(F, V)}{\partial(x, y)}$$

Jacobi-determinánsoknak legalább egyike nem tűnik el. Ha pl.  $\partial(F, V)/\partial(y, z) \neq 0$  egy ilyen szakaszon, akkor itt  $x$  választható az  $s$  paraméter gyanánt.

A Jacobi-determinánsok el nem tűnésére vonatkozó állításunk így látható be:

Tekintettel arra, hogy  $\partial V/\partial n = 0$  az  $S^*$ -on, következik, hogy  $\text{grad } V$  benne van  $S^*$  érintősíkjában, és így  $\text{grad } V$  és  $\text{grad } F$  merőlegesek egymásra. Pl. a  $\partial(F, V)/\partial(y, z)$  determináns eltűnése azt jelentené, hogy  $\text{grad } V$  és  $\text{grad } F$   $(y, z)$ -síkbeli komponense párhuzamos, vagyis a metszésgörbe érintője merőleges az  $x$ -tengelyre. Minthogy a metszésgörbe érintője nem lehet egyidejűleg merőleges mindhárom koordináta-tengelyre, következik, hogy mindhárom Jacobi-determináns egyszerre nem tűnhet el. A Jacobi-determinánsok folytonosságából (ez  $\text{grad } V$  folytonosságából és az  $S^*$  felületre tett megszorításokból következik) adódik, hogy a metszésgörbe azon szomszédos szakaszai, ahol egyik, illetve másik Jacobi-determináns nem tűnik el, egymást átfedik.

## IRODALOM

- [1] FREUD G.: „Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel, I.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1955) 391—392.
- [2] И. М. ГЮНТЕР: *Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики*. Гостехиздат, Москва, 1953.
- [3] E. LEVI: „Sull'equazione del calore.” *Annali di Matematica* (Ser. III). 14 (1908) 187—264.
- [4] A. SOMMERFELD: *Partielle Differentialgleichungen der Physik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1954.
- [5] SZÁSZ P.: *A differenciál- és integrálszámítás elemei*. Közoktatásügyi Kiadó Vállalat, Budapest, 1951.
- [6] A. TYCHONOFF: „Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur.” *Recueil Mathématique (Szbornyik)* 42 (1935) 199—216.

(Beérkezett: 1956. II. 11.)

## О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, I.

ДЬ. АДЛЕР и Г. ФРЕЙД

### Резюме

В силу принципа максимума для дифференциального уравнения теплопроводности максимум (и минимум) температуры тела, заполняющего некоторую ограниченную область, достигается либо в начальный момент, либо на границе тела (см. ЛЕВИ [3], ТИХОНОВ [6]). Можно ожидать, что, если часть границы тела теплоизолирована, то мак-



симум (и соответственно минимум) температуры не может достигаться там, исключая разве лишь начальный момент времени.

В связи с этим доказываются следующие две теоремы:

**Теорема I.** Пусть при  $0 \leq t \leq T$  функция  $V(x, y, t)$  удовлетворяет в области  $R$  плоскости  $(x, y)$  ограниченной кривой Жордана  $S$  дифференциальному уравнению теплопроизводности (1), а на открытом подмножестве  $S^*$  границы  $S$  граничному условию  $\partial V / \partial n = 0$ , где  $n$  — обозначает внутреннюю нормаль. Связные компоненты множества  $S^*$  состоят из аналитических дуг. Пусть, далее,  $V(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению (1) и на  $S^*$  и непрерывна и на всей  $S$ . Тогда  $V(x, y, t)$  может достигнуть свой максимум лишь на подмножестве  $S - S^*$  границы  $S$  или в момент времени  $t = 0$ .

**Теорема II.** Пусть при  $0 < t \leq T$  функция  $V(x, y, z, t)$  удовлетворяет в ограниченной области  $R$  пространства  $(x, y, z)$  уравнению теплопроизводности (3), а на открытом подмножестве  $S^*$  границы  $S$  области  $R$  граничному условию  $\partial V / \partial n = 0$ . Пусть  $S^*$  состоит из конечного числа поверхностей Ляпунова. Предположим, что  $V$  непрерывна на всей  $S$ , а  $\text{grad } V$  непрерывен и ограничен на  $S^*$ . Тогда  $V(x, y, z, t)$  может достигнуть свой максимум (соответственно минимум) лишь на подмножестве  $S - S^*$  границы  $S$  или в момент времени  $t = 0$ .

Доказательство теоремы I основывается на основной теореме Римана о конформном преобразовании и на отражении температурной функции через теплоизолированную границу.

Доказательство теоремы II основана на одну идею Э. Э. Леви (см. [3]). Доказательство теоремы II может быть распространено на какое-угодно число измерений.

## SUR LE PRINCIPE DU MAXIMUM DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR, I.

GY. ADLER et G. FREUD

### Résumé

Selon le principe du maximum de l'équation de la chaleur, le maximum (et de même le minimum) de la température d'un corps conducteur de la chaleur apparaît ou bien à l'instant initial, ou bien sur la frontière du corps conducteur de la chaleur (voir LEVI [3], TYCHONOFF [6]). On peut supposer que si une partie de la frontière est thermiquement isolée, le maximum resp. le minimum de la température ne peut pas apparaître sur cette partie thermiquement isolée, sauf peut-être à l'instant initial.

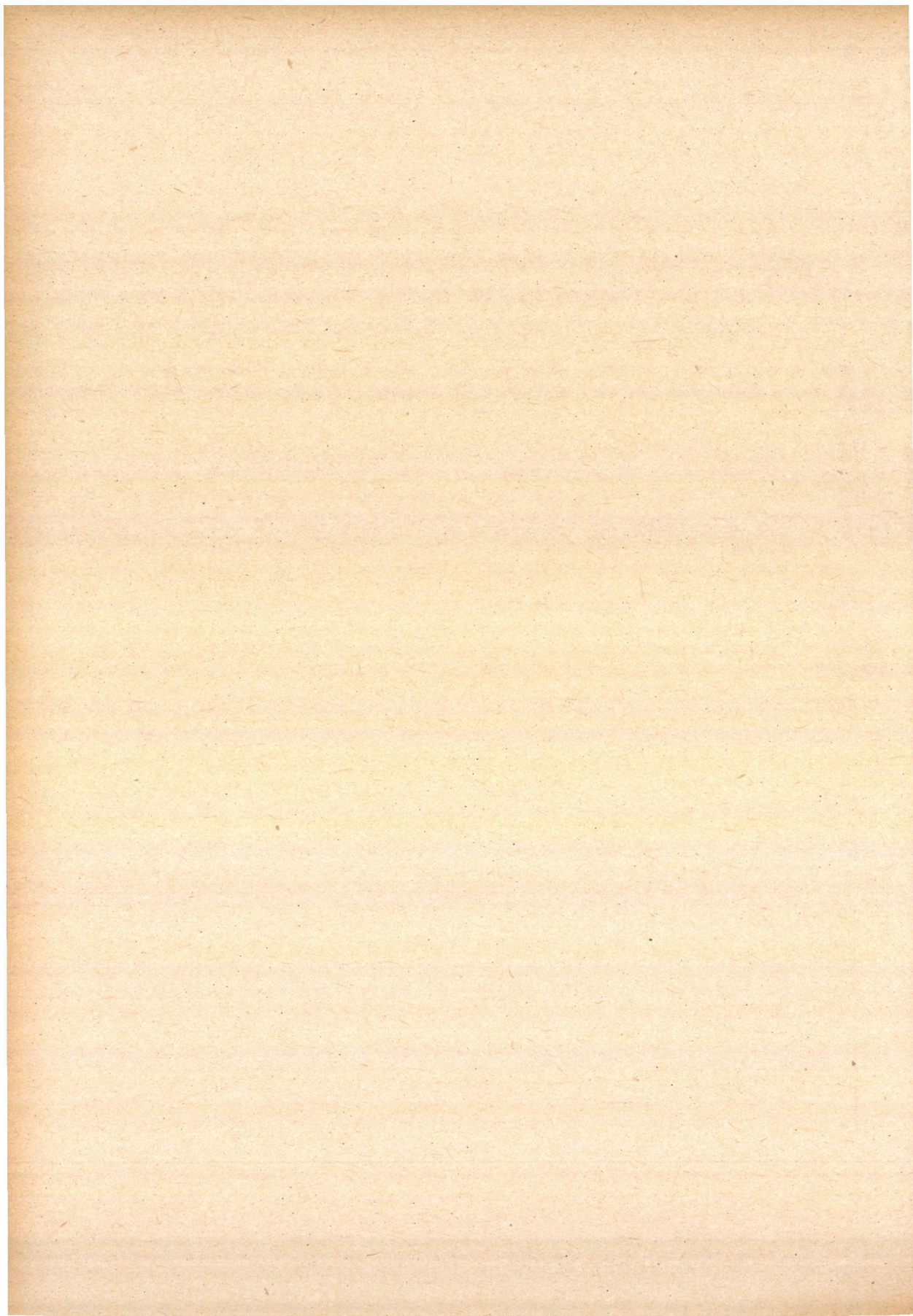
En ce qui concerne ce problème, nous énonçons et nous démontrons les deux théorèmes suivants :

**Théorème I :** Supposons que la fonction  $V(x, y ; t)$  satisfait l'équation différentielle (1) de la chaleur dans le domaine borné  $R$  du plan  $(x, y)$  limité par une courbe de Jordan  $S$  quand  $0 \leq t \leq T$ , et qu'elle remplisse la condition aux limites  $\partial V / \partial n = 0$  sur l'ensemble partiel ouvert  $S^*$  de la frontière  $S$  de  $R$ , où  $n$  signifie la normale intérieure. Les composantes connexes de  $S^*$  sont formées par des arcs analytiques.  $V(x, y ; t)$  doit également satisfaire l'équation (1) sur  $S^*$ , de plus elle doit être continue sur toute la courbe  $S$ . Dans ces conditions la fonction  $V(x, y ; t)$  ne peut prendre son maximum resp. son minimum que sur l'ensemble  $S - S^*$  de  $S$  ou bien à l'instant  $t = 0$ .

**Théorème II :** Supposons que la fonction  $V(x, y, z ; t)$  satisfait l'équation différentielle (3) de la chaleur dans le domaine borné  $R$  de l'espace  $(x, y, z)$  limité par une surface  $S$ , quand  $0 < t \leq T$ , et qu'elle remplisse la condition aux limites  $\partial V / \partial n = 0$  sur l'ensemble partiel ouvert  $S^*$  de la frontière  $S$ . Soit en outre  $S^*$  la somme des surfaces de Lyapounoff en nombre fini, et  $S$  surface de Jordan.  $V(x, y, z ; t)$  est continue sur toute la surface  $S$  et  $\text{grad } V$  est continue et bornée sur  $S^*$ . Dans ces conditions la fonction  $V(x, y, z ; t)$  prend son maximum resp. son minimum ou sur l'ensemble  $S - S^*$  de  $S$ , ou bien à l'instant  $t = 0$ .

La démonstration du Théorème I se base sur le théorème de la représentation conforme de Riemann et sur la transformation par symétrie de la fonction de température sur la frontière thermiquement isolée. Pour la démonstration du Théorème II nous nous sommes basés sur une idée de E. E. LEVI [3]. Le Théorème II peut être généralisé à des espaces de plus de trois dimensions.







## HŐVEZETÉSI ÉS DIFFÚZIÓS FELADATOK ÖSSZETETT PEREMFELTÉTELEKKEL, II.

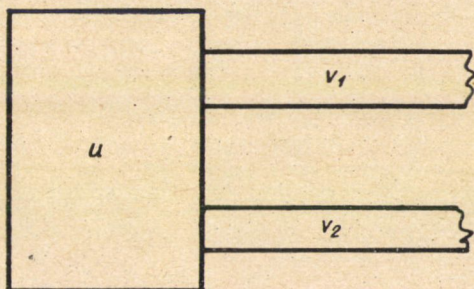
ADLER GYÖRGY

FREUD GÉZA [2] rúdra vonatkozó hővezetési feladatokat tárgyal, általa összetettnek nevezett peremfeltételek mellett.

Jelen cikk 1. §-ában két hasonló típusú feladatot oldok meg. A 2. §-ban igazolom a feladatok megoldása során végzett műveletek megengedett voltát. A 3. §-ban közlöm az 1. §-ban szereplő konstansok értékeit.

### 1. §. Két feladat

**A. feladat.** Egy hőtartályhoz két homogén, állandó keresztmetszetű, végtelen hosszú hővezető rúd csatlakozik. A hőtartályt olyan jó hővezetőnek képzeljük, hogy annak hőmérséklete csak időtől függ, helytől független. A hőtartály és a rudak között a lineáris hőátadási törvény érvényes. Felté-



1. ábra

telezzük, hogy a rudak egyes keresztmetszeteiben a hőmérséklet csak a tartálytól való távolságtól függ, vagyis adott keresztmetszet különböző pontjaiban a hőmérséklet ugyanaz. Más szóval a rudak oldalaik mentén hőszigeteltek. A keresett függvények tehát a hőtartály  $U(t)$  és a rudak  $V_1(x, t)$ , illetve  $V_2(x, t)$  hőmérséklete, ahol  $t$  az idő,  $x$  a hőtartálytól való távolság. A rudak anyagi minősége és keresztmetszete különböző is lehet, viszont megköveteljük, hogy a  $t = 0$  időpillanatban a rudak minden pontjában ugyanaz a  $V_1(x, 0) = V_2(x, 0) = \text{konst.}$  hőmérséklet uralkodjék és a továbbiakban ezt az értéket választjuk a hőmérsékleti skála nullpontjának.



$U(t)$ -re,  $V_1(x, t)$ -re és  $V_2(x, t)$ -re a következő egyenletek érvényesek, illetve a következő perem- és kezdeti feltételeket adjuk meg:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \kappa_1^2 \frac{\partial V_1}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \kappa_2^2 \frac{\partial V_2}{\partial t} \end{cases}$$

$$(2) \quad A \frac{dU}{dt} + B_1[U(t) - V_1(0, t)] + B_2[U(t) - V_2(0, t)] = Q(t)$$

$$(3) \quad \begin{cases} \left. \frac{\partial V_1}{\partial x} \right|_{x=0} = -C_1[U(t) - V_1(0, t)] \\ \left. \frac{\partial V_2}{\partial x} \right|_{x=0} = -C_2[U(t) - V_2(0, t)] \end{cases}$$

$$(4) \quad U(0) = U_0; \quad V_1(x, 0) = 0, \quad V_2(x, 0) = 0.$$

Az (1)–(3)-ban szereplő konstansok a hőtartály és a rudak anyagi minőségétől és méreteitől függenek és valamennyien pozitívak, ezt azonban a jelen A. feladatnál nem használjuk ki.  $Q(t)$  jelenti az időegység alatt a hőtartállyal közölt hő mennyiségét. Ezt ismertnek tekintjük. A (2) tulajdonképpen a hőtartály hőmérlege, mely a hőenergia megmaradását fejezi ki.

A  $V_1$  és  $V_2$  függvényeket a következő alakban keressük:

$$(5) \quad \begin{cases} V_1(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\kappa_1^2 x^2}{4(t-\tau)}} W_1(\tau) d\tau \\ V_2(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\kappa_2^2 x^2}{4(t-\tau)}} W_2(\tau) d\tau. \end{cases}$$

Ezt a választást a következők indokolják:

A  $e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{4t}} / \sqrt{t}$  úgynevezett hőpólus-függvény az (1) egyenletnek megoldása (lásd: [1]) és így a felvett  $V_1$ , illetve  $V_2$  függvények az (1) egyenleteket automatikusan kielégítik. Kielégítik továbbá a (4) kezdeti feltételek közül a két utolsót.

Az (5) alakú megoldások fizikai értelme az, hogy a rudakba az  $x = 0$  végen a  $\tau$  időpillanatban  $W_1(\tau)$ -val, illetve  $W_2(\tau)$ -val arányos hőmenyiség áramlik be időegység alatt és ez a rúdban szétáramlik. Ez a hővezetés elméletéből ismert tény.

Ílymódon az ismeretlen  $V_1$ ,  $V_2$  kétváltozós függvények helyett a  $W_1$ ,  $W_2$  egyváltozós függvényeket kell meghatároznunk.

A (2) és (3) egyenletek Laplace-transzformáltjából az  $U$ ,  $W_1$ ,  $W_2$  függvények Laplace-transzformáltjai kiszámíthatók a konvolúció-tétel segítségével (lásd: [4]). Ezek inverz transzformáltja a jelen A. esetben zárt alakban előállítható.



A Laplace-transzformáció operátorát jelöljük  $\mathcal{L}$ -lel. Legyen

$$\mathcal{L}[U(t)] = u(p), \quad \mathcal{L}[W_i(t)] = w_i(p) \quad (i = 1, 2).$$

A konvolúció-tétel:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \Phi(x, t - \tau) \psi(\tau) d\tau\right] = \mathcal{L}[\Phi(x, t)] \mathcal{L}[\psi(t)].$$

A  $\Phi(x, t)$  függvénynek megfelelő hőpólus-függvény Laplace-transzformáltja [3]-ban megtalálható.

A (2) és (3) egyenletek Laplace-transzformáltjai:

$$(2') \quad A[p u(p) - U_0] + B_1\left[u(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}} w_1(p)\right] + B_2\left[u(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}} w_2(p)\right] = q(p),$$

ahol

$$q(p) = \mathcal{L}[Q(t)].$$

$$(3') \quad -\kappa_1 \sqrt{\pi} w_1(p) = -C_1\left[u(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}} w_1(p)\right]$$

$$-\kappa_2 \sqrt{\pi} w_2(p) = -C_2\left[u(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}} w_2(p)\right].$$

Innen

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} g(\sqrt{p}), \quad w_1(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} h_1(\sqrt{p}), \quad w_2(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} h_2(\sqrt{p}),$$

ahol

$$g(p) = \frac{[q(p^2) + AU_0](\kappa_1 p + C_1)(\kappa_2 p + C_2)}{N(p)},$$

$$h_1(p) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \frac{[q(p^2) + AU_0](\kappa_2 p + C_2)p}{N(p)},$$

$$h_2(p) = \frac{C_2}{\sqrt{\pi}} \frac{[q(p^2) + AU_0](\kappa_1 p + C_1)p}{N(p)}.$$

$$N(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0.$$

(A cikkben előforduló konstansok értékét a 3. §-ban együtt közöljük.)

Az inverz Laplace-transzformációnál felhasználjuk a következő formulát (lásd [3], 169. oldal):

Ha  $F(t)$  Laplace-transzformáltja  $f(p)$ , akkor  $f(\sqrt{p})/\sqrt{p}$  inverz-transzformáltja:

$$(6) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} F(x) dx.$$



Azon célból, hogy az inverz Laplace-transzformáció explicite elvégezhető legyen, a  $Q(t)$  függvényt a következő alakban approximáljuk:

$$Q(t) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-\gamma_i t} \quad (\gamma_i \geq 0).$$

A feladat megoldását csak három speciális esetben végezzük el, mert a fenti alakú  $Q(t)$  esetén a feladat megoldása ezen három eset lineáris szuperpozíciója gyanánt állítható elő.

Ez a három speciális eset a következő:

1.  $U(0) = U_0, \quad Q(t) = 0;$
2.  $U(0) = 0, \quad Q(t) = Q_0;$
3.  $U(0) = 0, \quad Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t}.$

**1. eset:** Parciális törtekre való bontás után:

$$g(p) = \frac{AU_0}{a_3} \left[ \frac{\lambda_1}{p - p_1} + \frac{\lambda_2}{p - p_2} + \frac{\lambda_3}{p - p_3} \right],$$

ahol  $p_1, p_2$  és  $p_3$  az  $N(p) = 0$  egyenlet gyökei, amelyekről feltesszük, hogy különbözőek, továbbá

$$h_1(p) = \frac{AU_0 C_1}{a_3 \sqrt{\pi}} \left[ \frac{\mu_1}{p - p_1} + \frac{\mu_2}{p - p_2} + \frac{\mu_3}{p - p_3} \right].$$

Az inverz transzformáltak:

$$G(t) = \frac{AU_0}{a_3} \sum_{i=1}^3 \lambda_i e^{p_i t},$$

$$H_1(t) = \frac{AU_0 C_1}{a_3 \sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^3 \mu_i e^{p_i t}.$$

Végül (6) felhasználásával

$$U(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{AU_0}{a_3} \sum_{i=1}^3 \lambda_i e^{p_i t} \operatorname{Erf}(-p_i \sqrt{t}),$$

$$W_1(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{AU_0 C_1}{a_3 \sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^3 \mu_i e^{p_i t} \operatorname{Erf}(-p_i \sqrt{t}),$$

ahol

$$\operatorname{Erf}(x) = \int_x^\infty e^{-v^2} dv.$$

$W_2$  a  $W_1$ -ből az (1), (2) és (3) egyenletekben szereplő konstansok 1, illetve 2 indexeinek felcserélésével adódik.



**2. eset:** Az előzővel teljesen analóg számítással adódik:<sup>1)</sup>

$$U(t) = \frac{Q_0}{a_3} \left[ \lambda_4 + \lambda_5 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \operatorname{Erf}(-p_i \sqrt{t}) e^{p_i^2 t} \right]$$

$$W_1(t) = \frac{Q_0}{a_3} \left[ \mu_4 + \mu_5 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^3 \mu_i \operatorname{Erf}(-p_i \sqrt{t}) e^{p_i^2 t} \right].$$

**3. eset:**

$$Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t},$$

$$q(p) = \frac{Q_0}{p + \gamma}.$$

$g(p)$  és  $h_1(p)$  parciális törtekre bontása után kapjuk:

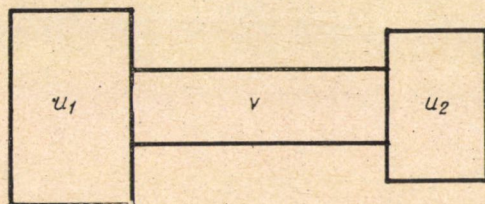
$$G(t) = \frac{Q_0}{a_3} \left[ \frac{\lambda_4}{\sqrt{\gamma}} \sin \sqrt{\gamma} t + \lambda_5 \cos \sqrt{\gamma} t + \sum_{i=1}^3 \lambda_i e^{p_i t} \right],$$

$$H_1(t) = \frac{Q_0}{a_3} \left[ \frac{\mu_4}{\sqrt{\gamma}} \sin \sqrt{\gamma} t + \mu_5 \cos \sqrt{\gamma} t + \sum_{i=1}^3 \mu_i e^{p_i t} \right],$$

$$U(t) = \frac{Q_0}{a_3} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \operatorname{Erf}(-p_i \sqrt{t}) e^{p_i^2 t} + \left( \lambda_5 + \lambda_4 \frac{2}{\sqrt{\gamma \pi}} \int_0^{\sqrt{\gamma \pi}} e^{x^2} dx \right) e^{-\gamma t} \right],$$

$$W_1(t) = \frac{C_1 Q_0}{a_3 \sqrt{\pi}} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^3 \mu_i \operatorname{Erf}(-p_i \sqrt{t}) e^{p_i^2 t} + \left( \mu_5 + \mu_4 \frac{2}{\sqrt{\gamma \pi}} \int_0^{\sqrt{\gamma \pi}} e^{x^2} dx \right) e^{-\gamma t} \right].$$

**B. feladat.** Egy  $l$  hosszúságú rúd mindkét végéhez csatlakozik egy-egy hőtartály, az A. feladatnál megadottakkal teljesen analóg feltételek mellett.



2. ábra

Megengedjük, hogy a hőtartályok anyagi minősége különböző legyen. A rúd hőmérsékletét  $V(x, t)$ -vel, a tartályokét  $U_1(t)$ -vel, illetve  $U_2(t)$ -vel jelöljük. A Laplace-transzformáltakat a megfelelő kis betűvel jelöljük.

<sup>1)</sup>  $\lambda_i$  és  $\mu_i$  természetesen most mást jelentenek, mint az 1. esetben.



Egyenleteink, illetve perem- és kezdeti feltételeink tehát a következők:

$$(7) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \kappa^2 \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$(8) \quad \begin{cases} A_1 \frac{dU_1}{dt} + B_1[U_1(t) - V(0, t)] = Q_1(t) \\ A_2 \frac{dU_2}{dt} + B_2[U_2(t) - V(l, t)] = Q_2(t) \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = -C_1[U_1(t) - V(0, t)] \\ \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=l} = C_2[U_2(t) - V(l, t)] \end{cases}$$

$$(10) \quad U_1(0) = U_{10}, \quad U_2(0) = U_{20}; \quad V(x, 0) = 0.$$

Itt  $A_i, B_i, C_i$  mind pozitívak. (8) itt is az egyes hőtartályok hőmérsékét fejezi ki. A  $V(x, t)$  függvényt most a következő alakban keressük:

$$V(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{4(t-\tau)}} W_1(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\kappa^2 (l-x)^2}{4(t-\tau)}} W_2(\tau) d\tau.$$

Ez a választás azért indokolt, mert a fenti alakú  $V(x, t)$  függvény kielégíti a (7) egyenletet és a (10) alatti kezdeti feltételt.  $V(x, t)$  egyes tagjai a rúd  $x=0$ , illetve  $x=l$  végén beáramló hőmennyiség további sorsáról adnak számot a rúd belsejében.  $W_1(t)$  és  $W_2(t)$  most is, mint az A. feladatnál, a megfelelő rúdvégeken időegység alatt beáramló hőmennyiségekkel arányosak.

A (8) és (9) egyenletek Laplace-transzformáltjai:

$$(8') \quad \begin{cases} A_1[p u_1(p) - U_{20}] + B_1 \left[ u_1(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}} w_1(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{\kappa l \sqrt{p}} w_2(p) \right] = q_1(p) \\ A_2[p u_2(p) - U_{20}] + B_2 \left[ u_2(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}} w_2(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{\kappa l \sqrt{p}} w_1(p) \right] = q_2(p) \end{cases}$$

$$(9') \quad \begin{cases} -a \sqrt{\pi} w_1(p) + a \sqrt{\pi} e^{-\kappa l \sqrt{p}} w_2(p) = \\ \quad = -C_1 \left[ u_1(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}} w_1(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\kappa l \sqrt{p}} w_2(p) \right] \\ a \sqrt{\pi} e^{-\kappa l \sqrt{p}} w_1(p) + a \sqrt{\pi} w_2(p) = \\ \quad = C_2 \left[ u_2(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\kappa l \sqrt{p}} w_1(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}} w_2(p) \right]. \end{cases}$$



Innen a keresett függvények Laplace-transzformáltjai:

$$\begin{aligned} u_1(p) &= \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\sqrt{\pi}}{C_1} \frac{\left(d_1 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} q_1\right) (a_2 p^{3/2} + b_2 p + c_2 p^{1/2}) - \left(d_2 + \frac{C_2}{\sqrt{\pi}} q_2\right) (-a_1 p^{3/2} + b_1 p - c_1 p^{1/2}) e^{-\kappa l \sqrt{p}}}{\sqrt{p} N(\sqrt{p}) e^{-\kappa l \sqrt{p}}} (a \sqrt{p} + C_1) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\sqrt{\pi}}{C_1} \frac{\left(d_2 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} q_2\right) (a_1 p^{3/2} + b_1 p + c_1 p^{1/2}) - \left(d_1 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} q_1\right) (-a_2 p^{3/2} + b_2 p - c_2 p^{1/2}) e^{-\kappa l \sqrt{p}}}{\sqrt{p} N(\sqrt{p}) e^{-\kappa l \sqrt{p}}} (a \sqrt{p} - C_1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} g_1(\sqrt{p}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(p) &= \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\sqrt{\pi}}{C_2} \frac{\left(d_2 + \frac{C_2}{\sqrt{\pi}} q_2\right) (a_1 p^{3/2} + b_1 p + c_1 p^{1/2}) - \left(d_1 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} q_1\right) (-a_2 p^{3/2} + b_2 p - c_2 p^{1/2}) e^{-\kappa l \sqrt{p}}}{\sqrt{p} N(\sqrt{p}) e^{-\kappa l \sqrt{p}}} (a \sqrt{p} + C_2) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\sqrt{\pi}}{C_2} \frac{\left(d_1 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} q_1\right) (a_2 p^{3/2} + b_2 p + c_2 p^{1/2}) - \left(d_2 + \frac{C_2}{\sqrt{\pi}} q_2\right) (-a_1 p^{3/2} + b_1 p - c_1 p^{1/2}) e^{-\kappa l \sqrt{p}}}{\sqrt{p} N(\sqrt{p}) e^{-\kappa l \sqrt{p}}} (a \sqrt{p} - C_2) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} g_2(\sqrt{p}). \end{aligned}$$

$$w_1(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\left(d_1 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} q_1\right) (a_2 p^{3/2} + b_2 p + c_2 p^{1/2}) - \left(d_2 + \frac{C_2}{\sqrt{\pi}} q_2\right) (-a_1 p^{3/2} + b_1 p - c_1 p^{1/2}) e^{-\kappa l \sqrt{p}}}{N(\sqrt{p}) e^{-\kappa l \sqrt{p}}} = \frac{1}{\sqrt{p}} h_1(\sqrt{p}).$$

$$w_2(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\left(d_2 + \frac{C_2}{\sqrt{\pi}} q_2\right) (a_1 p^{3/2} + b_1 p + c_1 p^{1/2}) - \left(d_1 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} q_1\right) (-a_2 p^{3/2} + b_2 p - c_2 p^{1/2}) e^{-\kappa l \sqrt{p}}}{N(\sqrt{p}) e^{-\kappa l \sqrt{p}}} = \frac{1}{\sqrt{p}} h_2(\sqrt{p}).$$

$$N(p) = (a_1 p^2 + b_1 p + c_1) (a_2 p^2 + b_2 p + c_2) e^{\kappa l \sqrt{p}} - (-a_1 p^2 + b_1 p - c_1) (-a_2 p^2 + b_2 p - c_2) e^{-\kappa l \sqrt{p}}.$$

A  $g_1, g_2, h_1, h_2$  függvények inverz transzformáltjait a reziduum-tétel felhasználásával állítjuk elő. Ugyanis a Riemann—Mellin-féle formula szerint a  $f(p)$  függvény inverz Laplace-transzformáltja (lásd: [4]):

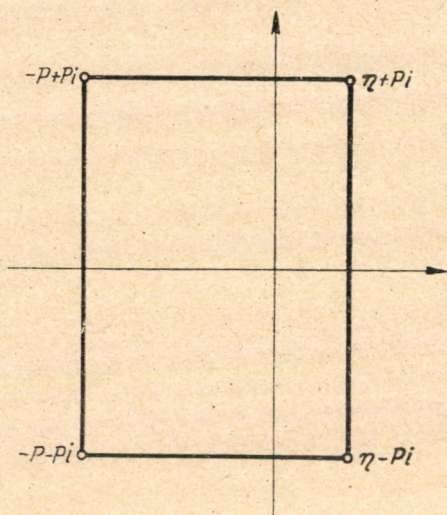
$$(11) \quad F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta - i\infty}^{\eta + i\infty} e^{pt} f(p) dp,$$

ahol  $\eta$  tetszőleges valós szám, melyre fennáll az, hogy a  $\operatorname{Re} p > \eta$  félsíkon  $f(p)$  reguláris. Bizonyítás nélkül fel fogjuk használni, hogy a  $g_1, g_2, h_1, h_2$  nevezőinek gyökhelyei, tehát ezen függvények összes szinguláris helyei az általunk vizsgálandó 1., 2. és 3. esetekben mind a képzetes tengelyen helyezkednek el. A reziduum-tétel alapján az ábrán megjelölt integrációs út esetén pl.  $h_1$ -re fennáll:

$$(12) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_S e^{pt} h_1(p) dp = \sum_S \operatorname{Res} [e^{pt} h_1(p)],$$



ahol  $\Sigma_S$  jelenti, hogy az összegezés csak az  $S$ -en belüli reziduumokra terjed ki, és  $P$  olyan, hogy az  $S$  integrációs úton  $h_1(p)$ -nek nincs szingularitása.



3. ábra

Tekintettel arra, hogy a  $N(p)$  nevező gyökeit  $p = i\varphi$  helyettesítés után a

$$(13) \quad \operatorname{tg} \kappa \varphi = \frac{\beta_3 \varphi^3 - \beta_1 \varphi}{\beta_4 \varphi^4 - \beta_2 \varphi^2 + \beta_0}$$

egyenlet szolgáltatja, elég nagy  $k$ -ra fennáll:

$$\kappa \varphi_k \approx k\pi, \quad \text{ha} \quad \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\kappa l} < \varphi_k < \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\kappa l},$$

tehát elég nagy  $n$ -re a  $P = (n + 1/2) \pi / \kappa l$  választással a  $P$ -re vonatkozó kikötést teljesíthetjük. Kimutatjuk a 2. §-ban, hogy  $P \rightarrow \infty$  esetén (12)-ben az  $(\eta + Pi, -P + Pi)$ ,  $(\eta - Pi, -P - Pi)$  és  $(-P - Pi, -P + Pi)$  utakon az integrál 0-hoz tart, és így:

$$H_1(t) = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta - Pi}^{\eta + Pi} e^{pt} h_1(p) dp = \sum \operatorname{Res} [e^{pt} h_1(p)].$$

Egyszerűség kedvéért az A. feladatnál mondottak mintájára a következő három speciális esetre szorítkozunk:

1.  $U_{10} \neq 0, \quad U_{20} = 0, \quad Q_1(t) = Q_2(t) = 0.$
2.  $U_{10} = U_{20} = 0, \quad Q_1(t) = Q_{10}, \quad Q_2(t) = 0.$
3.  $U_{10} = U_{20} = 0, \quad Q_1(t) = Q_{10} e^{-\lambda_1 t}, \quad Q_2(t) = 0.$



Ezen esetek lineáris szuperpozíciójával az általános eset approximálható. A részletszámítások mellőzésével kapjuk:

$$U_i(t) = k_{i1} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} k_{i2} \sqrt{t} + 2 k_{i3} t + \sum_{\varphi_k > 0}^* \left( p_{ik} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} q_{ik} \int_0^{\varphi_k \sqrt{t}} e^{x^2} dx \right) e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_i(t) = l_{i1} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} l_{i2} \sqrt{t} + \sum_{\varphi_k > 0}^* \left( r_{ik} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_{sk} \int_0^{\varphi_k \sqrt{t}} e^{x^2} dx \right) e^{-\varphi_k^2 t}.$$

Itt  $\Sigma^*$  azt jelenti, hogy a 3. esetben az összegezés a  $p^2 + \lambda_1 = 0$  egyenlet azon gyökére is kiterjed, melyre  $\operatorname{Im} p > 0$ . Az  $U_i(t)$  és  $W_i(t)$  függvények kiszámításánál ismét a (6) képletet használjuk fel.

A fentebb tárgyalt hővezetési feladatokkal analóg diffúziós problémák, melyek ugyanazokra az egyenletekre vezetnek, mint a fentebbi hővezetési feladatok:

**A'. feladat.** Valamilyen anyag fel van oldva egy tartályban levő oldószerben. Az oldat koncentrációja ne függjön a helytől, ami pl. állandó keveréssel elérhető. Ehhez a tartályhoz csatlakozik két végtelen hosszú cső, melyek különböző oldószerekkel vannak töltve. A tartályba állandóan betöltünk az oldódó anyagból, mely ott azonnal feloldódik és bediffundál a két csőben levő oldószerbe. A csövekben az oldódó anyag koncentrációja a  $t = 0$  időpillanatban zérus.

Keresendő az anyag koncentrációja, mint az idő, illetve mint az idő és hely függvénye a tartályban, illetve a csövekben. Most az A. feladatban szereplő  $U(t)$ ,  $V_1(x, t)$  és  $V_2(x, t)$  koncentrációkat,  $Q(t)$  pedig az időegység alatt a tartályba töltött anyagmennyiséget jelenti.

**B'. feladat.** Két tartály, melyekben a fentiekhez hasonlóan valamilyen oldat van, egy csővel vannak összekötve, melyben oldószer van. A két tartályba állandóan töltünk a feloldandó anyagból, mely ott azonnal feloldódik és bediffundál a csőbe. Feltesszük, hogy a tartályban a koncentráció a helytől független. A  $t = 0$  időpillanatban a csőben a koncentráció legyen zérus.

Megint keresendő a koncentráció a tartályokban, illetve a csőben, mint az idő, illetve a hely és idő függvénye.  $Q_1(t)$  és  $Q_2(t)$  megint a tartályokban időegység alatt töltött anyagmennyiséget,  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$  és  $V(x, t)$  koncentrációkat jelentenek.

## 2. §. Bizonyítási részletek

A B. feladat számítása során végzett műveletek legitim voltának igazolásához a következő fontosabb tények bizonyítása szorul részletesebb megfontolásokra:

a) A (12) integrálban az  $(\eta + P_i, -P + P_i)$ ,  $(\eta - P_i, -P - P_i)$  és  $(-P - P_i, -P + P_i)$  utakon  $P \rightarrow \infty$  esetén az integrál 0-hoz tart.

b) A  $G_i$ -t és  $H_i$ -t előállító sorok  $t \geq t_0 > 0$  esetén egyenletesen konvergenssek,  $t = 0$  körül is korlátos részletösszegekkel rendelkeznek és így a (6) formula felhasználható  $U_i$  és  $W_i$  kiszámítására, mégpedig lehetséges a  $G_i$  és  $H_i$  sorának tagonkénti integrálása.



c) Kimutatjuk még, hogy a

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{4(t-\tau)}} W(\tau) d\tau$$

kifejezésnek  $x \rightarrow 0$  esetén van lime se és így a (3), illetve (9) peremfeltételek nem illuzórikusak.

A fenti állításokat nem bizonyítjuk be külön-külön minden egyes esetre, hanem csak egyes kiragadott példákra, a többi eset ugyanígy bizonyítható.

a) Például az 1. esetben :

$$h_1(p) = d_1! \frac{a_2 p^2 + b_2 p^2 + c_2 p}{(1 + e^{-2\kappa l p}) (\beta_3 p^3 + \beta_1 p) + (1 - e^{-2\kappa l p}) (\beta_4 p^4 + \beta_2 p^2 + \beta_0)} = O\left(\frac{1}{p}\right).$$

$p = iP + y$  ( $y$  valós) esetén

$$\left| \int_{(i-1)P}^{iP+\eta} e^{pt} h_1(p) dp \right| < \int_{iP-\eta}^{iP+\eta} e^{\eta t} O\left(\frac{1}{p}\right) |dp| + \int_{-P}^{-\eta} e^{yt} O\left(\frac{1}{p}\right) dy =$$

$$= O\left(\frac{1}{p}\right) \left[ 2\eta e^{\eta t} + \frac{1}{t} e^{-\eta t} \right] \rightarrow 0, \quad \text{ha } P \rightarrow \infty.$$

Ugyanígy intézhető el az alsó vízszintes úton számított integrál is. Ha  $K$  elég nagy, akkor a  $\operatorname{Re} p < -K$  félsíkon  $h_1(p) = O(1)$ , és így

$$\left| \int_{-P-iP}^{-P+iP} e^{pt} h_1(p) dp \right| \leq 2P O(1) e^{-Pt} \rightarrow 0, \quad \text{ha } P \rightarrow \infty.$$

b) Az, hogy pl. az 1. esetben  $t \geq t_0 > 0$  esetén pl.  $H_1(t)$  sora egyenletesen konvergens, következik az előző a) alatti integrál becsléséből. Annak bizonyítására, hogy  $0 \leq t < t_0$  esetén a részletösszegek korlátosak, kicsit részletesebben kell eljárunk. A fenti  $H_1(t)$  a következő alakú :

$$H_1(t) = d_1 \sum_{\varphi_k > 0} \frac{\cos \kappa l \varphi_k (-b_2 \varphi_k^2) + \sin \kappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^2 - c_2 \varphi_k)}{\cos \kappa l \varphi_k (\gamma_4 \varphi_k^4 - \gamma_2 \varphi_k^2 + \gamma_0) + \sin \kappa l \varphi_k (\gamma_3 \varphi_k^3 - \gamma_1 \varphi_k)} \cos \varphi_k t +$$

$$+ d_1 \sum_{\varphi_k < 0} \frac{\cos \kappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^2 - c_2 \varphi_k) + \sin \kappa l \varphi_k (b_2 \varphi_k^2)}{\cos \kappa l \varphi_k (\gamma_4 \varphi_k^4 - \gamma_2 \varphi_k^2 + \gamma_0) + \sin \kappa l \varphi_k (\gamma_3 \varphi_k^3 - \gamma_1 \varphi_k)} \sin \varphi_k t.$$

Tekintsük pl. a  $\sin \varphi_k t$  együtthatóját. (13)-ból

$$\varphi_k = k \frac{\pi}{\kappa l} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$



Ezért

$$\cos \kappa l \varphi_k = \cos \left[ k\pi + \kappa l O\left(\frac{1}{k}\right) \right] = \pm 1 + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

és így  $\sin \varphi_k t$  együtthatójára

$$d_1 \frac{\cos \kappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^3 - c_2 \varphi_k) + \sin \kappa l \varphi_k (b_2 \varphi_k^2)}{\cos \kappa l \varphi_k (\gamma_4 \varphi_k^4 - \gamma_2 \varphi_k^2 + \gamma_0) + \sin \kappa l \varphi_k (\gamma_3 \varphi_k^3 - \gamma_1 \varphi_k)} = \frac{d_1 a_2 \kappa l}{\gamma_4 \pi} \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Mivel

$$\sin \varphi_k t = \sin k \frac{\pi t}{\kappa l} + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

kapjuk:

$$\begin{aligned} d_1 \frac{[\cos \kappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^3 - c_2 \varphi_k) + \sin \kappa l \varphi_k (b_2 \varphi_k^2)] \sin \varphi_k t}{\cos \kappa l \varphi_k (\gamma_4 \varphi_k^4 - \gamma_2 \varphi_k^2 + \gamma_0) + \sin \kappa l \varphi_k (\gamma_3 \varphi_k^3 - \gamma_1 \varphi_k)} = \\ = \frac{d_1 a_2 \kappa l}{\gamma_4 \pi} \frac{\sin k \frac{\pi t}{\kappa l}}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$

Mivel a

$$\sum \frac{\sin k \frac{\pi t}{\kappa l}}{k} \quad \text{és} \quad \sum \frac{1}{k^2}$$

sorok részletösszegei korlátosak, következik, hogy  $H_1(t)$ -ben a szinuszos sor részletösszegei is korlátosak.

Ugyanez a tény a koszinuszos sorra is azonnal belátható, mert az együtthatók abszolút konvergens sort alkotnak.

c)

$$\begin{aligned} I &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{4(t-\tau)}} W(\tau) d\tau = \\ &= -\frac{\kappa^2}{2} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{4(t-\tau)}} W(\tau) d\tau = -\frac{\kappa^2}{2} x \int_0^t \frac{e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{4u}}}{u^{3/2}} W(t-u) du. \end{aligned}$$

Legyen  $\delta > 0$  olyan kicsiny, hogy

$$W(t) - \varepsilon < W(t-u) < W(t) + \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 \leq u < \delta.$$

Ez  $W(t)$  folytonossága miatt lehetséges. Ekkor  $I$ -t két részre bontjuk:

$$I = -\frac{\kappa^2}{2} x \int_0^\delta \frac{e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{4u}}}{u^{3/2}} W(t-u) du - \frac{\kappa^2}{2} x \int_\delta^t \frac{e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{4u}}}{u^{3/2}} W(t-u) du.$$



Itt a második integrál  $x \rightarrow 0$  esetén 0-hoz tart. Az első integrálra fennáll

$$\begin{aligned}
 -\frac{\kappa^2}{2} x [W(t) - \varepsilon] \int_0^\delta \frac{e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{4u}}}{u^{3/2}} du &> -\frac{\kappa^2}{2} x \int_0^\delta \frac{e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{4u}}}{u^{3/2}} W(t-u) du > \\
 &> -\frac{\kappa^2}{2} x [W(t) + \varepsilon] \int_0^\delta \frac{e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{4u}}}{u^{3/2}} du.
 \end{aligned}$$

Mivel

$$\int_0^\delta \frac{e^{-\frac{\kappa^2 x^2}{4u}}}{u^{3/2}} du = \frac{4}{\kappa x} \int_{\frac{\kappa x}{2} \sqrt{\frac{1}{\delta}}}^\infty e^{-s^2} ds,$$

$x \rightarrow 0$ -esetén azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} I = -\kappa \sqrt{\pi} W(t).$$

### 3. §. Az 1–2. §-okban előforduló konstansok jelentése

#### A. feladat

$$a_0 = B_1 C_2 \kappa_1 + B_2 C_1 \kappa_2$$

$$a_1 = A C_1 C_2 + \kappa_1 \kappa_2 (B_1 + B_2)$$

$$a_2 = A (C_1 \kappa_2 + C_2 \kappa_1)$$

$$a_3 = A \kappa_1 \kappa_2$$

#### 1. eset:

$$\lambda_1 = \frac{\kappa_1 \kappa_2 p_1^2 + (C_1 \kappa_2 + C_2 \kappa_1) p_1 + C_1 C_2}{\Gamma_1}, \quad \lambda_2 = \dots, \quad \lambda_3 = \dots,$$

$$\mu_1 = \frac{\kappa_2 p_1^2 + C_2 p_1}{\Gamma_1}, \quad \mu_2 = \dots, \quad \mu_3 \dots$$

$$\Gamma_1 = p_1^2 - p_1(p_2 + p_3) + p_2 p_3.$$

( $\lambda_2, \lambda_3, \mu_2$ , és  $\mu_3$  — később is — a „ $p$ ”-k indexeinek ciklikus felcserélésével adódnak.)



2. eset:

$$\lambda_1 = \frac{Kp_1^2 - Lp_1 + M}{\Gamma_1}, \quad \lambda_2 = \dots, \quad \lambda_3 = \dots,$$

$$\lambda_4 = \frac{a_3}{a_0} \left[ (C_1\kappa_2 + C_2\kappa_1) - \frac{C_1C_2a_1}{a_0} \right]$$

$$\lambda_5 = \frac{C_1C_2a_3}{a_0},$$

$$\mu_1 = \frac{Rp_1^2 - Sp_1 + T}{\Gamma_1}, \quad \mu_2 = \dots, \quad \mu_3 = \dots,$$

$$\mu_4 = \frac{C_2a_3}{a_0},$$

$$K = -\lambda_4, \quad L = \lambda_4 \frac{a_2}{a_3} + \lambda_5, \quad M = \kappa_1\kappa_2 - \lambda_4 \frac{a_1}{a_3} - \lambda_5 \frac{a_2}{a_3},$$

$$R = -\mu_4, \quad S = \mu_4 \frac{a_2}{a_3}, \quad T = \kappa_2 - \mu_4 \frac{a_1}{a_3}.$$

3. eset :

$$\lambda_1 = \frac{Kp_1^2 - Lp_1 + M}{\Gamma_1}, \quad \lambda_2 = \dots, \quad \lambda_3 = \dots,$$

$$\lambda_4 = \frac{-(C_1\kappa_2 + C_2\kappa_1) \left( \frac{a_1}{a_3} - \gamma \right) \gamma - (\kappa_1\kappa_2\gamma - C_1C_2) \left( \frac{a_0}{a_3} - \gamma \frac{a_2}{a_3} \right)}{\Delta},$$

$$\lambda_5 = \frac{(\kappa_1\kappa_2\gamma - C_1C_2) \left( \frac{a_1}{a_2} - \gamma \right) + (C_1\kappa_2 + C_2\kappa_1) \left( \gamma \frac{a_2}{a_3} - \frac{a_0}{a_3} \right)}{\Delta}.$$

$$\mu_1 = \frac{Rp_1^2 - Sp_1 + T}{\Gamma_1}, \quad \mu_2 = \dots, \quad \mu_3 = \dots,$$

$$\mu_4 = \frac{-C_2\gamma \left( \frac{a_1}{a_3} - \gamma \right) - \gamma\kappa_2 \left( \frac{a_0}{a_3} - \gamma \frac{a_2}{a_3} \right)}{\Delta},$$

$$\mu_5 = \frac{\kappa_2\gamma \left( \frac{a_1}{a_3} - \gamma \right) + C_2 \left( \gamma \frac{a_2}{a_3} - \frac{a_0}{a_3} \right)}{\Delta},$$



$$\Delta = \gamma \left( \frac{a_1}{a_3} - \gamma \right)^2 + \left( \frac{a_0}{a_3} - \gamma \frac{a_2}{a_3} \right)^2.$$

$$K = -\lambda_5, \quad L = \lambda_4 + \lambda_5 \frac{a_2}{a_3}, \quad M = \frac{1}{\gamma} \left( C_1 C_2 - \lambda_4 \frac{a_0}{a_3} \right),$$

$$R = -\mu_5, \quad S = \mu_4 + \mu_5 \frac{a_2}{a_3}, \quad T = -\frac{1}{\gamma} \mu_4 \frac{a_0}{a_3}.$$

### B. feladat :

$$a_1 = \varkappa A_1, \quad b_1 = A_1 C_1, \quad c_1 = \varkappa B_1, \quad d_1 = \frac{A_1 C_1 U_{10}}{\sqrt{\pi}},$$

$$a_2 = \varkappa A_2, \quad b_2 = A_2 C_2, \quad c_2 = \varkappa B_2, \quad d_2 = \frac{A_2 C_2 U_{20}}{\sqrt{\pi}}.$$

$$\beta_0 = c_1 c_2, \quad \beta_1 = b_1 c_2 + b_2 c_1, \quad \beta_2 = a_1 c_2 + b_1 b_2 + c_1 a_2$$

$$\beta_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1, \quad \beta_4 = a_1 a_2$$

$$\gamma_0 = \beta_1 + \beta_0 \varkappa l, \quad \gamma_1 = 2\beta_2 + \beta_1 \varkappa l, \quad \gamma_2 = 3\beta_3 + \beta_2 \varkappa l$$

$$\gamma_3 = 4\beta_4 + \beta_3 \varkappa l, \quad \gamma_4 = \beta_4 \varkappa l.$$

$$\alpha_0 = c_2 C_1, \quad \alpha_1 = b_2 C_1 + c_2 \varkappa, \quad \alpha_2 = a_2 C_1 + b_2 \varkappa, \quad \alpha_3 = \varkappa a_2$$

$$\delta_0 = c_2 C_2, \quad \delta_1 = -b_2 C_2 + c_2 \varkappa, \quad \delta_2 = a_2 C_2 - b_2 \varkappa, \quad \delta_3 = \varkappa a_2.$$

### 1. eset :

$$k_{11} = \frac{\sqrt{\pi} d_1 c_2}{\gamma_0}, \quad k_{21} = \frac{\sqrt{\pi} d_1 c_2}{\gamma_0},$$

$$k_{12} = k_{22} = k_{13} = k_{23} = 0$$

$$l_{11} = l_{21} = l_{12} = l_{22} = 0$$

$$p_{1k} = \frac{\sqrt{\pi} d_1}{C_1} \frac{\cos \varkappa l \varphi_k (-\alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_0) + \sin \varkappa l \varphi_k (\alpha_3 \varphi_k^3 - \alpha_1 \varphi_k) - (\alpha_2 \varphi_k^2 - \alpha_0)}{M_\gamma},$$

$$q_{1k} = \frac{\sqrt{\pi} d_1}{C_1} \frac{\cos \varkappa l \varphi_k (\alpha_3 \varphi_k^3 - \alpha_1 \varphi_k) + \sin \varkappa l \varphi_k (\alpha_2 \varphi_k^2 - \alpha_0) - (\alpha_3 \varphi_k^3 - \alpha_1 \varphi_k)}{M_\gamma},$$

$$p_{2k} = \frac{\sqrt{\pi} d_1}{C_2} \frac{\cos \varkappa l \varphi_k (-\delta_2 \varphi_k^2 + \delta_0) + \sin \varkappa l \varphi_k (-\delta_3 \varphi_k^3 + \delta_1 \varphi_k) - (\delta_2 \varphi_k^2 - \delta_0)}{M_\gamma},$$

$$q_{2k} = \frac{\sqrt{\pi} d_1}{C_2} \frac{\cos \varkappa l \varphi_k (-\delta_3 \varphi_k^3 + \delta_1 \varphi_k) + \sin \varkappa l \varphi_k (\delta_2 \varphi_k^2 - \delta_0) - (-\delta_3 \varphi_k^3 + \delta_1 \varphi_k)}{M_\gamma},$$



$$r_{1k} = d_1 \frac{\cos \kappa l \varphi_k (-b_2 \varphi_k^2) + \sin \kappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^3 - c_2 \varphi_k)}{M_\gamma},$$

$$s_{1k} = d_1 \frac{\cos \kappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^3 - c_2 \varphi_k) + \sin \kappa l \varphi_k (b_2 \varphi_k^2)}{M_\gamma},$$

$$r_{2k} = d_1 \frac{b_2 \varphi_k^2}{M_\gamma},$$

$$s_{2k} = d_1 \frac{a_2 \varphi_k^3 - c_2 \varphi_k}{M_\gamma},$$

$$M_\gamma = \cos \kappa l \varphi_k (\gamma_4 \varphi_k^4 - \gamma_2 \varphi_k^2 + \gamma_0) + \sin \kappa l \varphi_k (\gamma_3 \varphi_k^3 - \gamma_1 \varphi_k).$$

2. eset :

$$k_{11} = Q_{10} \frac{\left(2\alpha_2 + \alpha_1 \kappa l + \frac{\alpha_0}{2} \kappa^2 l^2\right) (\beta_1 + \beta_0 \kappa l) - \alpha_0 \left(2\beta_3 + 2\beta_2 \kappa l + \beta_1 \kappa^2 l^2 + \frac{\beta_0}{3} \kappa^3 l^3\right)}{2 A^2}$$

$$k_{21} = Q_{10} \frac{C_1}{C_2} \frac{\left(2\delta_2 - \delta_1 \kappa l + \frac{\delta_0}{2} \kappa^2 l^2\right) (\beta_1 + \beta_0 \kappa l) - \delta_0 \left(2\beta_3 + 2\beta_2 \kappa l + \beta_1 \kappa^2 l^2 + \frac{\beta_0}{3} \kappa^3 l^3\right)}{2 A^2}$$

$$k_{12} = Q_{10} \frac{\alpha_0 \kappa l}{2 A},$$

$$k_{13} = Q_{10} \frac{\alpha_0}{4 A},$$

$$k_{22} = Q_{10} \frac{C_1}{C_2} \frac{\delta_0 \kappa l}{2 A},$$

$$k_{23} = Q_{10} \frac{C_1}{C_3} \frac{\delta_0}{4 A},$$

$$l_{11} = \frac{C_1 Q_{10}}{\sqrt{\pi}} \frac{b_2 + c_2 \kappa l}{2 A}, \quad l_{12} = \frac{C_1 Q_{10}}{\sqrt{\pi}} \frac{C_2}{2 A},$$

$$l_{21} = \frac{C_1 Q_{10}}{\sqrt{\pi}} \frac{-b_2}{2 A}, \quad l_{22} = \frac{C_1 Q_{10}}{\sqrt{\pi}} \frac{c_2}{2 A},$$

$$A = \beta_1 + \beta_0 \kappa l.$$

3. eset :

$$k_{11} = Q_{10} \frac{c_2 C_1}{\gamma_0 \lambda_1}, \quad k_{21} = Q_{10} \frac{c_2 C_1}{\gamma_0 \lambda_1},$$

$$k_{12} = k_{22} = k_{13} = k_{23} = 0,$$

$$l_{11} = l_{12} = l_{21} = l_{22} = 0.$$



**2. és 3. eset:** (a 2. esetben  $\lambda_1 = 0$  helyettesítendő)

$$p_{1k} = Q_{10} \frac{\cos \kappa l \varphi_k (-\alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_0) + \sin \kappa l \varphi_k (\alpha_3 \varphi_k^3 - \alpha_1 \varphi_k) - (\alpha_2 \varphi_k^2 - \alpha_0)}{M_\varepsilon},$$

$$q_{1k} = Q_{10} \frac{\cos \kappa l \varphi_k (\alpha_3 \varphi_k^3 - \alpha_1 \varphi_k) + \sin \kappa l \varphi_k (\alpha_2 \varphi_k^2 - \alpha_0) - (\alpha_3 \varphi_k^3 - \alpha_1 \varphi_k)}{M_\varepsilon},$$

$$p_{2k} = Q_{10} \frac{C_1}{C_2} \frac{\cos \kappa l \varphi_k (-\delta_2 \varphi_k^2 + \delta_0) + \sin \kappa l \varphi_k (-\delta_3 \varphi_k^3 + \delta_1 \varphi_k) - (\delta_2 \varphi_k^2 - \delta_0)}{M_\varepsilon},$$

$$q_{2k} = Q_{10} \frac{C_1}{C_2} \frac{\cos \kappa l \varphi_k (-\delta_3 \varphi_k^3 + \delta_1 \varphi_k) + \sin \kappa l \varphi_k (\delta_2 \varphi_k^2 - \delta_0) - (-\delta_3 \varphi_k^3 + \delta_1 \varphi_k)}{M_\varepsilon},$$

$$r_{1k} = Q_{10} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos \kappa l \varphi_k (-b_2 \varphi_k^2) + \sin \kappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^2 - c_2 \varphi_k)}{M_\varepsilon},$$

$$s_{1k} = Q_{10} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos \kappa l \varphi_k (a_2 \varphi_k^2 - c_2 \varphi_k) + \sin \kappa l \varphi_k (b_2 \varphi_k^2)}{M_\varepsilon},$$

$$r_{2k} = Q_{10} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \frac{b_2 \varphi_k^2}{M_\varepsilon},$$

$$s_{2k} = Q_{10} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \frac{a_2 \varphi_k^2 - c_2 \varphi_k}{M_\varepsilon}.$$

$$M_\varepsilon = \cos \kappa l \varphi_k (-\varepsilon_6 \varphi_k^6 + \varepsilon_4 \varphi_k^4 - \varepsilon_2 \varphi_k^2 + \varepsilon_0) + \sin \kappa l \varphi_k (-\varepsilon_5 \varphi_k^5 + \varepsilon_3 \varphi_k^3 - \varepsilon_1 \varphi_k)$$

$$\varepsilon_0 = \gamma_0 \lambda_1, \quad \varepsilon_1 = \gamma_1 \lambda_1 + 2 \beta_0, \quad \varepsilon_2 = \gamma_2 \lambda_1 + \gamma_0 + 2 \beta_1$$

$$\varepsilon_3 = \gamma_3 \lambda_1 + \gamma_1 + 2 \beta_2, \quad \varepsilon_4 = \gamma_4 \lambda_1 + \gamma_2 + 2 \beta_3, \quad \varepsilon_5 = \gamma_3 + 2 \beta_4, \quad \varepsilon_6 = \gamma_4.$$

#### IRODALOM

- [1] H. S. CARSLAW: *Introduction to the theory of Fourier's series and integrals and the mathematical theory of the conduction of heat*. Macmillan, London, 1906.
- [2] FREUD G.: „Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel, I.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1955) 369–394.
- [3] W. MAGNUS — F. OBERHETTINGER: *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*. Springer, Berlin, 1948.
- [4] K. W. WAGNER: *Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation*. Barth., Leipzig, 1950.

(Beérkezett: 1956. I. 12.)



# СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ, II.

ДЬ. АДЛЕР

## Резюме

В § 1 решаются две задачи для уравнения теплопроводности и аналогичные им задачи о диффузии. Первая задача относится к системе, состоящей из теплового резервуара и двух примыкающих к нему бесконечных теплопроводных стержней. Система, фигурирующая во второй задаче, состоит из двух тепловых резервуаров и соединяющего их теплопроводного стержня.

Температуру стержней ищем в виде интеграла типа конволюции (см. например, [5]). Это даёт возможность вычислять преобразования по Лапласу введённых таким образом функций из системы линейных уравнений, после подстановки этих функций в уравнения теплопроводности и преобразования последних по Лапласу. Обратные преобразования по Лапласу и в случае задачи А. мы смогли получить в явной форме, а в случае задачи В. в виде бесконечных рядов на основании формулы Рунмана—Мэллина с помощью теоремы о вычетах.

В § 2 доказываться законность действий, произведенных при решении задач.

В § 3 приведены значения постоянных, встречающихся в §§ 1—2.

# PROBLÈMES DE CONDUCTION DE LA CHALEUR ET DE DIFFUSION AVEC CONDITIONS AUX LIMITES COMPOSÉES, II.

GY. ADLER

## Résumé

Dans le §. 1. deux problèmes de conduction de la chaleur, et en même temps deux problèmes analogues de diffusion sont résolus. Le premier problème A. se rapporte à un système se composant d'un réservoir de chaleur et de deux barres conductrices de chaleur infiniment longues, appliquées au réservoir. Le système figurant dans le deuxième problème B. est composé de deux réservoirs de chaleur, et d'une barre conductrice de chaleur, qui les réunit.

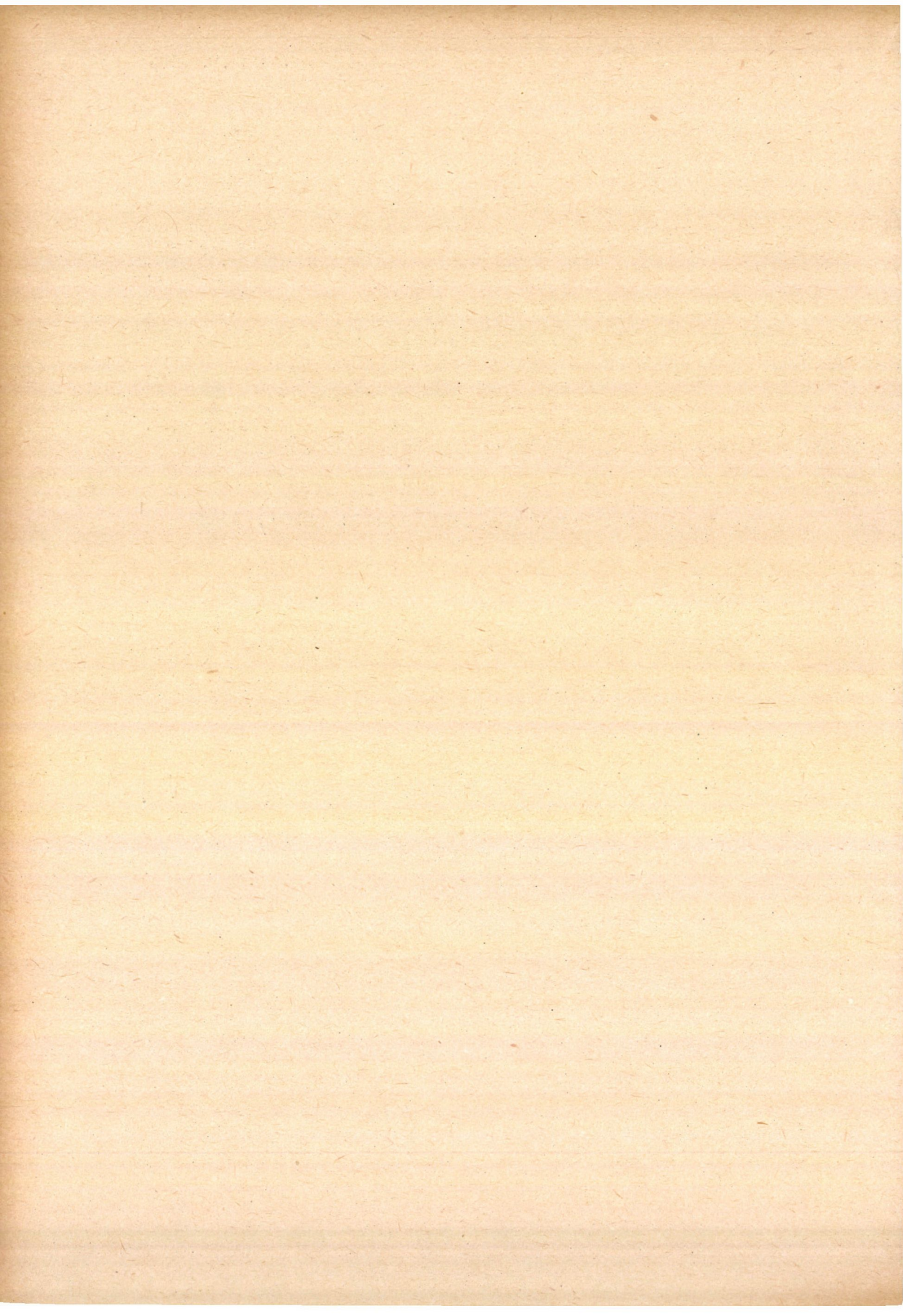
On cherche la température des barres sous une forme d'intégrale de type de convolution (cf. par ex. (5)). Par cette méthode il est possible de calculer les transformées Laplaciennes des nouvelles fonctions inconnues ainsi introduites à partir d'un système d'équations linéaires, obtenu par une substitution aux conditions inhomogènes aux limites et une transformation de Laplace de ces conditions, parce que les équations différentielles et les conditions homogènes aux limites sont automatiquement satisfaites.

Dans le problème A. on peut présenter les transformées Laplaciennes inverses sous une forme explicite, cependant dans le problème B. elles sont produites en vertu de la formule de Riemann—Mellin à l'aide du théorème du résidu sous la forme d'une série infinie.

Dans le §. 2. nous avons vérifié l'exactitude de certaines opérations faites au cours de la solution des problèmes.

Dans le §. 3. les valeurs des constantes figurant dans le §. 1. et 2. sont indiquées.







## HŐVEZETÉS VÉGTELEN RÚDBAN, II.

CZIPSZER JÁNOS

A

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

hővezetési differenciálegyenletnek a  $0 < t < c$  sávon abszolút konvergens

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

Poisson—Stieltjes-integrál alakjában előállítható megoldásaira vonatkozó vizsgálatainkat (lásd: [1]) néhány unicitási tétellel kívánjuk kiegészíteni. Ezek az unicitási tételek arra vonatkoznak, hogy az  $u(x, t)$  függvényt a  $t=0$ -hoz tartozó kezdeti értékek mennyiben határozzák meg egyértelműen. Az 1. §-ban általánosítjuk D. V. WIDDER egy idevágó tételét, míg a 2. §-ban a WIDDER-féle tétel és az I. részben már idézett TYHONOV-féle unicitási tétel közös általánosítását nyújtjuk.

### 1. §.

**Widder-tétele** (lásd: [6], 94. oldal, 7. tétel): *Ha  $u(x, t)$  az (1) differenciálegyenlet folytonos és nemnegatív megoldása a  $0 < t < c$  sávon, továbbá, ha  $\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t)$  minden  $x$ -re létezik és egyenlő 0-val, akkor  $u(x, t) \equiv 0$ .<sup>1)</sup>*

Ez a tétel valójában nem unicitási tétel, hiszen (1) két pozitív megoldásának a különbsége nem szükségképpen jeltartó, s így WIDDER tétele nem zárja ki annak a lehetőségét, hogy (1)-nek létezzen két különböző, de azonos kezdeti értékkel rendelkező, nemnegatív és folytonos megoldása a  $0 < t < c$  sávon.

Ahhoz, hogy unicitási tételt nyerhessünk, WIDDER tételét általánosítjuk úgy, hogy az  $u(x, t)$  függvénytől, ahelyett, hogy nemnegatív legyen, csak annyit követelünk meg, hogy (1) két nemnegatív és folytonos megoldásának

<sup>1)</sup> Megjegyzendő, hogy az idézett helyen még fel van téve, hogy  $u(x, t)$  első és második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak. Erre azonban nincsen szükség, mert az (1) differenciálegyenlet nyílt halmazon értelmezett folytonos megoldásainak tetszőleges-rendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak (lásd: [3], 359. oldal).



különbségeként legyen előállítható. Másrészt WIDDER egyik tétele szerint (lásd: [6], 92. oldal, 6. tétel, vagy [1], 369. oldal) (1)-nek a  $0 < t < c$  sávon értelmezett folytonos és nemnegatív megoldásai

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

Poisson—Stieltjes-integrál alakjában állíthatók elő monoton növekedő  $\alpha(y)$  függvényvel, és fordítva, ha  $\alpha(y)$  monoton nő, és ha a (2) alatti integrál minden  $x$ -re és  $0 < t < c$ -re konvergál, akkor ez az integrál mint  $x$  és  $t$  függvénye (1) folytonos megoldása a  $0 < t < c$  sávon. (Lásd az <sup>1)</sup> lábjegyzetet az előző oldalon.)

Innen és a korlátos variációjú függvények felbontására vonatkozó Jordan-féle felbontási tételből rögtön következik, hogy egy  $u(x, t)$  függvény akkor és csak akkor állítható elő (1) két nemnegatív és folytonos megoldásának különbségeként a  $0 < t < c$  sávon, ha  $u(x, t)$  (2) alakú abszolút konvergens Stieltjes-integrállal<sup>2)</sup> fejezhető ki. Ennélfogva WIDDER tételének jelzett általánosítása a következőképpen fogalmazható meg: *Ha  $u(x, t)$  (2) alakú, abszolút konvergens Stieltjes-integrállal fejezhető ki a  $0 < t < c$  sávon, és  $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) \equiv 0$  minden  $x$ -re, akkor  $u(x, t) \equiv 0$ .* Ezt a tételt még tovább általánosíthatjuk, amennyiben elég annyit feltenni, hogy (2) mint improprius Stieltjes-integrál létezik, az abszolút konvergenciára pedig nincs szükség. Így a következő tételre jutunk:

**I. tétel:** *Legyen*

$$(3) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y),$$

ahol  $\alpha(y)$  minden véges intervallumon korlátos variációjú és a jobb oldalon álló improprius Stieltjes-integrál minden  $x$ -re és  $0 < t < c$ -re létezik. (Más szóval

$$\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \int_0^{\Omega} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y) \quad \text{és} \quad \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \int_{-\Omega}^0 e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

minden  $x$ -re és  $0 < t < c$ -re létezik és véges.) Tegyük fel, hogy minden  $x$ -re  $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = 0$ . Akkor  $u(x, t) \equiv 0$ .

**Bizonyítás.** Mindenekelőtt megjegyezzük, bár erre a bizonyításnál nincs is szükségünk, hogy  $u(x, t)$  kielégíti (1)-et. Ez onnan következik, hogy (3)-ban szabad az integráljel mögött  $x$  és  $t$  szerint akárhányszor differenciálni. Ennek részletes igazolása megtalálható [5]-ben (201—203. oldalak<sup>3)</sup>).

<sup>2)</sup> Megjegyzendő, hogy általában azt mondjuk, hogy az  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\alpha(x)$  Stieltjes-integrál abszolút konvergens, ha  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |d\alpha(x)|$  véges.

<sup>3)</sup> [5]-ben  $da(y)$  helyett  $g(y) dy$  áll, ahol  $g(y)$  folytonos, a bizonyítás azonban a mi esetünkre is szóról szóra alkalmazható.



Feltesszük, anélkül, hogy ezzel az általánosságot csorbítanánk, hogy minden  $x$  helyen

$$\alpha(x) = \frac{\alpha(x-0) + \alpha(x+0)}{2}.$$

Minthogy a (3) alatti integrál rögzített  $x$  mellett minden  $0 < h < c$ -re a  $0 < t \leq h$  intervallumon egyenletesen konvergens (lásd: [5], 203. oldal<sup>3)</sup>, azért

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\infty}^a \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{t \rightarrow +0} \int_b^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y) = 0,$$

ha  $a < x$  és  $b > x$ .

Most megmutatjuk, hogy  $\alpha(x)$  folytonos és ha egy  $x$  helyen  $\alpha'(x)$  létezik ( $+\infty$  és  $-\infty$  derivált-értékeket is megengedve), akkor  $\alpha'(x) = 0$ . Indirekte bizonyítunk, feltesszük, hogy egy  $x$  helyen  $\alpha'(x) \neq 0$ , például  $\alpha'(x) > 0$  ( $\alpha'(x) = +\infty$ -t is megengedve), vagy  $\alpha(x)$  nem folytonos, pl.  $\alpha(x+0) > \alpha(x-0)$ . Mindkét esetben találhatók olyan  $\delta$  és  $\mu$  pozitív számok, melyekre

$$(5) \quad \frac{\alpha(y_2) - \alpha(y_1)}{y_2 - y_1} > \mu, \quad \text{ha} \quad x - \delta \leq y_1 < x < y_2 \leq x + \delta.$$

Legyen

$$u_1(x, t) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y).$$

Integráljuk parciálisan:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\delta^2}{4t}} [\alpha(x+\delta) - \alpha(x-\delta)] - \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{x-y}{4\sqrt{\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \alpha(y) dy = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\delta^2}{4t}} [\alpha(x+\delta) - \alpha(x-\delta)] + \int_{-\delta}^{\delta} \frac{z}{4\sqrt{\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{z^2}{4t}} \alpha(x+z) dz = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\delta^2}{4t}} [\alpha(x+\delta) - \alpha(x-\delta)] + \int_0^{\delta} \frac{z}{4\sqrt{\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{z^2}{4t}} [\alpha(x+z) - \alpha(x-z)] dz. \end{aligned}$$



(5)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &\geq \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\delta^2}{4t}} 2\mu\delta + 2\mu \int_0^\delta \frac{z}{4\sqrt{\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{z^2}{4t}} z dz = \\ &= 2\mu \int_0^\delta \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{z^2}{4t}} dz = 2\mu \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\delta}{2\sqrt{t}}} e^{-w^2} dw. \end{aligned}$$

Következésképpen

$$(6) \quad \liminf_{t \rightarrow +0} u_1(x, t) \geq \mu.$$

Mint hogy

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{x-\delta} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y) + u_1(x, t) + \int_{x+\delta}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y),$$

azért (4)-ből és (6)-ból következik, hogy

$$\liminf_{t \rightarrow +0} u(x, t) \geq \mu.$$

Ámde feltevés szerint  $\mu$  pozitív, s így ez az egyenlőtlenség ellentmond a  $\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = 0$  feltételnek.

Ha feltesszük, hogy  $\alpha'(x) < 0$ , illetve  $\alpha(x+0) < \alpha(x-0)$ , akkor a fenti okoskodást a  $-u(x, t)$  és  $-\alpha(y)$  függvényre alkalmazva, ismét ellentmondásra jutunk. Ezzel állításunkat igazoltuk.  $\alpha(x)$  fentebb bebizonyított tulajdonságaiból következik, hogy  $\alpha(x)$  konstans. Tekintsünk ugyanis egy  $[a, b]$  intervallumot, és jelöljük  $s(x)$ -szel az  $y = \alpha(x)$  görbe  $[a, x]$  intervallum feletti ívének az ívhosszát  $a \leq x \leq b$ -re. Legyen  $s(b) = l$ .  $\alpha(x)$  folytonossága miatt  $s(x)$  is folytonos, továbbá szigorúan monoton nő,  $s(x)$  inverze,  $x(s)$  is folytonos, szigorúan monoton növekvő függvény. Legyen  $y(s) = \alpha[x(s)]$  ( $0 \leq s \leq l$ ).  $y(s)$  és  $x(s)$  eleget tesznek az

$$|x(s_1) - x(s_2)| \leq |s_1 - s_2|, \quad |y(s_1) - y(s_2)| \leq |s_1 - s_2|$$

egyenlőtlenségeknek. Ennélfogva  $x(s)$  és  $y(s)$  abszolút folytonosak, s így a  $[0, l]$  intervallumon majdnem mindenütt differenciálható függvények.

Tegyük fel, hogy egy  $[0, l]$  belsejébe eső  $s_0$  helyen  $y'(s_0)$  és  $x'(s_0)$  léteznek és végesek, továbbá  $y'(s_0) \neq 0$ . Legyen  $x_0 = x(s_0)$ . Mint hogy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \alpha(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\alpha[x(s)] - \alpha[x(s_0)]}{x(s) - x(s_0)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{y(s) - y(s_0)}{\frac{s - s_0}{\frac{x(s) - x(s_0)}{s - s_0}}} = \begin{cases} \frac{y'(s_0)}{x'(s_0)}, & \text{ha } x'(s_0) \neq 0, \\ +\infty, & \text{ha } y'(s_0) > 0 \text{ és } x'(s_0) = 0, \\ -\infty, & \text{ha } y'(s_0) < 0 \text{ és } x'(s_0) = 0, \end{cases} \end{aligned}$$



azért  $\alpha(x)$  deriváltja az  $x_0$  helyen létezik és nem egyenlő 0-val. Ezzel ellentmondásra jutottunk, s így adódik, hogy  $y'(s)$  majdnem mindenütt 0. Mint-hogy  $y(s)$  abszolút folytonos, azért

$$\alpha(b) - \alpha(a) = y(l) - y(0) = \int_0^l y'(s) ds = 0,$$

tehát  $\alpha(x)$  valóban konstans. Következésképpen  $u(x, t) \equiv 0$ ; q. e. d.

Bizonyításunk utolsó részében tulajdonképpen a következő segédtelet igazoltuk:

*Ha  $\varphi(x)$  az  $[a, b]$  intervallumon értelmezett folytonos és korlátos variációjú függvény, továbbá  $[a, b]$  belsejében  $\varphi'(x) = 0$ , valahányszor  $\varphi'(x)$  létezik ( $a + \infty$  és  $-\infty$  derivált-értékeket is megengedve), akkor  $\varphi(x)$  konstans.*

Ez a segédtelet egyébként triviális folyománya a folytonos, korlátos variációjú függvényekre vonatkozó DE LA VALLÉE-POUSSIN-féle felbontási tételnek (lásd: [4], 127. oldal). Fenti okoskodásunkban a DE LA VALLÉE-POUSSIN-féle tétel bizonyításából éppen annyit rekonstruáltunk, mint amennyi a segédtelet bizonyításához szükséges.

Jegyezzük meg, hogy ha a (3) alatti integrál a  $0 < t < c$  sávban konvergens és  $\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t)$  minden  $x$ -re létezik és véges, akkor  $\alpha(y)$  minden véges

intervallumon abszolút folytonos és így  $d\alpha(y)$  helyett  $\alpha'(y) dy$  írható. Az I. tétel bizonyításának első részét megismételve adódik ugyanis, hogy  $\alpha(x)$  folytonos és  $\alpha'(x)$  (ha létezik) véges, s ebből a DE LA VALLÉE-POUSSIN-féle tétel értelmében következik, hogy  $\alpha(x)$  abszolút folytonos.<sup>4)</sup>

Így (1) azon megoldásai, melyeknek a körében az I. tétel biztosítja, hogy a kezdeti értékek a megoldást egyértelműen meghatározzák, valójában nemcsak improprius Poisson—Stieltjes, hanem improprius Poisson(—Lebesgue) integrállal is előállíthatók.

Külön kiemeljük az I. tétel következő folyományát:

**II. tétel:** Legyen  $u_1(x, t)$  és  $u_2(x, t)$  az (1) differenciálegyenlet egy-egy folytonos és nemnegatív megoldása a  $0 < t < c$  sávon. Ha minden  $x$ -re  $\lim_{t \rightarrow +0} u_1(x, t)$  és  $\lim_{t \rightarrow +0} u_2(x, t)$  léteznek, végesek és egyenlők, akkor  $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ .

(Hogy a II. tétel valóban következik az I. tételből, azt az I. tételt bevezető fejtegetések során már megmutattuk.)

## 2. §.

Az I. tételnek a TYHONOV-féle unicitási tétellel szemben az a szépség-hibája, hogy míg az utóbbinál  $u(x, t)$  egyszerű nagyságrendi megszorításnak van alávetve, addig az I. tétel  $u(x, t)$ -re vonatkozóan egy igen bonyolult kirovást tesz; tudniillik azt, hogy  $u(x, t)$  (2) alakú integrállal legyen előállítható. Hogy ezt a szépséghibát kiküszöböljük,  $u(x, t)$ -re olyan nagyságrendi megszorítást adunk meg, amelyik a (3) alatti előállítás lehetőségét biztosítja.

<sup>4)</sup> Vessd össze: [4], 128. oldal, dőlt betűs megjegyzés.



Dolgozatunk 1. §-ában bebizonyítottuk, hogy ha  $u(x, t)$  (1) folytonos megoldása a  $0 < t < c$  sávon és ha  $u(x, t)$  kielégíti a

$$(7) \quad \sup_{0 < t < h} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)| e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} dx < +\infty$$

feltételt minden  $0 < h < c$ -re, akkor  $u(x, t)$  (2) alakú abszolút konvergens Stieltjes-integrállal állítható elő (lásd: [1] 396. oldal). (7) máris egy kívánt típusú feltételt szolgáltat, ehelyett azonban egy másik, kevesebbet követelő és alakilag is egyszerűbb feltételt fogunk megadni a most következő segéd-tételben:

Ha  $u(x, t)$  (1) folytonos megoldása a  $0 < t < c$  sávon, és ha  $u(x, t)$  kielégíti alkalmas  $M$  és  $m$  pozitív konstansokkal a

$$(8) \quad \left| \int_0^x |u(y, t)| dy \right| \leq m e^{Mx^2} \quad (0 < t < c, -\infty < x < +\infty)$$

egyenlőtlenséget, akkor  $u(x, t)$  a  $0 < t < \min(c, 1/4M)$  sávon (2) alakú abszolút konvergens Poisson–Stieltjes-integrállal állítható elő.

A bizonyítás úgy történik, hogy megmutatjuk:  $u(x, t)$  minden  $0 < h < \min(c, 1/4M)$ -re kielégíti (7)-et. Valóban,  $0 < t < h$ -ra és  $A < 0$ -ra

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A |u(x, t)| e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} dx &= \int_{-A}^A |u(x, t)| dx \cdot e^{-\frac{A^2}{4(h-t)}} + \\ &+ \frac{1}{2(h-t)} \int_{-A}^A \left[ \int_0^x |u(y, t)| dy \right] x \cdot e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} dx \leq 2m e^{-\frac{1}{4} \left( \frac{1}{h} - 4M \right) A^2} + \\ &+ \frac{m}{2(h-t)} \int_{-A}^A |x| e^{-\frac{1}{4} \left( \frac{1}{h-t} - 4M \right) x^2} dx < 2m e^{-\frac{1}{4} \left( \frac{1}{h} - 4M \right) A^2} + \\ &+ \frac{m}{h-t} \frac{2}{\frac{1}{h-t} - 4M} < 2m \left( 1 + \frac{1}{1 - 4Mh} \right), \end{aligned}$$

s ha  $A \rightarrow +\infty$ , adódik, hogy (7) baloldala véges. Ezzel a segéd-tételt igazoltuk.

Az I. tétel érvényes marad, ha  $u(x, t)$  (2) alakú előállíthatósága helyett a (8) egyenlőséget kötjük ki. Ezt fejezi ki a következő tétel:

**III. tétel:** Legyen  $u(x, t)$  az (1) egyenlet folytonos megoldása a  $0 < t < c$  sávon, és alkalmas pozitív  $m$ ,  $M$  konstansokkal  $u(x, t)$  tegyen eleget (8)-nak. Ha minden  $x$ -re  $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t)$  létezik, és értéke 0, akkor  $u(x, t) \equiv 0$ .



**Bizonyítás:** A segédtétel szerint  $u(x, t)$  a  $0 < t < \min(c, 1/4M)$  sávon abszolút konvergens (3) alakú integrállal állítható elő. Így az I. tétel szerint  $u(x, t)$  ezen a sávon mindenütt 0. Ha  $c \leq 1/4M$ , akkor a bizonyítással kész is vagyunk. Ha  $c > 1/4M$ , akkor a folytonosság miatt  $u(x, 1/4M)$  is 0. Ha ugyanezt a megfontolást alkalmazzuk az  $u(x, t + 1/4M)$  függvényre, akkor adódik, hogy  $u(x, t) = 0$  a  $0 < t < \min(c, 2 \cdot 1/4M)$  sávban. Ezt az eljárást véges sok lépésben megismételve végülis arra jutunk, hogy  $u(x, t) = 0$  minden  $0 < t < c$ -re; q. e. d.

Jegyezzük meg, hogy a III. tételből következik mind a WIDDER-féle tétel, mind a TYICHONOV-féle unicitási tétel.

Ami WIDDER tételét illeti, ha  $u(x, t)$  (1) nemnegatív és folytonos megoldása a  $0 < t < c$  sávban, akkor  $u(x, t)$  kielégíti (7)-et minden  $0 < h < c$ -re (lásd: [1], 405. oldal), s így

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x u(y, t) dy \right| &\leq \left| \int_0^x e^{-\frac{y^2}{4(h'-t)}} u(y, t) dy \right| e^{\frac{x^2}{4(h'-t)}} \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4(h'-t)}} u(y, t) dy \cdot e^{\frac{y^2}{4(h'-t)}} \leq \\ &\leq \sup_{0 < t < h'} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4(h'-t)}} u(y, t) dy \right\} \cdot e^{\frac{x^2}{4(h'-h)}}, \end{aligned}$$

ha  $0 < t < h < h' < c$ . Tehát  $u(x, t)$   $c$  helyett minden  $c$ -nél kisebb pozitív  $h$ -ra kielégíti (8)-at, s így III.-ból valóban következik WIDDER tétele.

Ami TYICHONOV tételét illeti, csak arra a triviális tényre kell hivatkoznunk, hogy ha az

$$|u(x, t)| \leq Ce^{Kx^2} \quad (0 \leq t \leq l)$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor alkalmas  $m$  és  $M$  konstansokkal (8) is kielégíthető  $0 \leq t \leq l$ -re.

#### IRODALOM

- [1] CZIPSZER J.: „Hővezetés végtelen rúdban, I.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 395–408.
- [2] G. DOETSCH: *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Springer, Berlin, 1937.
- [3] P. HARTMAN—A. WINTNER: „On the solutions of the equation of heat conduction.” *American Journal of Mathematics* **72** (1950) 339–395.
- [4] S. SAKS: *Theory of the integral*, „Monografie Matematyczne”, Warszawa—Lwów, 1937.
- [5] A. TYCHONOFF: „Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur.” *Recueil Mathématique (Szbornyik)* **42** (1935) 199–216.
- [6] D. V. WIDDER: „Positive temperatures on an infinite rod.” *Transactions of the American Mathematical Society* **55** (1944) 85–95.

(Beérkezett: 1956. I. 25.)



## ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В БЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ, II.

Я. ЦИПСЭР

## Резюме

В настоящей работе обобщается одна теорема А. Тихонова и одна теорема Д. В. Виддера (см. [5], стр. 206. или [1], стр. 400. и [6], стр. 92. или стр. 185. настоящей работы). Эти теоремы относятся к следующей проблеме: при каких условиях однозначно определяется в полосе  $-\infty < x < +\infty$ ,  $0 \leq t < c$  решение  $u(x, t)$  дифференциального уравнения теплопроводности (1) относящихся к  $t = 0$  начальными значениями  $u(x, 0)$ ? Имеющиеся в виду обобщения звучат так:

**Теорема I.** Пусть функция  $\alpha(x)$  имеет на каждом конечном отрезке ограниченное изменение, функция  $u(x, t)$  определяется формулой (3). Мы предполагаем, что стоящий в правой части этой формулы несобственный интеграл Стильтьеса существует при всяких  $x$  и  $0 < t < c$ . (Заметим, что  $u(t, x)$  является непрерывным решением дифференциального уравнения (1)). Предположим еще, что при всех  $x$   $\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = 0$ . Тогда

$u(x, t) \equiv 0$ . Используя некоторые теоремы, обеспечивающие представление решений уравнения (1) формулой (2) (см. [3], теорема 6, стр. 92. и [1], теорема 2, стр. 396.), получаем следующие следствия теоремы I:

**Теорема II.** (Обобщение теоремы Виддера). Пусть  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$  два непрерывных неотрицательных решения уравнения (1) в полосе  $0 < t < c$ . Если для всех  $x$  пределы  $\lim_{t \rightarrow +0} u_1(x, t)$  и  $\lim_{t \rightarrow +0} u_2(x, t)$  существуют и равны то  $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$

**Теорема III.** (Обобщение теоремы Тихонова и Виддера). Предположим, что определенное в полосе  $0 < t < c$  непрерывное решение  $u(x, t)$  уравнения (1) при некоторых постоянных  $m$  и  $M$  удовлетворяет условию (8). Если при всех  $x$   $\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = 0$  то  $u(x, t) \equiv 0$ .

SUR LA PROPAGATION DE LA CHALEUR  
DANS UNE BARRE INFINIE, II.

J. CZIPSZER

## Résumé

Dans cette Note généralisations d'un théorème de A. TYCHONOFF (voir: [5] p. 206., ou [1], p. 400.) et d'un théorème de D. V. WIDDER (voir: [6], p. 92. ou p. 185 de cette Note) sont données. Ces théorèmes assurent sous certaines hypothèses qu'une solution  $u(x, t)$  de l'équation de la chaleur (1) définie dans une bande:  $-\infty < x < +\infty$ ,  $0 \leq t < c$  s'annule identiquement, si ses valeurs initiales  $u(x, 0)$  sont 0. Voici les généralisations en question:

**Théorème I.**  $\alpha(x)$  étant une fonction à variation bornée sur chaque intervalle fini, supposons que l'intégrale de Stieltjes impropre (2) existe pour chaque  $0 < t < c$  et soit  $u(x, t)$  défini par (3).

(Notons que  $u(x, t)$  est nécessairement une solution continue de l'équation (1)). Si  $\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t)$  existe pour chaque  $x$  et est égal à 0, alors  $u(x, t)$  s'annule identiquement.

En s'appuyant sur des théorèmes qui assurent la représentation dans la forme d'une intégrale de Poisson—Stieltjes (2) pour des solutions de l'équation (1) (voir [3], Théorème 6., p. 92. et [1] Théorème 2. p. 396.) les corollaires suivants du Théorème I. sont déduits:

**Théorème II.** (Généralisation du théorème de WIDDER): Soient  $u_1(x, t)$  et  $u_2(x, t)$  deux solutions continues et non-négatives de l'équation (1) définies dans la bande  $0 < t < c$ . Si  $\lim_{t \rightarrow +0} u_1(x, t)$  et  $\lim_{t \rightarrow +0} u_2(x, t)$  existent pour chaque  $x$  et sont égaux entre eux, alors on a  $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ .

**Théorème III.** (Généralisation des théorèmes de TYCHONOFF et de WIDDER): Supposons qu'une solution continue  $u(x, t)$  de l'équation (1) définie dans la bande  $0 < t < c$  satisfait à l'inégalité (8) avec des constants positifs  $m$  et  $M$  convenables. Si  $\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t)$  existe et s'annule pour chaque valeur de  $x$ , alors  $u(x, t)$  est égal à 0 identiquement.  $t \rightarrow +0$



# MEGJEGYZÉS A DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZEREK EGYIK FORMÁLIS MEGOLDÁSI MÓDSZERÉHEZ

FENYŐ ISTVÁN

## 1. §.

Tekintsük a következő lineáris differenciálegyenletrendszert:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n P_{ik} \left( \frac{d}{dx} \right) \gamma_k = \varphi_i(x). \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

A  $P_{ik}(\lambda)$  kifejezések polinomok (együtthatóik nem függenek  $\lambda$ -tól), a  $\varphi_i(x)$ -ek adott függvények. Ha feltesszük, hogy

$$(2) \quad \det P_{ik}(\lambda) = P(\lambda)$$

nem azonosan eltűnő polinom, akkor az (1) alatti rendszer megoldása formálisan a következő módon végezhető el: a  $P(\lambda)$  determináns aldeterminánsai legyenek  $Q_{ik}(\lambda)$ , akkor (1)-ből formálisan

$$(3) \quad P \left( \frac{d}{dx} \right) \gamma_k = \sum_{i=1}^n Q_{ik} \left( \frac{d}{dx} \right) \varphi_i(x).$$

Ez  $\gamma_k$ -ra nézve állandó együtthatós lineáris közönséges differenciálegyenlet, mely ismert módon, kvadraturákkal megoldható. A most vázolt formális eljárásnak van értelme és numerikusan kényelmesen keresztülvihető, ha a  $\varphi_i(x)$  függvények elegendő sokszor differenciálhatók, de természetesen értelmét veszti és pusztán formális kalkulus marad ellenkező esetben.

A következőkben megmutatjuk, hogy ez a formális eljárás nem differenciálható  $\varphi_i$  függvények esetében is használható, ha a szóban forgó függvények helyett *disztribúciókat* tekintünk és a differenciálhányados műveletén a disztribúció-differenciálhányadost értjük (lásd: [1]). Az eljárás azért érdemel figyelmet, mert megfelelő elrendezéssel numerikus, illetve gépi számolásra is alkalmas.

A következőkben a  $\varphi$  és  $\gamma$  betűk disztribúciókat jelentenek. Ha pl.  $\varphi$  függvény, ezen olyan disztribúciót értünk, mely a szóban forgó függvénnyel azonosítható (lásd: [1], I. kötet. 25. oldal).



Induljunk ki a

$$(4) \quad \left( \frac{d}{dx} + A \right) \gamma = \varphi$$

differenciálegyenletből (ahol  $A$  konstans); ennek alap-megoldásán értjük azt a függvényt, mely az  $x = 0$  helyen zérussal egyenlő. L. SCHWARTZ egy — igen könnyen bizonyítható — tétele szerint a  $\varphi \equiv 0$  esetben ennek a differenciálegyenletnek nincsenek más megoldásai, mint függvények, tudniillik azok, melyek a szokásos módon meghatározhatók (lásd: [1], I. kötet, 129. oldal.) Ebből viszont következik, hogy a (4) inhomogén differenciálegyenletnek sincsen más megoldása, mint függvény, ha  $\varphi$  bármilyen, legfeljebb véges sok, véges szakadással bíró függvény, bármely véges szakaszon.

Hogy a mondott esetben (4)-nek létezik függvénymegoldása, az nyilvánvaló. Ha ezenkívül léteznék még egy disztribúció-megoldása is, akkor a disztribúció-megoldás és a függvény-megoldás különbsége feltétlenül függvény lenne, hiszen (4) két különböző megoldásának különbsége — a megfelelő homogén egyenlet megoldása, amiről pedig láttuk, hogy függvény. Egy disztribúció és egy függvény különbsége függvény csakis úgy lehet, ha a disztribúció maga is függvény. Tehát, ha  $\varphi$  tetszőleges,<sup>1)</sup> a (4) egyenletnek egy és csakis egy megoldása van, ugyanis a

$$\frac{d}{dx} + A$$

operátornak egyértelmű inverze létezik. Ezt az operátort

$$\left( \frac{d}{dx} + A \right)^{-1} = \frac{1}{\frac{d}{dx} + A},$$

szimbólummal fogjuk jelölni. Ha tehát  $\varphi$  függvény, akkor

$$\gamma = \frac{\varphi}{\frac{d}{dx} + A}$$

is függvény. Ezen operátor iterációjával definiáljuk a

$$\left( \frac{d}{dx} + A \right)^{-k} = \frac{1}{\left( \frac{d}{dx} + A \right)^k}$$

operátort is, és ez lehetővé teszi az

<sup>1)</sup> Tetszőleges függvényen a jövőben olyan disztribúciót értünk, mely minden véges szakaszon legfeljebb véges sok ugráshellyel és véges szakadással bíró függvénnyel azonosítható.



$$\frac{1}{P\left(\frac{d}{dx}\right)} = \frac{1}{\prod_k \left(\frac{d}{dx} + A_k\right)^k}$$

operátor definiálását. Ezekután szükségünk lesz

$$(5) \quad \frac{Q\left(\frac{d}{dx}\right)}{P\left(\frac{d}{dx}\right)} = \frac{1}{P\left(\frac{d}{dx}\right)} \cdot Q\left(\frac{d}{dx}\right)$$

operátor értelmezésére, ahol  $Q(\lambda)$  a  $\lambda$ -nak polinomja.

Bebizonyítjuk, hogy a (5) egyenlettel definiált operátor azonos azzal, melyet a  $Q/P$  tört formális parciális törtbontásával kapunk.

Először bebizonyítjuk azt, hogy

$$(6) \quad \frac{1}{P\left(\frac{d}{dx}\right)} = \sum_k \frac{b_k}{\left(\frac{d}{dx} + A_k\right)^k}$$

alakú: Ehhez nyilván elegendő az

$$(7) \quad \frac{1}{\left(\frac{d}{dx} + A_1\right)\left(\frac{d}{dx} + A_2\right)} = \frac{1}{A_2 - A_1} \frac{1}{\frac{d}{dx} + A_1} - \frac{1}{A_2 - A_1} \frac{1}{\frac{d}{dx} + A_2}$$

identitás bebizonyítása. ( $A_1$  és  $A_2$  ne legyenek egyszerre zérusok.)

A definíció alapján

$$(8) \quad \left(\frac{d}{dx} + A\right) \left(\frac{d}{dx} + A\right)^{-1} = \left(\frac{d}{dx} + A\right)^{-1} \left(\frac{d}{dx} + A\right) = \mathcal{I},$$

ahol  $\mathcal{I}$  az identitásoperátor. Mivel

$$\frac{1}{A_2 - A_1} \left(\frac{d}{dx} + A_2\right) - \frac{1}{A_2 - A_1} \left(\frac{d}{dx} + A_1\right) = \mathcal{I},$$

azért, ha ennek az egyenletnek mindkét oldalára a  $\left(\frac{d}{dx} + A_2\right)^{-1} \left(\frac{d}{dx} + A_1\right)^{-1}$  operátort alkalmazzuk, (8) figyelembevételével nyerjük (7)-ot, s (6) tüstént következik.

Írható, tehát

$$\frac{Q\left(\frac{d}{dx}\right)}{P\left(\frac{d}{dx}\right)} = \sum_k \frac{b_k}{\left(\frac{d}{dx} + A_k\right)^k} Q\left(\frac{d}{dx}\right).$$



Mivel, ugyancsak a definíció alapján

$$\left(\frac{d}{dx} + A\right)^l \left(\frac{d}{dx} + A\right)^m = \left(\frac{d}{dx} + A\right)^{l+m}$$

bármely  $l$  és  $m$  egész számpárra, elég a parciális törtre bonthatóság bizonyításán a

$$\frac{\frac{d}{dx} + B}{\frac{d}{dx} + A} = \frac{B - A}{\frac{d}{dx} + A} + \mathcal{I}$$

egyenletet igazolni. De az utóbbi nyilvánvaló, hiszen

$$\frac{d}{dx} + B = \frac{d}{dx} + A + B - A$$

és így

$$\frac{\frac{d}{dx} + B}{\frac{d}{dx} + A} = \left(\frac{d}{dx} + A\right)^{-1} \left[ \left(\frac{d}{dx} + A\right) + B - A \right] = \mathcal{I} + \frac{B - A}{\frac{d}{dx} + A}$$

Ezzel a  $Q\left(\frac{d}{dx}\right) / P\left(\frac{d}{dx}\right)$  operátorra vonatkozó állításunkat teljesen igazoltuk.

Ha a  $Q\left(\frac{d}{dx}\right) / P\left(\frac{d}{dx}\right)$ -ban a számláló nem magasabb fokszámú, mint a nevező, és ezt az operátort valamilyen tetszőleges  $\varphi$  függvényre alkalmazzuk, ismét függvényt nyerünk. Ha tudniillik a számláló nem magasabb fokszámú a nevezőnél,

$$\frac{Q\left(\frac{d}{dx}\right)}{P\left(\frac{d}{dx}\right)} \varphi = \sum_k \frac{b_k}{\left(\frac{d}{dx} + A_k\right)^k} \varphi,$$

ahol a  $k$  mindig nem-negatív, és a jobb oldalon minden tag az előzőek szerint függvény.

Visszatérve ezekután az (1) alatti egyenletrendszerre, tegyük fel, hogy a  $P(\lambda)$  determináns  $k$ -adik oszlopában levő polinomok legmagasabb fokszáma  $p_k$ ,  $P$  fokszáma  $p$  és

$$(9) \quad p = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$



Képezzük az (1)-el egyenértékű (3) kifejezést, ebből

$$(10) \quad \gamma_k = \sum_{i=1}^n \frac{Q_{ik} \left( \frac{d}{dx} \right)}{P \left( \frac{d}{dx} \right)} \varphi_i(x).$$

Miután  $Q_{ik}$  legfeljebb  $p_1 + \dots + p_{k-1} + p_{k+1} + \dots + p_n < p$  fokszámú, azért a  $\gamma_k$  megoldások függvények. Azonnal látható, hogy (10) a differenciálegyenletrendszer azon megoldásrendszerét szolgáltatja, melyre a

$$(11) \quad \gamma_k(0) = \gamma'_k(0) = \dots = \gamma_k^{(p_k-1)}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

feltételek teljesülnek. Ha a

$$\gamma_k(0) = \alpha_k; \quad \gamma'_k(0) = \alpha'_k, \dots, \gamma_k^{(p_k-1)}(0) = \alpha_k^{(p_k-1)}$$

kezdeti feltételeket adjuk meg, akkor a

$$\gamma_k(x) = g_k(x) + \alpha_k + \frac{\alpha'_k}{1!} x + \dots + \alpha_k^{(p_k-1)} \frac{x^{p_k-1}}{(p_k-1)!} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

egyenletekkel új függő változókat, a  $g_k$ -kat bevezetve feladatunkat az előbbire vezettük vissza.

Ha a (9) feltétel nem teljesül, akkor eljárásunkat kissé módosítanunk kell. Ez esetben tudniillik az  $i$ -edik ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) egyenletet  $h_i$ -szer differenciálva és esetleg egyenletek összeadásával elérhető a (9) alatti feltétel teljesülése, ha a  $h_i$  számokat alkalmasan választjuk. Ha a  $\varphi_i(x)$  függvények nem differenciálhatók közönséges értelemben, akkor L. SCHWARTZ-féle értelemben vett differenciálhányadost kell képezni. Az így kapott rendszerre az előbb vázolt eljárás minden további nélkül alkalmazható. Ez esetben azonban az inhomogenitást jelentő tagok általában nem függvények, hanem disztribúciók lesznek, ennek következtében nyert megoldások is disztribúciók. Mivel azonban az adott disztribúciók függvényeknek  $h_i$ -szeres differenciálásából nyertek, az eredményül nyert disztribúciót  $h = \max h_i$ -szer integrálva az eredeti differenciálegyenletrendszert kielégítő függvényt nyerünk.

## 2. §.

Az előbb vázolt módszer bizonyos peremértékfeladatok megoldására is alkalmas. A szóban forgó differenciálegyenletrendszer legyen a következő:

$$(12) \quad \sum_{k=1}^n P_{ik} \left( \frac{d^2}{dx^2} \right) \gamma_k = \varphi_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ahol a  $P_{ik}$ -k ismét polinomok. Keressük ennek, egyelőre, azon megoldásait, melyek deriváltjaikkal együtt az 0 és 1 helyeken eltűnnek.

Induljunk ki ismét a

$$(13) \quad \left( \frac{d^2}{dx^2} + A \right) \gamma = \varphi$$



egyenletből. Ennek megoldásán azt a függvényt értjük, melyre a

$$\gamma(0) = \gamma(1) = 0$$

peremfeltételek teljesülnek. Ha  $\varphi$  bármilyen, csupán véges sok véges szakassal bíró függvény, akkor ilyen  $\gamma$  függvény egy és csakis egy van, ha

$$(14) \quad A \neq m^2\pi \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Ha  $\varphi$  függvény, akkor (13)-nak más megoldása, mint a függvénymegoldása nincsen. Ez a

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + A\right) = \left(\frac{d}{dx} + i\sqrt{A}\right) \left(\frac{d}{dx} - i\sqrt{A}\right) \quad (i = \sqrt{-1})$$

felbontásból nyilvánvaló. Így tehát, ha  $A$ -ra teljesül (14), létezik a

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + A\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{d^2}{dx^2} + A}$$

operátor. Ennek segítségével értelmezhető az előbbiek mintájára a

$$\frac{Q\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)}{P\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)}$$

operátor is, ahol  $P$  és  $Q$  polinomokat jelentenek, és  $P$  gyökei közül a (14) alatti számok egyike sem szerepel. Erre az operátorra is alkalmazható a parciális törtekre bontás. Itt is érvényes az a tétel, hogy ha  $Q$  fokszáma nem nagyobb, mint  $P$  fokszáma, akkor

$$\frac{Q\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)}{P\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)} \varphi$$

függvény, feltéve, hogy  $\varphi$  függvény. Így tehát (12) ekvivalens a

$$(15) \quad P\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)\gamma_k = \sum_{i=1}^n Q_{ik}\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)\varphi_i$$

egyenletrendszerrel. Ha most feltesszük, hogy  $P$  gyökei között a (14) alatti számok egyike sem szerepel és a fokszámok között érvényes a (9) alatti reláció, akkor (12) megoldásai gyanánt ezeket a függvényeket kaptuk, melyek a

$$(16) \quad \gamma_i(0) = \gamma_i''(0) = \dots = \gamma_i^{(2p_i-2)}(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\gamma_i(1) = \gamma_i''(1) = \dots = \gamma_i^{(2p_i-2)}(1) = 0$$



peremfeltételeknek tesznek eleget. Ha a

$$\gamma_i(0) = \alpha_i, \quad \gamma_i''(0) = \alpha'_i, \dots, \quad \gamma_i^{(2p_i-2)}(0) = \alpha_i^{(p_i-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\gamma_i(1) = \beta_i, \quad \gamma_i''(1) = \beta'_i, \dots, \gamma_i^{(2p_i-2)}(1) = \beta_i^{(p_i-1)}$$

peremfeltételeket írjuk elő, akkor a

$$\gamma_i(x) = g_i(x) + \pi_i(x)$$

egyenlettel bevezetjük a  $g_i$  új függő változókat, ahol  $\pi_i(x)$   $(2p_i-1)$ -edfokú, az előírt peremfeltételeknek eleget tevő polinomok és ezzel a problémát az előbbire vezettük vissza.

Ha a (9) egyenlet nem teljesül, akkor hasonlóan járunk el, mint 1. §. alatt, csak hogy kellő számszor a  $\frac{d^2}{dx^2}$  operátort kell az egyes egyenletekre alkalmazni.

#### IRODALOM

- [1] L. SCHWARTZ: *Théorie des distributions*, I. Hermann et Cie, Paris, 1950. („Actualités Scientifiques et Industrielles”, No. 1091.)

(Beérkezett: 1955. IX. 25.)

#### ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОДНОМ ФОРМАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. ФЕНЕ

##### Резюме

Пусть дана система дифференциальных уравнений (1). Предположим, что  $P_{ik}(\lambda)$  — многочлены с постоянными коэффициентами, для которых выполняется условие (2). Если обозначить через  $Q_{ik}(\lambda)$  миноры определителя  $P(\lambda)$ , то наша система дифференциальных уравнений равносильна системе (3), если только функции  $\varphi_i$  достаточное число раз дифференцируемы. В этом случае система (3) может быть легко разрешима относительно  $\gamma_k$ . Если  $\varphi_k$  не дифференцируемы, то они порождают дистрибуции понимаемые в смысле (Л. ШВАРЦА [1]). В работе доказывается, что, если  $\varphi_i$  — непрерывные функции, то указанный выше формальный метод может быть применён с использованием производных дистрибуций и даёт интегралы дифференциального уравнения, являющиеся не дистрибуциями, а функциями. Если применять подходящую схему, то метод можно использовать и для численного решения.

Приведенная идея может быть использована и для решения граничных задач. Если, например, речь идёт о граничной задаче (12) и (16), то она эквивалентна граничной задаче для системы дифференциальных уравнений (15), если только  $P(m^2 \pi^2) \neq 0$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Здесь  $\varphi_i$  снова считаются дистрибуциями. В работе доказывается, что, если функции  $\varphi_i$  непрерывны, то решение этой задачи не дистрибуции, а функции.

Метод может быть перенесён и на некоторые системы дифференциальных уравнений с частными производными.



# BEMERKUNGEN ÜBER EINE FORMELLE LÖSUNGSMETHODE VON SYSTEMEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

I. FENYŐ

## Zusammenfassung

Es sei gegeben ein System von Differentialgleichungen von der Gestalt (1). Die  $P_{ik}(\lambda)$  seien Polynome mit konstanten Koeffizienten. Es sei vorausgesetzt, dass die Relation (2) gilt. Wenn man die Unterdeterminanten von  $P$  durch  $Q_{ik}(\lambda)$  bezeichnet, so ist das System (1) mit dem System (3) äquivalent, falls die Funktionen  $\varphi_i(x)$  genügend oft differenzierbar sind. Alle diese Gleichungen sind lineare Differentialgleichungen bezüglich der unbekannten Funktionen  $\gamma_k$  mit konstanten Koeffizienten, die leicht lösbar sind.

Falls die Funktionen  $\varphi_i(x)$  nicht genügend oft differenzierbar sind, so ist dieses Verfahren bloss formell. Man kann doch dem Verfahren einen konkreten Sinn geben, falls man die  $\varphi_i$  (und ihre Derivierte) nicht als Funktionen, sondern als Distributionen (im L. SCHWARTZ'schem Sinne [1]) betrachtet werden. Es wird gezeigt, dass falls die stetige Funktionen sind, so hat (1) keine andere als die durch klassische Methoden  $\varphi_i$  bekannte Lösungen.

Diese können durch die erwähnte formale Lösungsmethode ausgerechnet werden, durch Einführung der Distributionen-Ableitung. Es wird auch darauf hingewiesen, dass die Methode zur numerischen Rechnungen geeignet sind.

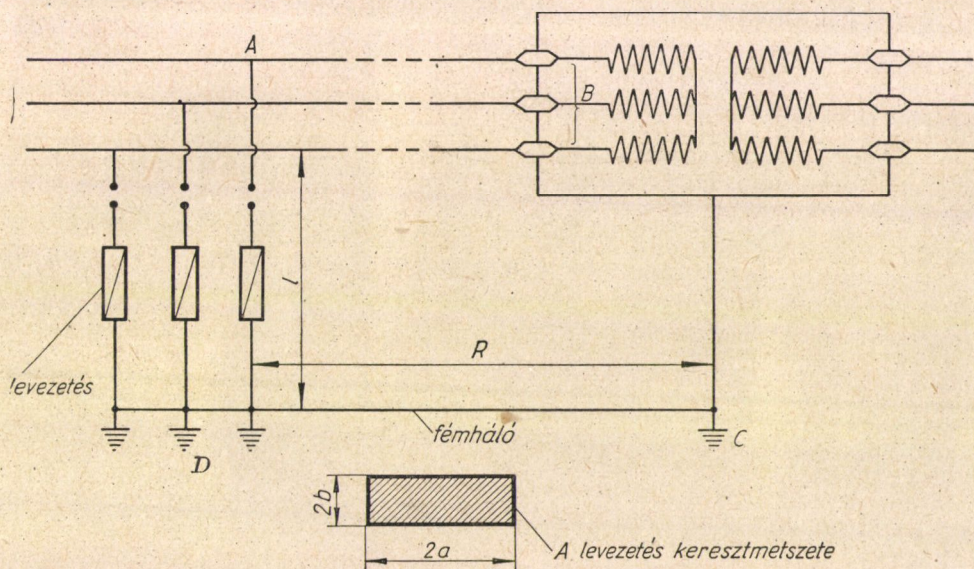
Durch eine analoge Methode kann auch das Randwertproblem von gewissen Systemen von Differentialgleichungen gelöst werden. Die Randwertprobleme (12) und (15) sind z. B. äquivalent mit dem Randwertproblem der Differentialgleichung (15), falls nur  $P(m^2\pi^2) \neq 0$  ( $m = 0, \pm 1 \pm 2, \dots$ ). Hier sollen wieder die Funktionen  $\varphi_i$  als Distribution aufgefasst werden und es wird gezeigt, dass wenn  $\varphi_i$  stetige Funktionen sind, so hat das System (2) ein einziges Lösungssystem, welches den Randwertbedingungen genügt.



## TRANSZFORMÁTORÁLLOMÁS VILLÁMVÉDELMEVEL KAPCSOLATOS MATEMATIKAI PROBLÉMÁKRÓL

FÉNYES TAMÁS

Jelen dolgozatban a Villamos Energetikai Kutató Intézet megbízásából nagyfeszültségű távvezetéken villámcsapás hatására fellépő túlfeszültségek számításával foglalkozunk. Az alábbi 1. ábrán látható a háromfázisú távvezeték, melyet vizsgálunk (az ábra erősen torzított). A túlfeszültség-



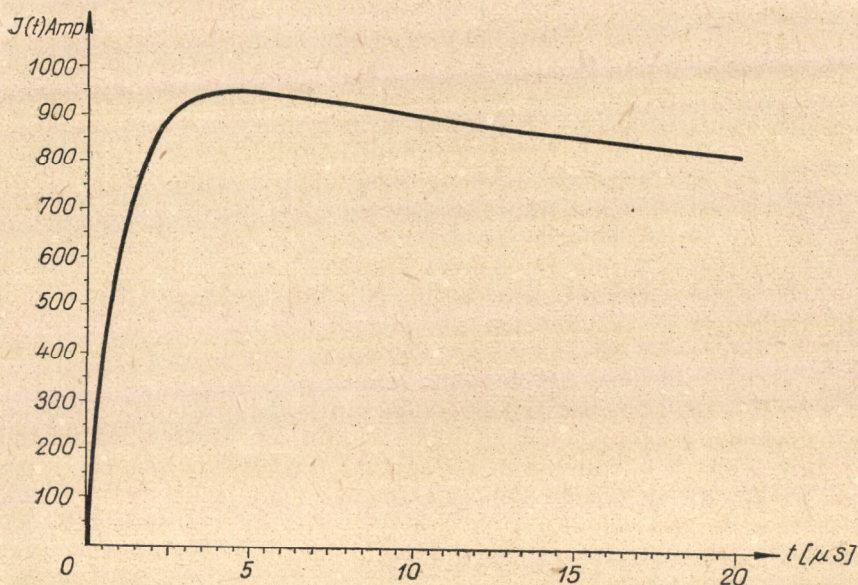
1. ábra

levezetés a transzformátorház védelmére szolgál. Abban az esetben, ha a távvezetéken villámcsapás hatására fellépő vándor-hullám keletkezik, a levezetésben levő szikraköz átüt, és az áram a levezetésen keresztül lefolyik a földbe. Feladatunk meghatározni a  $B$  szigetelésen fellépő túlfeszültséget az idő függvényében. A vándorhullámnak a távvezeték egy pontján fellépő maximális figyelembe veendő áramerősségére vonatkozólag a Villamos Energetikai Kutató Intézet gyakorlati adatok alapján a következő becslést közölte velünk :

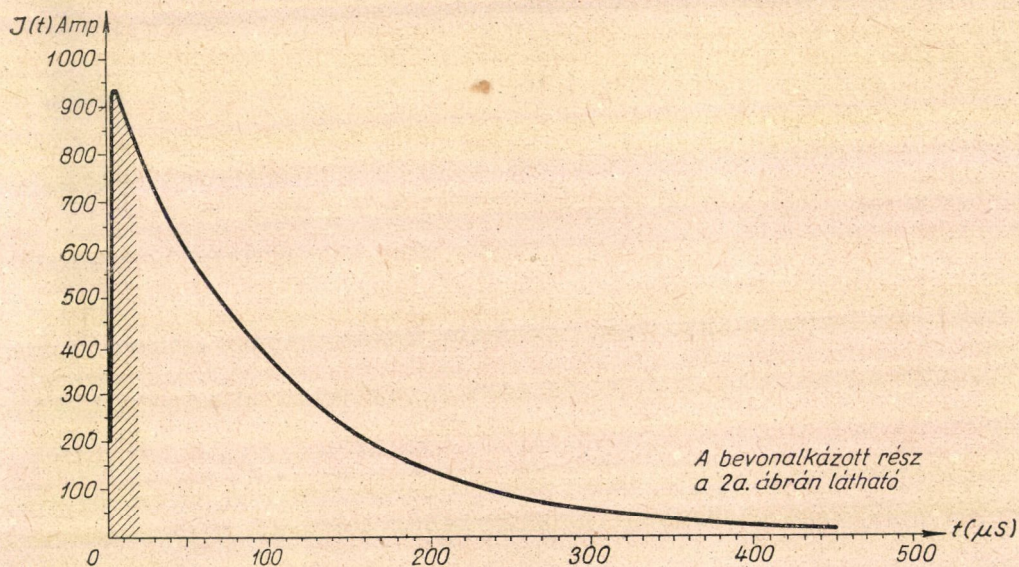


$$(1) \quad I(t) \cong I_0 \left( e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

ahol  $I_0 = 1000 \text{ A}$ ,  $T_1 = 10^{-4} \text{ s}$ ,  $T_2 = 10^{-6} \text{ s}$  (lásd: 2.a—2.b ábrák).



2.a. ábra



2.b. ábra



## 1. §. A matematikai modell ismertetése

A problémát a következő feltevések alapján oldjuk meg:

1. A távvezetékét ideálisnak tekintjük. Adott hullámmellenállása  $Z_0 = 500 \Omega$ . Feltesszük, hogy a szikraköz átütése után a teljes áramerősség lefolyik a túlfeszültségevezetőn, tehát, hogy a távvezetéknek a levezetésen túli része a feszültség és árameloszlást egyáltalán nem befolyásolja. Továbbá feltesszük, hogy a levezetésben levő szikraköz azonnal átüt, mikor fellép rajta a túlfeszültség, s hogy a transzformátorház és a transzformátor közti kapacitás söntölő hatása elhanyagolható. Megjegyezzük még, hogy a levezetésben szereplő koncentrált ellenállást is figyelmen kívül hagytuk.

2. A téglalapkeresztmetszetű levezetésben fellépő szkin-effektust nagyfrekvenciás határesetnek tekintjük, azaz feltételezzük, hogy a levezetés felületén igen vékony rétegben folyik az áram.

3. A levezetést a benne folyó áram által gerjesztett mágneses fluxus szempontjából végtelen hosszúnak tekintjük. (Cikkünk végén közlünk néhány kiegészítő eredményt is, melynél már eltekintünk ezen feltevéstől.)

4. Ha a levezetés ferromágneses anyagból készül (a gyakorlatban vasszalagot szokás alkalmazni), további közelítő feltevésre van szükség, hogy a ferromágneses közegben fellépő valójában nem-lineáris szkin-effektus problémát egyszerű eszközökkel meg tudjuk oldani, és a megoldást fel tudjuk használni. Ezért a — valójában a mágneses térerősségből függő — permeabilitás értékét a valójában fellépő maximális és minimális permeabilitás közötti becsléssel felvett állandó értékkel helyettesítjük. A permeabilitás legkisebb értéke — mely a legnagyobb előforduló mágneses térerősséghez tartozik, — azonban nem ismeretes.

A permeabilitást közelítően végeredményben abból a feltevésből kaphatjuk meg, hogy a mágneses térerősséget a téglalap kerületén állandónak tekintjük. A gerjesztési törvényt alkalmazásával a megadott áram ismeretében a térerősség és így a permeabilitás meghatározható. Ezek alapján  $\mu_r = 150$ -nel dolgoztunk. Cikkünkben ki fogjuk mutatni, hogy a permeabilitás nagysága a jelenségeket nem befolyásolja lényegesen.

A behatolási mélységet a felvett permeabilitásból és a levezetés fajlagos vezetőképeségéből kiszámítva azt tapasztaljuk, hogy ez már alacsony frekvencián is kicsiny a téglalap keresztmetszetű levezetés oldalhosszaival összehasonlítva. Ezen közelítő számítás egyébként második feltevésünket teszi plauzibilissá.

5. A távvezetékben folyó áram és feszültség, mint a hely és idő függvénye a levezetéstől nagy távolságra eleget teszi a távíróegyenletnek. „Nagy távolság” alatt nyilván olyan távolság értendő, mely nagy a levezetés hosszához képest. A levezetésnek egy ilyen környezetét kirekesztve a létrejövő hullám olyan, mintha a levezetést a távvezetéken alkalmazott rövidzárral helyettesítenők. A levezetéstől olyan távolságra, mely a levezetés hosszával egyező nagyságrendű, a feszültség és áram nem elégítik ki a távíróegyenleteket, minthogy azok csak végtelen hosszúnak tekinthető párhuzamos vezetékpárra érvényesek. A levezetésnek ez a hullámalakot eltorzító hatása csak olyan környezetében érvényesül, mely a levezetés hosszával egyenlő nagyságrendű. Minthogy a villámcsapás okozta vándorhullám „hossza” általában nagy a levezetés hosszához képest, azért az áramerősségnek a levezetésnél jelentkező értékeit közelítőleg a távíróegyenlet érvényességének feltételezésével számítják.

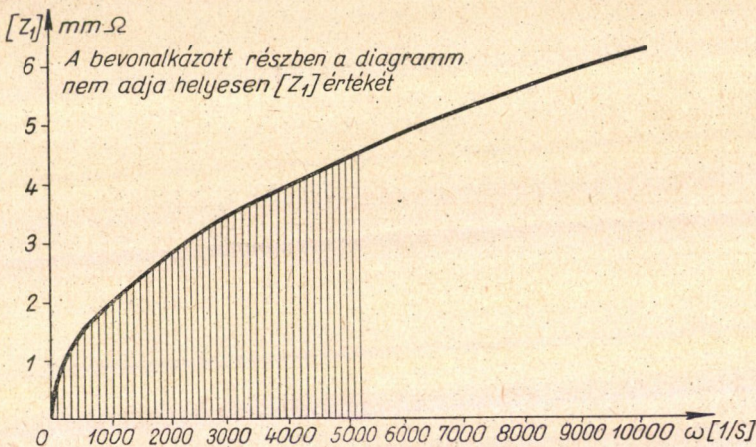


Ahhoz, hogy a  $B$  szigetelésen fellépő feszültséget meghatározhassuk, ismernünk kell az  $ABCD$  hurok impedanciáját. Ezen impedancia és feszültség két részből tevődik össze.

I. A levezetésen folyó áram a levezetés felületén létrehoz egy  $U_1$  feszültséget. Mivel nagyfrekvenciás határesetet vizsgálunk, a levezetés felületén a mágneses térerősség normális komponense kicsiny. Ha az indukciótörvényt alkalmazzuk a levezetés felületére, egyszerűen belátható, hogy a levezetés valamely keresztmetszetének kerületén az elektromos térerősség alkotó irányú komponense közel állandó. Ílymódon a levezetés felületén értelmezhető egy-egy vezetékkeresztmetszetre állandó elektromos potenciál, melyet a levezetés belsejében fellépő mágneses tér indukál; és értelmezhető a levezetés  $Z_1$  impedanciája, mint a frekvencia függvénye COCKROFT [1] szerint:

$$Z_1(\omega) = (1 + j) l f(a/b) \sqrt{\omega R_0 \mu},$$

ahol  $l$  a levezetés hossza,  $f(a/b)$  a téglalap oldalainak arányától függő kifejezés (lásd [1]),  $R_0$  a levezetés hosszegységnyi egyenáramú ellenállása. Látható, hogy az impedancia fázisszöge  $45^\circ$ , ami valóban a nagyfrekvenciás határesetnek felel meg.



3. ábra

A 3. ábrán ábrázoltuk a  $Z_1(\omega)$  impedancia abszolút értékét a frekvencia függvényében a következő felvett adatok mellett:  $l = 5$  m,  $\mu = 150$ ,  $a = 10$  mm,  $b = 1$  mm és a vasvezeték fajlagos vezetőképessége:  $\gamma = 10^7$  1/Ωm. Természetesen  $\omega = 0$  frekvencián az ellenállás nem zérus és alacsonyfrekvencián diagramunk hamis.

II. A levezetésben folyó áram a levezetésen kívül mágneses térerősséget gerjeszt. Ezen mágneses térerősség által a levezetés és a transzformátor közti  $ABCD$  hurokban létrehozott  $\Phi$  fluxus  $U_2$  nagyságú feszültséget indukál, mely szintén a  $B$  szigetelésen jelentkezik. Ílymódon a  $Z_1$  impedanciához hozzájárul még egy  $Z_2 = j\omega L$  impedancia.

Az  $ABCD$  hurok teljes impedanciája tehát  $Z = Z_1 + Z_2$  és a  $B$  szigetelésen fellépő teljes feszültség  $U = U_1 + U_2$ .



## 2. §. Az $L$ induktivitás meghatározása

Ahhoz, hogy a minket érdeklő  $Z_2$  impedanciát és a feszültséget kiszámítsuk, meg kell határoznunk az  $L$  induktivitás értékét a levezetés geometriai adatai, a levezetés és transzformátor közti  $R$  távolság függvényében. Ki fogjuk egészíteni COCKCROFT [1] munkáját. E célból röviden ismertetjük az ő módszerét.

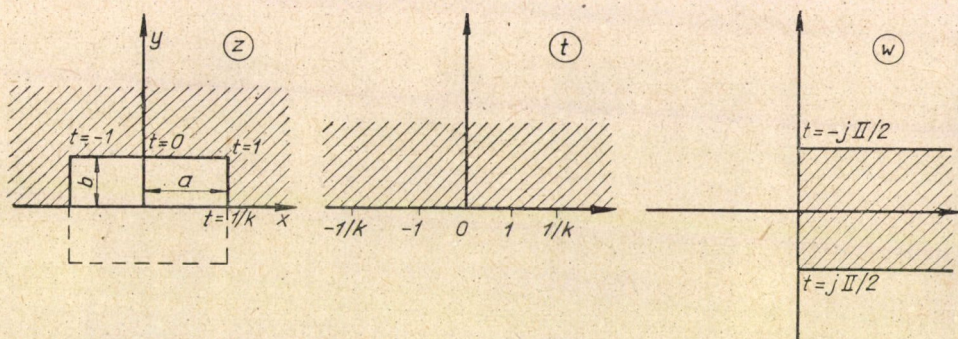
Alkalmazzuk a következő Schwarz—Christoffel transzformációkat :

$$\frac{dz}{dt} = C \sqrt{\frac{1-t^2}{\frac{1}{k^2}-t^2}}.$$

és

$$\frac{dw}{dt} = \frac{I^*}{2\pi \sqrt{t^2 - 1/k^2}}.$$

Az első transzformáció az integrálási állandó megfelelő megválasztása esetén a  $t$ -sík felső felét leképezi a  $z$  síkban a 4.ábrában bevonalkázott tartományra,



4. ábra

a  $t$ -sík valós tengelye átmegy a  $z$ -síkon besraffozott terület alsó konturjába. A  $C$  és  $k$  mennyiségek a téglalap oldalainak hosszából az alábbi összefüggésekből adódnak :

$$(2) \quad \frac{a}{b} = \frac{E - k'^2 K}{E' - k^2 K'},$$

$$(3) \quad C = \frac{ak}{E - k'^2 K} = \frac{bk}{E' - k^2 K'},$$

ahol  $K$  és  $E$  az első-, illetve másodfajú  $k$ -modulusú teljes elliptikus integrál,  $K'$  és  $E'$  az első-, illetve másodfajú kiegészítő teljes elliptikus integrál.

A második transzformáció a  $t$  sík felső felét leképezi a  $w$ -síkbán egy fűlsávra. Az  $I^*$  a levezetésben folyó áramot jelenti, melyet később fogunk meghatározni.



A  $w = f(z)$  függvény képzetes részét potenciálfüggvénynek választva az  $f'(z)$  függvény előállítja a téglalap külsejében fellépő mágneses térerősség (mint komplex vektor) konjugáltjának  $(-j)$ -szeresét ( $j = \sqrt{-1}$ ):

$$(4) \quad H = \frac{I^*}{2\pi C} \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Ennek birtokában az  $L$  induktivitás már számítható. Tudniillik az  $ABCD$  hurkon áthaladó  $\Phi$  fluxus ismeretében

$$L = \frac{\Phi}{I^*}.$$

Határozzuk meg ezt a fluxust a (4) segítségével:

$$\Phi = \mu_0 \int H df,$$

ahol  $\mu_0$  a levegő permeabilitását jelenti, és az integráció tartománya a hurok által bezárt területet. Tekintve, hogy elhanyagoltuk a tér függőleges irányban való változását, írhatjuk:

$$\Phi = \mu_0 l \int_a^R H dx.$$

(4)-gyel összevetve kapjuk, hogy

$$\Phi = \frac{I^*}{2\pi C} \mu_0 l \int_a^R \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dx.$$

Az első Schwarz—Christoffel transzformáció figyelembevételével nyerjük, hogy

$$(5) \quad \Phi = \frac{I^*}{2\pi} \mu_0 l \int_{1/k}^v \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{k^2}}} = \frac{I^*}{2\pi} \mu_0 l \log(kv + \sqrt{k^2 v^2 - 1}),$$

ahol  $v$  az  $R$  pont képe a  $t$  síkon, azaz

$$(6) \quad R = C \int_0^v \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - 1/k^2}} dt + jb,$$

továbbá

$$(7) \quad L = \frac{\Phi}{I^*} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \log(kv + \sqrt{k^2 v^2 - 1}).$$

Ezzel  $L$ -et elvileg meghatároztuk. A  $v = v(R)$  gyakorlatilag nehezen kezelhető elliptikus függvény, amely azonban egyszerűbb alakra hozható. Ugyanis a transzformátor és a levezetés közti  $R$  távolság nagy a levezetés



keresztmetszetének méreteivel összehasonlítva. Állítsuk elő a (6) aszimptotikáját nagy  $R$  értékekre:

$$R = C \int_0^v \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - 1/k^2}} dt + jb = C \int_0^\infty \left( \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - 1/k^2}} - 1 \right) dt + Cv + jb - \\ - \int_v^\infty \left( \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - 1/k^2}} - 1 \right) dt.$$

Írhatjuk tehát:

$$R = Cv + jb + C \int_0^\infty \left( \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - 1/k^2}} - 1 \right) dt + O\left(\frac{1}{v}\right).$$

vagy ha ismét tekintetbe vesszük, hogy a

$$z(t) = C \int_0^t \sqrt{\frac{1 - t^2}{\frac{1}{k^2} - t^2}} dt$$

transzformáció a  $t = 1/k$  pontot a  $z = a - jb$  pontba viszi át, egyszerű átalakítással nyerjük, hogy

$$(8) \quad R = Cv + a - \frac{C}{k} + C \int_{\frac{1}{k}}^\infty \left( \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - 1/k^2}} - 1 \right) dt + O\left(\frac{1}{v}\right).$$

Végezzük el a (8)-ban szereplő integrálban a következő helyettesítést

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{t^2 - 1/k^2}{t^2 - 1}},$$

ahol a szereplő függvény az úgynevezett Jacobi-féle  $\operatorname{sn} u$  függvény; akkor egyszerű számítással nyerjük:

$$C \int_{\frac{1}{k}}^\infty \left( \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - 1/k^2}} - 1 \right) dt = C \left( \frac{1}{k} - k \right) \int_0^K \frac{1}{1 + \operatorname{sn} u} du = \frac{C}{k} - a.$$

Ezt behelyettesítve (8)-ba, ha  $v$  nagy,

$$(9) \quad R \simeq Cv.$$

(9) és (7) segítségével, továbbá annak figyelembevételével, hogy

$$kv \gg 1.$$



$$(10) \quad L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \log \frac{2kR}{C}.$$

Vagy ha bevezetjük a következő jelölést:

$$(11) \quad r_0 = \frac{C}{2k},$$

akkor

$$(12) \quad L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \log \frac{R}{r_0}.$$

Nagyon érdekes eredményre jutottunk. Egy végtelen hosszú  $r_0$  sugarú körkeresztmetszetű vezető  $l$  hosszúságú darabja által gerjesztett fluxus épp (12)-ből számítható. Látjuk tehát, hogy a külső térben gerjesztett fluxus szempontjából a téglalapkeresztmetszetű levezetést körkeresztmetszetűvel helyettesíthetjük, melynek sugarát a téglalap geometriai adataiból számíthatjuk. (3) és (11)-ből

$$r_0 = \frac{a}{2(E - k'^2 K)}.$$

Ha  $d$ -vel jelöljük a téglalap átlóját, egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$r_0 = \frac{d}{4} \frac{1}{\sqrt{(E - k'^2 K)^2 + (E' - k^2 K')^2}}.$$

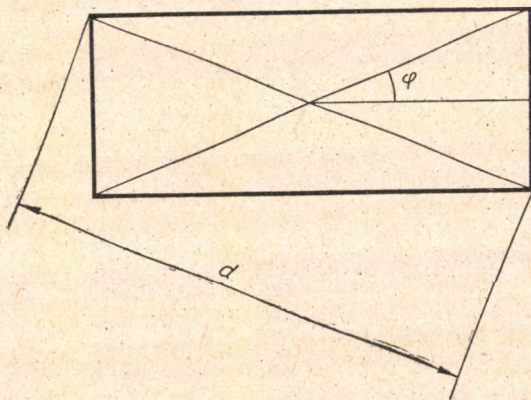
Legyen

$$F(\varphi) = \frac{1}{2 \sqrt{(E - k'^2 K)^2 + (E' - k^2 K')^2}},$$

akkor

$$(13) \quad r_0 = \frac{d}{2} F(\varphi),$$

ahol  $\varphi$  a téglalap középponti szögének felét jelenti (lásd 5. ábra).



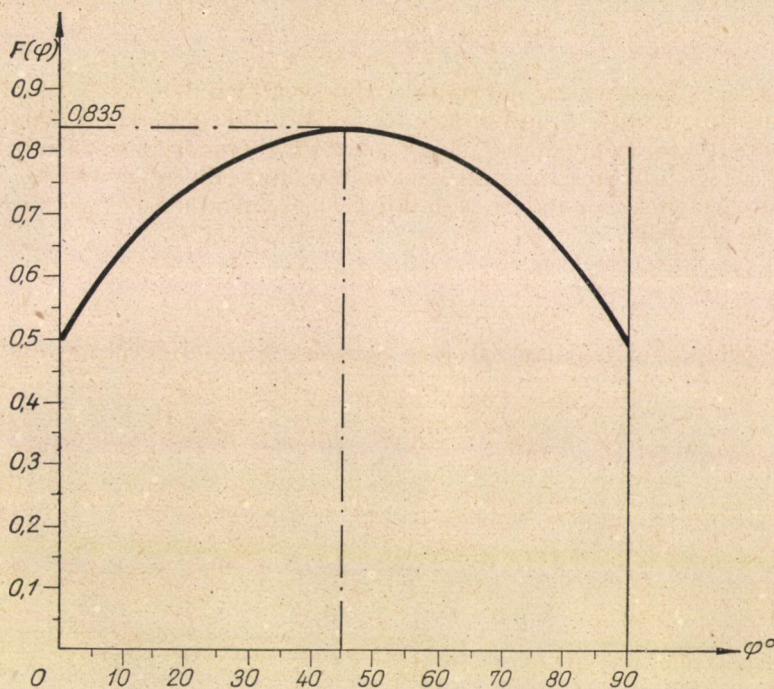
5. ábra



$\varphi$  a következő egyenletből számítható ki:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E' - k^2 K'}{E - k'^2 K}.$$

Alább feltüntetjük az  $F(\varphi)$  függvényt.



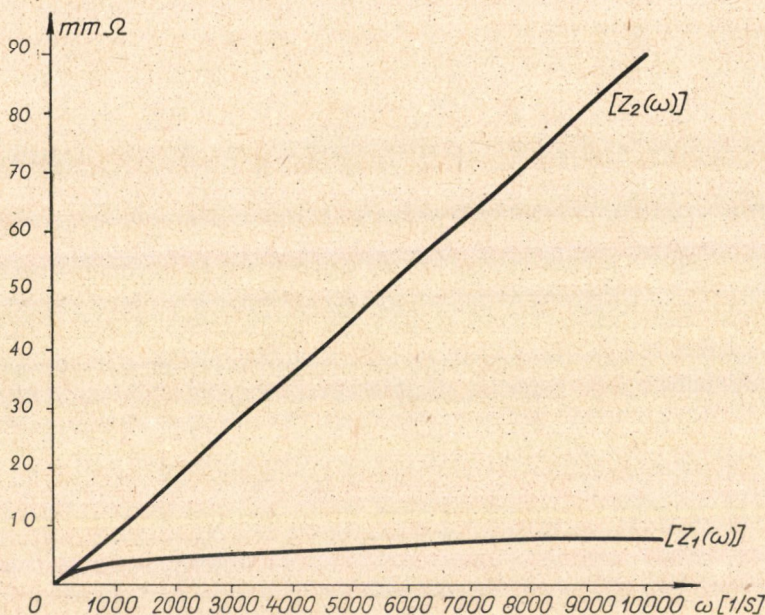
6. ábra

Ezzel  $L$  értékét teljesen meghatároztuk, és így a impedanciát is ismerjük. A vizsgált elektromos rendszer megadott numerikus adataival ( $R = 50 \text{ m}$ ,  $l = 5 \text{ m}$ ),  $r_0 = 5,9 \text{ mm}$  és  $L = 9 \mu \text{ Hy}$ . Alább feltüntettük a  $Z_2$  impedancia abszolút értékét  $\omega$  függvényében.

Megjegyezzük, hogy a következő §-ban meghatározott spektrumfüggvényből ki lehet számítani, hogy az  $\omega = 10^5$  frekvencia még kis mértékben részt vesz a vándorhullám kialakításában. Ebben a frekvencia-intervallumban a impedanciák már nincsenek feltüntetve, ez azonban nem okozhat félreértést, a görbék menete az ábrákból teljesen világos.

Amennyiben összehasonlítjuk a 3. és 7. ábrát, látjuk, hogy az alacsony frekvenciák tartományát kivéve  $|Z_2(\omega)| \gg |Z_1(\omega)|$ . Az  $ABCD$  hurok impedanciáját most már teljesen ismerjük és rátérhetünk a feszültségek számítására. Az impedanciákra vonatkozó nagyságrendi összefüggés alapján várható, hogy a feszültségekre nézve is hasonló nagyságrendi összefüggést nyerünk.





7. ábra

### 3. §. A feszültségek meghatározása

Számítsuk ki először a vándorhullám feszültségének komplex spektrumfüggvényét:

$$(14) \quad S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} I(t) Z_0 e^{-j\omega t} dt = \frac{I_0 Z_0}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\beta + j\omega} \right];$$

ebből a valós spektrumfüggvények:

$$a(\omega) = \operatorname{Re} S(\omega) = \frac{I_0 Z_0}{\pi} \left[ \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2} \right],$$

$$b(\omega) = -\operatorname{Im} S(\omega) = \frac{I_0 Z_0}{\pi} \left[ \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{\beta^2 + \omega^2} \right],$$

ahol

$$\alpha = \frac{1}{T_1} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{1}{T_2}.$$

A szigetelésen fellépő feszültség a távvezeték-elmélet szerint a következő képletből számítható:

$$(15) \quad U(t) = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} S(\omega) [1 + p(\omega)] e^{j\omega t} d\omega,$$



ahol a reflexió-koefficiens:

$$p(\omega) = \frac{Z(\omega) - Z_0}{Z(\omega) + Z_0}.$$

A 3. és 7. ábrákból látható, hogy  $|Z(\omega)| < Z_0$ . Ily módon nyerjük, hogy

$$1 + p(\omega) \cong \frac{2Z(\omega)}{Z_0},$$

és

$$U(t) = \frac{2}{Z_0} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} S(\omega) Z(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

vagy

$$(16) \quad U_1(t) = \frac{2}{Z_0} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} S(\omega) Z_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

és

$$(17) \quad U_2(t) = \frac{2}{Z_0} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} S(\omega) Z_2(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

A távvezeték az áramerősség szempontjából úgy tekinthető tehát, mintha a végén rövidre lenne zárva,  $I^* = 2I$ . (17)-et ki sem kell számítanunk, hiszen nyilvánvalóan

$$(18) \quad U_2(t) = 2L \frac{dI}{dt} = 2I_0 L \left( \frac{1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \right).$$

A (16)-ban az integrálást kell még elvégeznünk. Helyettesítsük (16)-ba (1)-et és (14)-et, akkor

$$(19) \quad \begin{aligned} U_1(t) &= \frac{2I_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\beta + j\omega} \right) Z_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= A \operatorname{Re} \int_0^{\infty} (1+j) \left( \frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\beta + j\omega} \right) \sqrt{\omega} e^{j\omega t} d\omega, \end{aligned}$$

ahol

$$A = \frac{2I_0}{\pi} l f \left( \frac{a}{b} \right) \sqrt{R_0 \mu}.$$

Tekintsük most a következő integrált:

$$(20) \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma + j\omega} \sqrt{\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$



Ez  $\omega = u^2$  helyettesítéssel a következőképp írható:

$$(21) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{\gamma + ju^2} e^{jtu^2} du = -j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtu^2} du + j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma e^{jtu^2}}{\gamma + ju^2} du.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jtu^2}}{\gamma + ju^2} du = f(t) \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtu^2} du = (1+j) \sqrt{\frac{\pi}{2t}} = \varphi(t),$$

akkor (21) segítségével felírható a következő differenciálegyenlet, ha  $t \neq 0$ :

$$(22) \quad f'(t) + \gamma f(t) = \varphi(t) = (1+j) \sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

Megjegyezzük, hogy a differenciálegyenlet levezetésekor a paraméter szerinti differenciálás és integrálás sorrendje fel lett cserélve. Ez megtehető, mivel az eredményül kapott integrál egyenletesen konvergens minden, a  $t = 0$  helyet nem tartalmazó zárt intervallumon.

A differenciálegyenlet megoldása:

$$(23) \quad f(t) = B e^{-\gamma t} + \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} (1+j) e^{-\gamma t} \int_0^{\sqrt{\gamma t}} e^{\tau^2} d\tau,$$

ha  $t \neq 0$ .  $f(t)$  folytonos a  $t = 0$  helyen is:

$$f(0) = B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma + ju^2} du = (1-j) \frac{\pi}{\sqrt{2\gamma}}.$$

Ezzel

$$f(t) = (1-j) \frac{\pi}{\sqrt{2\gamma}} e^{-\gamma t} + \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} (1+j) e^{-\gamma t} \int_0^{\sqrt{\gamma t}} e^{\tau^2} d\tau.$$

Így (20)-ra nyerjük, hogy

$$(24) \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma + j\omega} \sqrt{\omega} e^{j\omega t} d\omega = -j f'(t) =$$

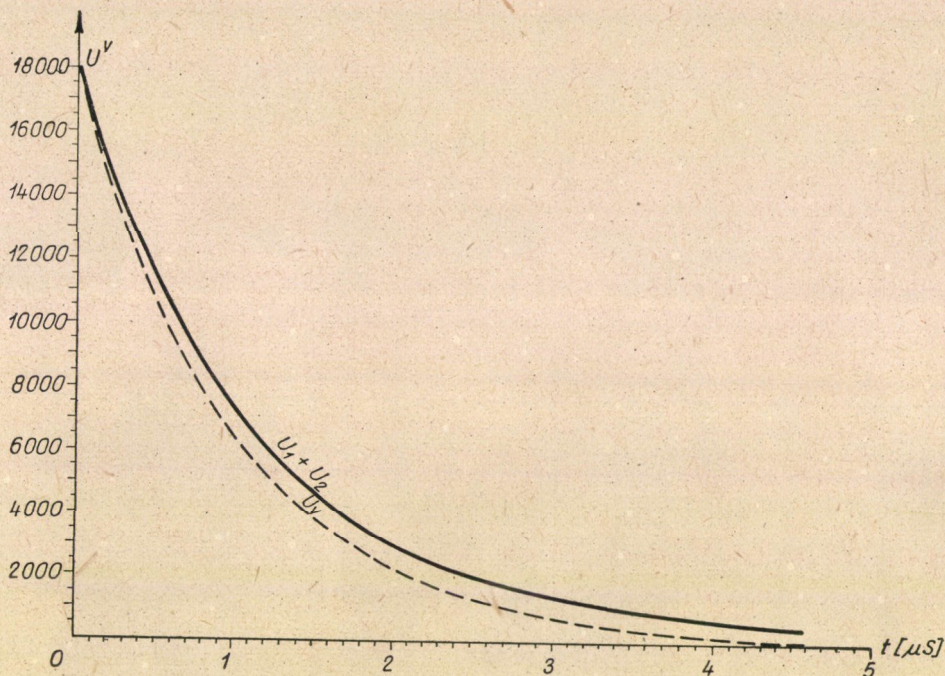
$$= (1-j) \sqrt{\frac{\pi}{2t}} + (1+j) \sqrt{\frac{\gamma}{2}} e^{-\gamma t} + (j-1) \sqrt{2\pi\gamma} e^{-\gamma t} \int_0^{\sqrt{\gamma t}} e^{\tau^2} d\tau.$$

(24) segítségével (19) alapján az  $U_1$  feszültségre végeredményben a következő kifejezést nyerjük:

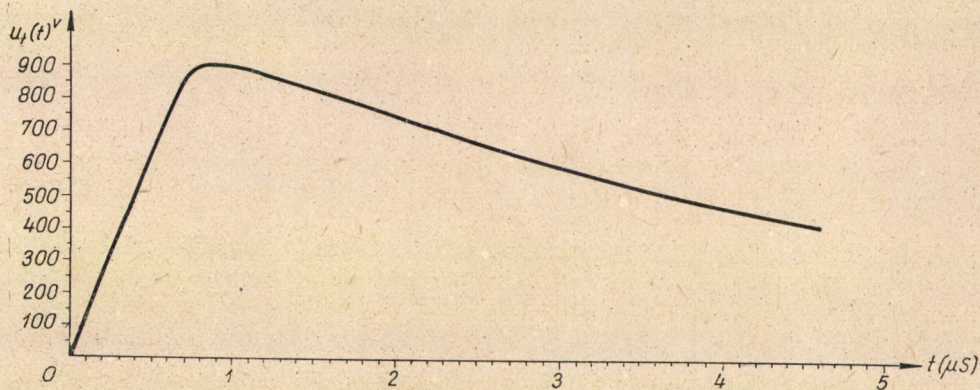


$$(25) \quad U_1(t) = \frac{4\sqrt{2\pi} I_0 l}{\pi} f\left(\frac{a}{b}\right) \sqrt{R_0 \mu} \left[ \frac{1}{\sqrt{T_2}} e^{-\frac{t}{T_2}} \int_0^{\sqrt{\frac{t}{T_2}}} e^{\tau^2} d\tau - \frac{1}{\sqrt{T_1}} e^{-\frac{t}{T_1}} \int_0^{\sqrt{\frac{t}{T_1}}} e^{\tau^2} d\tau \right].$$

Az alábbi ábrákon láthatjuk a feszültségek időbeli lefolyását egy megadott téglalapkeresztmetszet esetén.



8. ábra



9. ábra



Megjegyezzük, hogy a feszültségek negatív értékeket is felvesznek, ezek azonban oly kicsinyek, hogy ábráinkon nem tüntethetők fel. Továbbá látható, hogy nem követünk el nagy hibát, ha a levezetés belsejében fennálló teret, vagyis az  $U_1(t)$  feszültséget elhanyagoljuk. Ebből igen érdekes következményeket vonhatunk le.

*I.  $U_1$  elhanyagolása után a téglalapkeresztmetszetű levezetés ekvivalens egy olyan körkeresztmetszetűvel, melynek sugarát (13)-ból határozhatjuk meg.*

*II. A feszültség nagyságát a levezetés anyagi tulajdonságai csak igen kis mértékben befolyásolják, azaz mindegy, hogy a levezetés milyen fémből van.*

Ily módon az 1. §-ban levő 2. és 4. feltevések feleslegessé válnak.

#### 4. §. Kiegészítő megjegyzések

Ha figyelembe vesszük a mágneses térnek a függőleges irányban való változását is, akkor számításaink a következőképp végezhetők el. Tükrözzük a távvezeték felső vezetékét és a levezetést a földre, mint végtelen jó vezető-képességű közegre. Feltételezzük, hogy már az első paragrafusban említett „hullámhossz” igen hosszú. Ily módon állandó áramerősséggel számolva, a Biot—Savart törvényt alkalmazva az  $U$  alakú áramot figyelembevételével az  $ABCD$  hurkon áthaladó fluxus és a hurok  $L$  induktivitása kiszámítható. A számítások elemiek, de igen hosszadalmasak és csak a végeredményt közöljük:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \sqrt{R^2 + 4l^2} - R + l \log \frac{l}{r_0} + \frac{R}{2} \log \frac{R}{l} - \frac{l}{2} \log \frac{\sqrt{R^2 + 4l^2} + 2l}{\sqrt{R^2 + 4l^2} - 2l} - \frac{R}{4} \log \frac{\sqrt{R^2 + 4l^2} + R}{\sqrt{R^2 + 4l^2} - R} - 0,92l \right].$$

A megadott adatokkal  $L = 5,6 \mu\text{Hy}$ . Látjuk, hogy az ily módon kiszámított induktivitás jóval kisebb annál, amelynél eltekintünk a mágneses tér függőleges irányban való változásától. Ez fizikailag nyilvánvaló, hisz az  $ABCD$  hurokban a függőleges levezetés által gerjesztett tér és a két vízszintes vezeték által gerjesztett tér iránya egymással ellentétes. A problémával kapcsolatos további számításaink során ki szándékozunk térni az 1.-nek a feszültség időbeli lefolyására gyakorolt hatásának a vizsgálatára is.

A Villamosenergetikai Kutató Intézet méréseket szándékozik végezni a problémával kapcsolatban. A mérési eredményekről és a további számításokról további, a Villamos Energetikai Kutató Intézettel közösen írt cikket szándékozunk megjelentetni, melyben még ezen paragrafusban említett induktivitásra egy nomogramot is fogunk közölni. Tervbe vettük továbbá, hogy a matematikai modell felállításánál (1. §.) az 5. pontban szereplő feltevést, hogy az adott esetben érvényesek a távíróegyenletek, elejtjük, s így az egzaktabb tárgyalását adjuk a problémának.

Befejezésül köszönetet mondunk PÁL SÁNDORNAK a probléma megoldásánál nyújtott értékes támogatásáért.



## IRODALOM

- [1] J. D. COCKCROFT: „Skin effect in rectangular conductors at high frequencies.”  
*Proceedings of the Royal Society of London* **122** (1929) 533—542.  
 [2] SIMONYI K.: *Elméleti villamosságtan*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1955.

(Beérkezett: 1956. II. 14.)

# О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМАХ, СВЯЗАННЫХ С ЗАЩИТОЙ ТРАНСФОРМАТОРНЫХ СТАНЦИЙ ОТ МОЛИН

Т. ФЕНЕШ

## Резюме

В настоящей работе автор занимается расчетом перенапряжений возникающих в проводах вследствие удара молнии. Распространяющаяся в проводе электрическая волна считается данной на основании эмпирической формулы. Математическое исследование имеющего место транзиентного явления производится с учетом отвода перенапряжения с прямоугольным разрезом. Возникающий при отводе *скин-эффект* считается предельным случаем высокой частоты, поэтому используются и развиваются полученные КОКРОФТОМ в работе [1] результаты. Автор решает проблему с помощью эллиптических функций. С практической точки зрения весьма интересно, что изучаемое явление может с хорошим приближением считаться независимым от материальных свойств отвода и что отвод с прямоугольным разрезом эквивалентен отводу с круговым разрезом радиус которого определяется автором.

# SUR UN PROBLEME MATHÉMATIQUE CONCERNANT LA PROTECTION DES LIGNES A HAUTE TENSION CONTRE LA FOUDRE

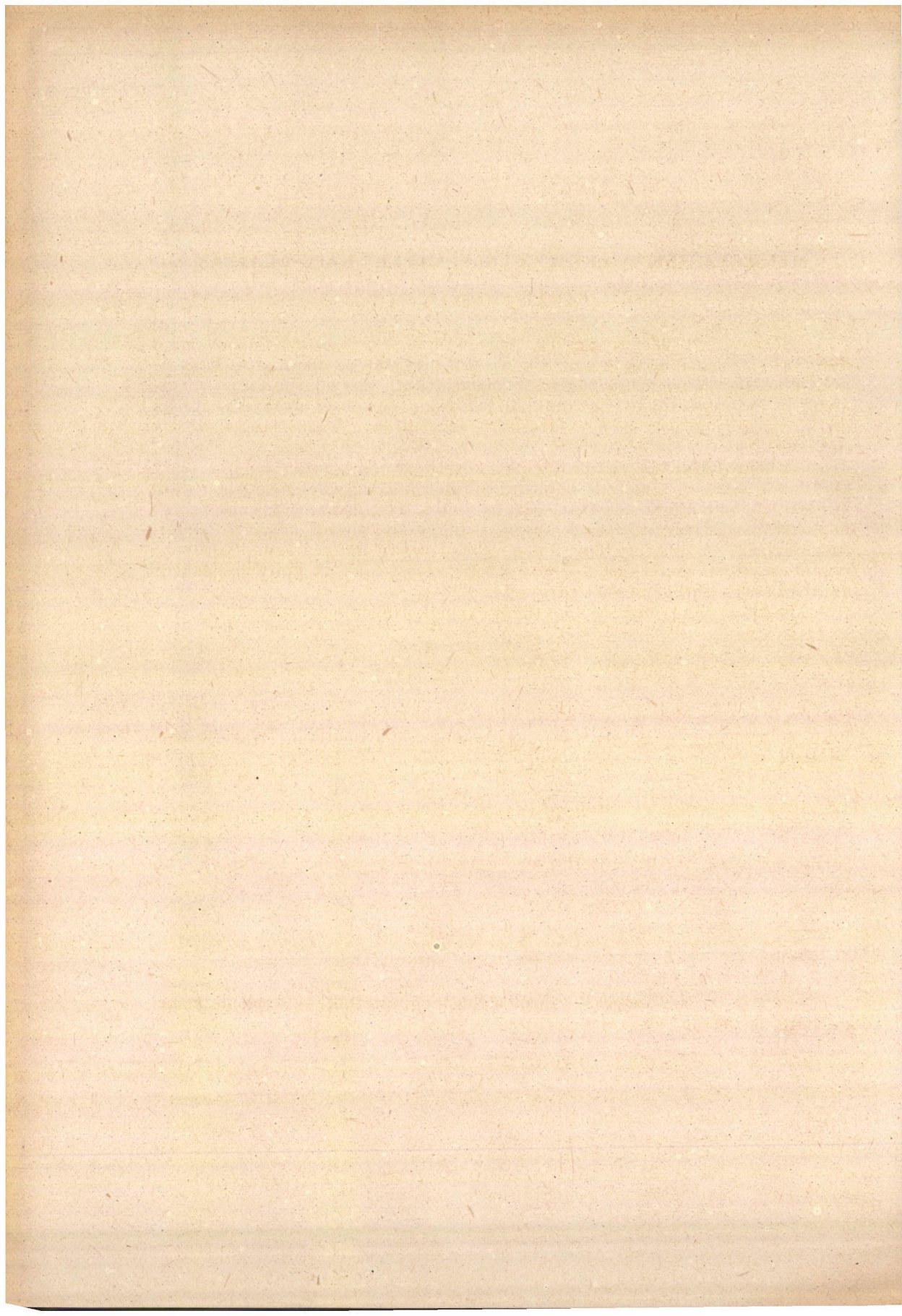
T. FÉNYES

## Résumé

Dans cet article l'auteur se propose de calculer les surtensions occasionnées par l'effet de la foudre dans les lignes a haute tension. L'onde électrique se propageant dans la ligne est supposée donnée d'après une formule empirique. L'analyse mathématique de ce phénomène transitoire qui intervient dans la ligne a haute tension tient compte du fait que le conducteur de surtension est de section rectangulaire. L'effet skin intervenant dans le conducteur est considéré comme un cas limite de haute fréquence. C'est pour cette raison que l'auteur utilise et complète en même temps les résultats de COCKCROFT [1].

L'auteur résout ce problème en se basant sur la théorie des fonctions elliptiques. Au point de vue pratique, il est intéressant de noter que le phénomène produit peut être considéré, d'une façon approximative, comme indépendant de la nature du conducteur, et que le conducteur à section rectangulaire est équivalent a un conducteur à section cylindrique dont le rayon est déterminé par l'auteur.







## MEGJEGYZÉSEK A „KÉSÉS-FÜGGVÉNNYEL” KAPCSOLATBAN

ARATÓ MÁTYÁS

Néhány éve jelent meg E. ALTENKIRCH *Verzögerungsfunktion* című könyve [1]. Jelen megjegyzés az e könyvben tárgyalt, az alkalmazások szempontjából figyelemreméltó tárgykör matematikai tárgyalásmódjára vonatkozik és azt egyszerűsíti, ugyanakkor felhívja a figyelmet azokra az ismert eredményekre melyek — úgy látszik — elkerülték a könyv szerzőjének a figyelmét.

A könyv által tárgyalt probléma a következő: meghatározandó explicit alakban az  $y'(x) = -\alpha y(x-1)$  retardált differenciálegyenlet megoldása azon kezdeti feltétel mellett, hogy  $y(x) = 1$ , ha  $-1 \leq x < 0$ . Ezen egyenlet  $\varphi(x, \alpha)$  megoldásából nyert  $f(x, \alpha) = 1 - \varphi(x, \alpha)$  függvényt nevezi a szerző „késés-függvénynek.” Ezen függvény fellép például olyan automatikus szabályozó berendezéseknél, melyeknél a visszacsatolás késéssel jár. A könyv példaként az abszorpciós hűtőgép esetét tárgyalja.

A  $f(x, \alpha)$  függvényre a következő explicit kifejezés nyerhető:

$$f(x, \alpha) = \sum_{n=0}^{[x]} (-1)^n \frac{(x-n)^{n+1}}{(n+1)!} \alpha^{n+1}$$

(ha  $x < 0$ , az üres összegben 0 értendő).  $f(x, \alpha)$  tehát  $n$  és  $n+1$  között  $(n+1)$ -edfokú polinom. ( $n = -1, 0, 1, 2, \dots$ ) A könyv matematikai függeléke foglalkozik az

$$U(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k \frac{(x-k+1)^k}{k!}$$

sorral, amelynek  $N$ -edik részletösszege,  $\varphi_N(x, \alpha)$ , megegyezik  $\{1 - f(x, \alpha)\}$ -val, ha  $N-1 \leq x < N$ ; ugyanis

$$\sum_{k=0}^N (-\alpha)^k \frac{(x-k+1)^k}{k!} = 1 - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{(x-n)^{n+1}}{(n+1)!} \alpha^{n+1} = 1 - f(x, \alpha).$$

Az  $U(x, \alpha)$  sor összege — mint alább megmutatjuk — explicite kiszámítható, mégpedig

$$U(x, \alpha) = \frac{e^{-b(x+1)}}{1-b},$$



ahol  $b$  a

$$(1) \quad b = \alpha e^b$$

transzcendens egyenlet legkisebb abszolút értékű gyöke.

Ez a tény az  $f(x, \alpha)$  függvény kiszámítását nagy  $x$  értékekre rendkívül megkönnyíti, mivel  $N$  nagy értékeire, mint azt meg fogjuk mutatni,  $\varphi_N(x, \alpha)$  gyakorlatilag  $U(x, \alpha)$ -val vehető egyenlőnek, vagyis  $f(x, \alpha)$  a  $f(x, \alpha) = 1 - U(x, \alpha)$  összefüggésből határozható meg közelítőleg. Az  $U(x, \alpha)$ -ra vonatkozó explicit képlet az említett könyv szerzőjének figyelmét elkerülte, pedig az az összefüggés régóta ismeretes.

Legutóbb O. PERRON vizsgálta [2] dolgozatában az

$$(2) \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \frac{(x-n)^n}{n!}$$

speciális BRUWIER-féle sor explicit alakban való előállítását és bebizonyította, hogy

$$(3) \quad F(x) = \frac{1}{1-b} e^{-bx},$$

ahol  $b$  definíciója ugyanaz mint fentebb az (1) egyenletnél. (O. PERRON idézett [2] cikkében sokkal általánosabb feladattal foglalkozik, de nekünk csak erre a speciális esetre van szükségünk, mely megtalálható a PÓLYA—SZEGŐ [3] könyvben is.)

Az (1) egyenlettel már L. EULER [4] is foglalkozott, s megoldása megtalálható a PÓLYA—SZEGŐ [3] könyvben is. Általánosabb formában oldja meg a (1) egyenletet RÉNYI A. [5] cikkében. Annak bizonyítása, hogy  $|\alpha| < 1/e$  esetén a (1) egyenletnek az egységkör belsejében pontosan egy gyöke van, a Rouché-tétel segítségével történhet. Ezt a gyököt  $\alpha$  hatványsoraként a következőképpen állíthatjuk elő:

$$(4) \quad b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1} \alpha^n}{n!}.$$

(4) közvetlenül a következőképpen bizonyítható be: legyen

$$(5) \quad b = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \alpha^n;$$

akkor Cauchy tétele szerint

$$\begin{aligned} 2\pi i c_n &= \oint_{(l)} \frac{b}{\alpha^{n+1}} d\alpha = -\frac{1}{n} \oint_{(l)} b d(\alpha^{-n}) = \\ &= \frac{1}{n} \oint_{(l')} \alpha^{-n} db = \frac{1}{n} \oint_{(l')} \frac{e^{nb}}{b^n} db = \frac{2\pi i n^{n-1}}{n!}, \end{aligned}$$

ahol  $(l)$  az  $\alpha$ -sík,  $(l')$  pedig a  $b$ -sík origója körüli zárt görbe.



A  $b$  értéken kívül annak minden analitikus függvényét is kifejezhetjük mint  $\alpha$  hatványsorát. Tekintsük a bennünket érdeklő

$$(6) \quad \frac{1}{1-b} e^{-bx} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha^n$$

függvényt. A  $\beta_n$  együtthatók meghatározhatók a Bürmann—Lagrange-formula segítségével, azonban ismét közvetlenül határozzuk meg őket a Cauchy-tétel segítségével:

$$\begin{aligned} 2\pi i \beta_n &= \oint_{(I)} \frac{1}{1-b} e^{-bx} \frac{d\alpha}{\alpha^{n+1}} = \oint_{(I')} \frac{1}{1-b} e^{-bx} \frac{d(be^{-b})}{(be^{-b})^{n+1}} = \\ &= \oint_{(I')} \frac{e^{b(n-x)}}{b^{n+1}} db = 2\pi i \frac{(n-x)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Ezzel a (3) összefüggést igazoltuk. Megjegyezzük, hogy a (2) sor konvergens, ha  $|\alpha| < 1/e$ , és  $|\alpha| > 1/e$  esetén divergens.

Az említett könyvben tárgyalt  $U(x, \alpha)$  függvény a (2) összefüggés segítségével

$$(7) \quad U(x, \alpha) = F(x+1) = \frac{e^{-b(x+1)}}{1-b},$$

explicit alakba írható. Ha ezt az explicit formulát a szerző ismerte volna, a könyvében közölt tárgyalást lényegesen egyszerűsíthette volna.

Egyszerű behelyettesítéssel belátható, hogy az  $U(x, \alpha)$  függvény illetve (komplex  $b$  esetében) annak valós része is kielégíti az

$$(8) \quad y'(x) = -\alpha y(x-1)$$

retardált differenciálegyenletet.

Az  $\alpha = 1/e$  és  $\alpha = \pi/2$  értékek ALTENKIRCH könyvében tárgyalt „szinguláris” volta a következőképpen magyarázható: az (1) egyenletnek

a)  $0 < \alpha < 1/e$  esetén van pozitív valós gyöke. Ebben az esetben (3) exponenciális függvény;

b)  $1/e < \alpha < \pi/2$  esetén komplex gyöke van, melynek valós része pozitív, és így (3) egy csillapodó rezgést ír le;

c)  $\alpha = \pi/2$  esetén  $b = i\pi/2$ , és (3) egy állandó amplitudójú hullámvonal;

d)  $\alpha > \pi/2$  esetén a komplex gyök valós része negatív, és (3) egy növekvő amplitudójú hullámvonal.

Megemlítjük a könyv függelékében szereplő lényegesebb matematikai tévedéseket is, anélkül, hogy a hibák felsorolásában teljességre törekednénk. A könyv 51. oldalán a

$$b = \frac{A_1}{A_0} = \frac{1 + \alpha + \frac{(2\alpha)^2}{2!} + \frac{(3\alpha)^3}{3!} + \dots}{1 + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{(2\alpha)^3}{3!} + \dots}.$$

kifejezés számlálójáról és nevezőjéről azt állítja a szerző,



hogy valószínűleg konvergálnak minden negatív  $\alpha$ -ra. Könnyen belátható, hogy mindkét összeg  $\alpha < -1/e$  esetén divergens, mivel a sor tagjai nem tartanak zérushoz. Ugyanez áll az 53. oldalon szereplő

$$A_v = 1 + v\alpha + \frac{[(v+1)\alpha]^2}{2!} + \dots$$

kifejezésre is. A 44. oldalon a szerző nem tudja eldönteni, hogy  $U(x, \alpha)$  sorfejtése  $\alpha < -1/e$  esetén divergens-e, ami az eddigiek alapján nyilvánvaló.

Megjegyezzük, hogy a könyv részletes táblázatot közöl az  $f(x, \alpha)$  késésfüggvényre az  $\alpha = k \cdot 0,1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) és  $x = l \cdot 0,1$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) értékekre.

Tekintettel arra, hogy az  $U(x, \alpha)$  függvényre a fentiekben explicit kifejezést adtunk, azért az említett táblázatok jórésze feleslegessé válik illetve azok kiterjeszthetők. Adott  $\alpha < 1/e$  mellett csak  $b$  értékét kell meghatározni (4) segítségével, és akkor  $U(x, \alpha)$  és ezzel együtt  $f(x, \alpha)$  értékét az exponenciális függvények táblázatai segítségével megkaphatjuk.

A (2) sor maradéktagjára és ezzel  $f(x, \alpha)$ -nak  $U(x, \alpha)$ -tól való eltérésére a következő becslést nyerjük az

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{-\frac{\theta n}{12n}} \quad (\text{ahol } 0 < \theta < 1)$$

Stirling-formula felhasználásával:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(n-x)^n}{n!} \alpha^n \right| &= \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(n-x)^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\theta n}{12n}}} \alpha^n \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n (\alpha e)^n \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \frac{(\alpha e)^N}{1 - \alpha e} e^{-x}, \end{aligned}$$

ha  $x < N$ . Tehát

$$(9) \quad |1 - f(x, \alpha) - U(x, \alpha)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\alpha e)}} \frac{\alpha^x}{\sqrt{x}},$$

$$\text{ha } N-2 \leq x \leq N-1 \text{ és } 0 < \alpha < \frac{1}{e}.$$

Közben felhasználtuk, hogy  $(1 - x/n)^n < e^{-x}$ , ha  $0 < x < n$ . Ez nyilvánvalóan következik az  $e^z < 1/(1-z)$ , ha  $z < 0$  egyenlőtlenségből, amely az  $e^z$  és  $1/(1-z)$  függvények hatványsorainak összehasonlításából leolvasható.

Az itt közölt megjegyzések lényegében ki is merítik a könyvben tárgyalt matematikai problémákat.

Ezúton mondok köszönetet RÉNYI ALFRÉDnek, aki felhívta a figyelmet erre a problémára és értékes tanácsaival is segítségemre volt.



## IRODALOM

- [1] E. ALTENKIRCH : *Verzögerungsfunktion*. Taschenausgabe Verlag Technik, Berlin, 1952.
- [2] O. PERRON : „Über Bruwiersche Reihen.” *Mathematische Zeitschrift* **45** (1939) 127—141.
- [3] PÓLYA GY.—SZEGŐ G. : *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Springer, Berlin, 1954. (I., pp. 125—126).
- [4] L. EULER : „De serie Lambertiane.” *Opera Omnia* (Seria I. Vol. 6. p. 354). Teubner, Leipzig und Berlin, 1921.
- [5] RÉNYI A. : „Kompresszorok és légtartályok racionális méretezése üzemek sűrített levegővel való ellátására.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **1** (1952) 105—138.

(Beérkezett : 1956. II. 11).

## НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О „ФУНКЦИИ ОПОЗДАНИЯ”

М. АРАТО

## Резюме

Автор дает некоторые замечания о математической трактовке книги Е. АЛТЕНКИРХА : *Verzögerungsfunktion* [1]. Он показывает на то, что явная форма суммы (3) ряда (2) хорошо известна в литературе. С помощью (3) функция  $U(x, \alpha)$  играющая важную роль в упомянутой книге может быть представлена в явной форме ; употребляя этим фактом мы можем приближенно определять „функцию опоздания”  $f(x, \alpha)$ . Дается тоже оценка для отклонения функций  $U(x, \alpha)$  и  $1 - f(x, \alpha)$  (см. (9)).

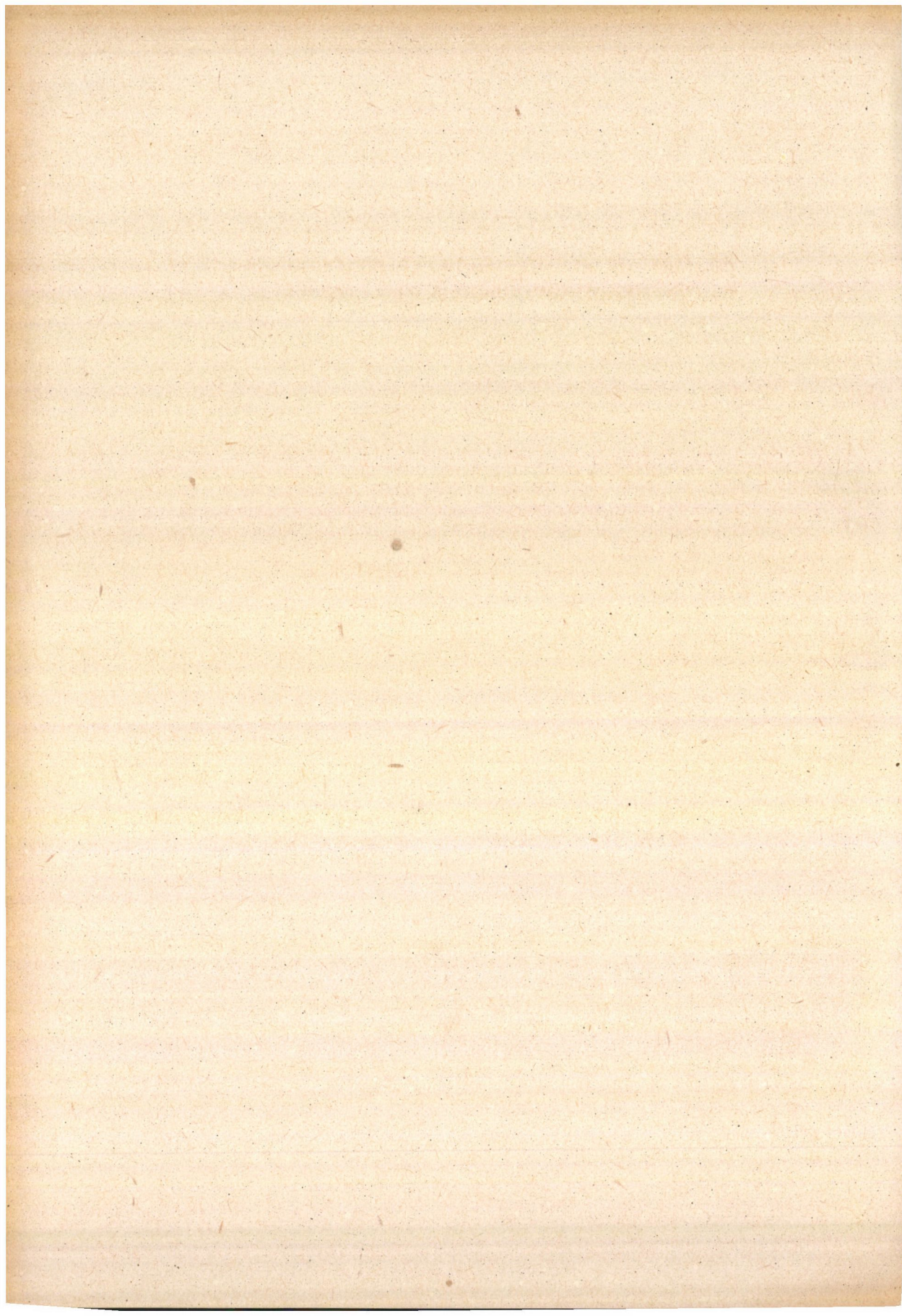
## A NOTE ON THE „RETARDATION FUNCTION”

M. ARATÓ

## Summary

The author's note refers to the mathematical discussion in E. ALTENKIRCH's book : *Verzögerungsfunktion* [1]. It is pointed out that the explicit form (3) for the sum of the series (2) is well-known in the literature. By means of (3) the function  $U(x, \alpha)$  occurring in the book mentioned above may be expressed explicitly ; using this we may determine the „retardation function”  $f(x, \alpha)$  approximatively. For the deviation of the functions  $1 - f(x, \alpha)$  and  $U(x, \alpha)$  the estimation (9) is given.







## GRAFIKUS-NUMERIKUS MÓDSZER PONTSOROS ÉS PONTMEZŐS NOMOGRAMOK TERVEZÉSÉRE

PÁL SÁNDOR

### Bevezetés

A termelés fejlesztésénél és ellenőrzésénél felhasználható matematikai módszerek közül talán a legnagyobb előszeretettel és a legkiterjedtebben alkalmazzák a nomográfiát. A nomogramok nehezen kezelhető, bonyolult képletek használatát egyszerűvé és mindenki számára hozzáférhetővé teszik. Így a tudományos eredményeknek szélesebbkörű gyakorlati felhasználását lehetővé téve elősegítik a termelés mennyiségének és minőségének emelését. Tekintettel a nagy szükségletre és arra, hogy viszonylag kevés gyakorlati szakember foglalkozik nomogramok tervezésével, igen fontos, hogy a nomogramtervezés munkáját rutinmunkává redukáljuk, hogy ezáltal lehetővé váljék a nomogramoknak mintegy „futószalagon” való előállítás. Jelen cikkben pontsoros és pontmezős, nomogramkapcsolást nem tartalmazó nomogramokra vonatkozó olyan tervezési módszert javasolunk, mely ezt a célt tűzi maga elé. A javasolt módszert a Matematikai Kutató Intézethez érkezett külső nomogramtervezési megbízások teljesítésénél kipróbáltuk és jelenleg is alkalmazzuk.

A pontsoros és pontmezős nomogramok tervezésénél általában alkalmazott módszerek két csoportba sorolhatók :

1) Egyszerűbb pontsoros nomogramoknál, így pl. párhuzamos egyenes skálatartójú Cauchy-féle nomogramoknál alkalmazható a nomogramtervezéshez a „bekalibrálás” módszere. Akkor alkalmazható, ha a nomogramok két skálája teljesen ismert. (Pl. Cauchy-féle nomogramoknál a párhuzamos egyenes tartókon elhelyezett skálák léptéke szabadon választható, és így ezek előzetesen megszerkeszthetők.)

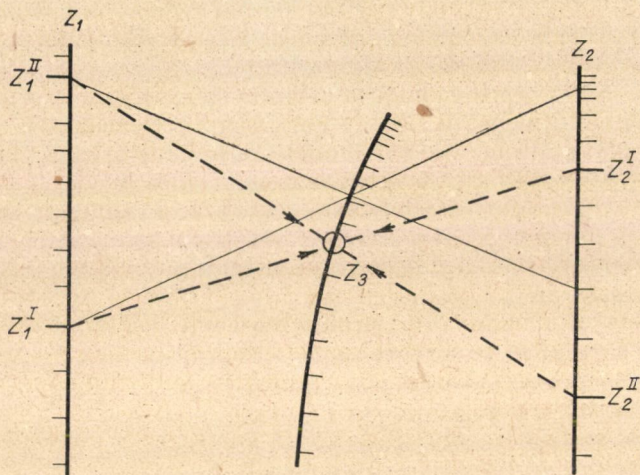
A módszer azon alapszik, hogy a nomogram két skálájának (pl. a  $z_1$  és  $z_2$  skálájának) és az ábrázoló függvénykapcsolatnak ismerete meghatározza a harmadik ( $z_3$ ) skálát. Ennek alapján a harmadik skála valamely  $z_3^0$  értékhez tartozó pontja olyan, egyébként tetszőszerinti  $(z_1^I, z_2^I)$ ,  $(z_1^{II}, z_2^{II})$  értékpár által meghatározott egyenesek metszéspontjában adódik, melyek mindegyike  $z_3^0$ -al kielégíti a függvénykapcsolatot. (Vesd össze : 1. ábra.)

Szokásos két párhuzamos egyenes tartóval rendelkező pontsoros nomogramoknál a harmadik skála egyenletének számítással való meghatározása is. Ha az 1. ábra jelöléseivel a  $z_1^{II} z_2^{II}$  egyenes a koordináta-rendszer  $x$ -tengelyével, a parallel skálák az  $y$ -tengellyel párhuzamosak, akkor a  $z_3$  érték-



hez tartozó skálapont koordinátái a  $z_1^I z_1^{II} z_3$  és  $z_2^I z_2^{II} z_3$  háromszögek hasonlóságának felhasználásával könnyen kiszámíthatók.

Az ilyen fajta módszerek nem használják ki teljesen egészében azokat a transzformációs lehetőségeket, amelyeket a nomogramoknak projektív leképezéssel szembeni érzéketlensége biztosít, hanem speciális alakú nomogramok létrehozására törekszenek. Előnyük a szerkesztés egyszerűsége, és az, hogy a hasonló háromszögek tulajdonságainak ismerete elég előismeret a tervezés módszerének elsajátításához. Hátrányuk, hogy elsősorban harmadrendű kapcsolatok, de legfeljebb negyedrendű függvénykapcsolatok ábrázolásánál célszerűek, és hogy *nem mindig szolgáltatják a nomogramnak a gya-*



1. ábra

korlati követelményeket legjobban kielégítő alakját. Bonyolultabb, pl. pontmezős nomogramok tervezéséhez nem szokták ezeket a módszereket használni.

2) A másik csoportba tartozó módszerek a nomogram projektív transzformációjával igyekeznek az ábrázolandó kapcsolat nomogramjának legcélszerűbb változatát elérni. Különösen általánosabb pontsoros nomogramok esetén a nomogramskálák egyenleteit számításval szokás meghatározni. Ismeretes, hogy a nomogramskálák az ábrázolandó kapcsolattal nincsenek egyértelműen meghatározva. Ha a számítást a benne fellépő határozatlan paraméterek értékeinek valamilyen megválasztásával egyértelművé tesszük, a nomogramnak így kapott első változata a gyakorlatban a legtöbbször nem használható (a végtelen távoli egyenesen fekvő, vagy túlságosan elnyúló részei vannak, az eredményskála sűrűsödése nem megfelelő, stb.). Ilyenkor a nomogramot tartó sík pontjait projektív transzformációnak vetjük alá. A projektív transzformációt meghatározó 8 állandót<sup>1)</sup> úgy igyekezünk meghatározni, hogy a nomogram projektív képe a legpraktikusabb alakú legyen. Ennek a feladatnak tisztán számításval való elvégzése legtöbbször túlságo-

<sup>1)</sup> Ha az egymástól csak egybevágósági transzformációban különböző projektív transzformációkat azonosnak tekintjük, akkor a projektív transzformáció 5 egymástól független állandóval jellemezhető egyértelműen.



san bonyolult, ezért próbálgatással szokás megoldani. A próbálgatáshoz kiindulásul természetesen olyan nomogramváltozatot igyekszünk alkalmazni, melynek skáláit meghatározó egyenletek a függvénykapcsolattal lehetőség szerint egyszerű, áttekinthető összefüggésben vannak. A gyakorlatban legtöbbször előforduló kapcsolatoknál azonban az ebből a szempontból optimális változatnak végtelen távoli elemei vannak. Ezért általában nem ezt a változatot szokták kiindulásul választani.

Ennek a módszernek hátránya, hogy a próbálgatások hosszadalmassá teszik. Ez a nehézség bizonyos mértékig kiküszöbölhető, ha a projektív transzformációt szerkesztéssel végezzük. SOREAU nomográfiai kézikönyvében [1], közöl ilyen grafikus-numerikus eljárást, amely azonban bizonyos értelemben feledésbe merült, tekintve, hogy — tudomásom szerint — módszere a modern nomográfiai tankönyvekben nem szerepel. Erre való tekintettel is részletesen foglalkozunk alább ezzel a módszerrel.

SOREAU csak speciális alakú nomogram tervezésére szorítkozik és nem él azzal az előnnyel, melyet a sík végtelen távoli elemeinek a szerkesztésbe való bekapcsolása jelent, holott ennek — néhány elemi, projektív geometriai szerkesztési módszer ismeretében — semmi akadályja nincs.

SOREAU eljárásához csatlakozva, igyekszünk mindkét csoportba tartozó módszerek előnyeit megtartani és a hátrányokat kiküszöbölni. A nomogramnak a gyakorlatban lehetőség szerint jól használható alakját megadó projektív transzformáció kikísérletezését szerkesztéssel végezzük. A kiindulásul választott nomogramváltozatnak lehetnek végtelen távoli részei is. A szerkesztés alapján — az idézett módszerhez hasonlóan — meghatározzuk a nomogram „optimális” alakját adó projektív transzformációt analitikusan meghatározó egyenleteket.

Így ez a projektív transzformáció a szerkesztés pontosságától függetlenül számológép-pontossággal végezhető el.

A továbbiakban csak olyan függvénykapcsolatokkal foglalkozunk, melyeknek mindig ugyanaz a változója a keresett ismeretlen, tehát amelyek nomogramjában van egy kitüntetett „eredményskála”. A nomogram három pontsorból vagy pontmezőből áll, ezeket skálatartományoknak fogjuk nevezni. Csak összefüggő skálatartományokkal kívánunk foglalkozni. A  $\mathcal{Q}_1$  skálatartomány tartalmazza a  $z_1$  és esetleg egy  $z_4$ , a  $\mathcal{Q}_2$  skálatartomány a  $z_2$  és esetleg egy  $z_5$ , a  $\mathcal{Q}_3$  skálatartomány a  $z_3$  és esetleg egy  $z_6$  változó skáláit.  $z_3$  jellel mindig az eredményskálát fogjuk jelölni.

### 1. §. Soreau grafikus-numerikus módszere

Ebben a paragrafusban részletesen foglalkozunk SOREAU eljárásával, melyre a bevezetésben már hivatkoztunk.

Tegyük fel, hogy egy háromváltozós kapcsolat pontsoros nomogramjának valamilyen alakja már rendelkezésre áll, és hogy ennek  $z_1$  és  $z_2$  skálája közel egyenes.

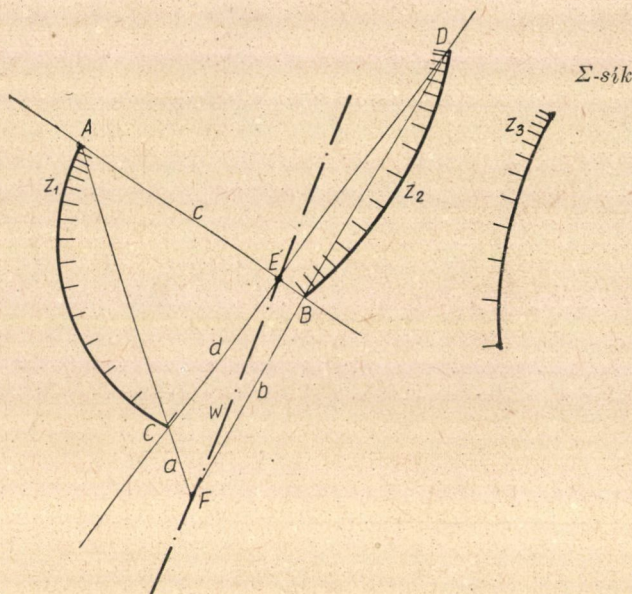
Legyen  $A$  és  $C$  a  $z_1$  skála két végpontja vagy ezekhez közeli pontok. Ugyanígy  $B$  és  $D$  legyen a  $z_2$  skála két végpontja vagy ezekhez közeli pontok. E pontokat úgy vesszük fel, hogy az  $A, B, C, D$  pontok között ne legyen kollineáris ponthármas.

Az  $ABCD$  négyszög projektív transzformációval leképezhető egy  $A'B'C'D'$  téglalpra. Válasszuk a csúcspontok sorrendjét oly módon, hogy a  $z_3$  skála egy kiválasztott pontjának képe a téglalap belsejébe essék.

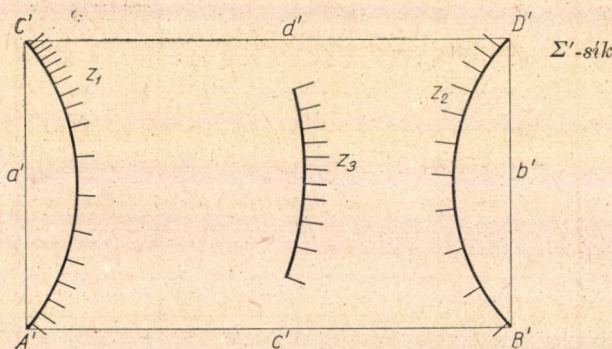


Mint ismeretes, ez a projektív transzformáció végrehajtható szerkesztéssel az alábbi módon.

Legyen a kiindulásul szolgáló nomogram síkja  $\Sigma$ , a leképezés utáni nomogram síkja  $\Sigma'$  (általában projektív képet vesszővel fogunk jelölni). Legyen továbbá az  $AB$  és  $CD$  oldalpárok metszéspontja  $E$ , az  $AC$  és  $BD$  oldalpárok metszéspontja  $F$ . (2.a és 2.b ábra.)



2.a ábra



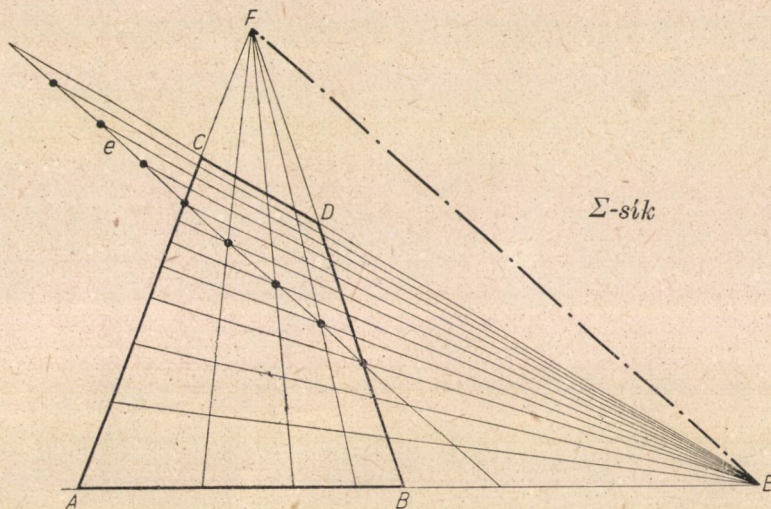
2.b ábra

$\overline{EF}$  projektív képe a  $\Sigma$  sík végtelen távoli egyenesé. Bármely  $\overline{EF}$ -el párhuzamos  $e$  egyenesnek az  $e'$  egyenesre való leképezésénél az egyenes pontjai csupán egyszerű nyújtást vagy zsugorítást szenvednek. Ezt a tényt a szerkesztésnél felhasználjuk.

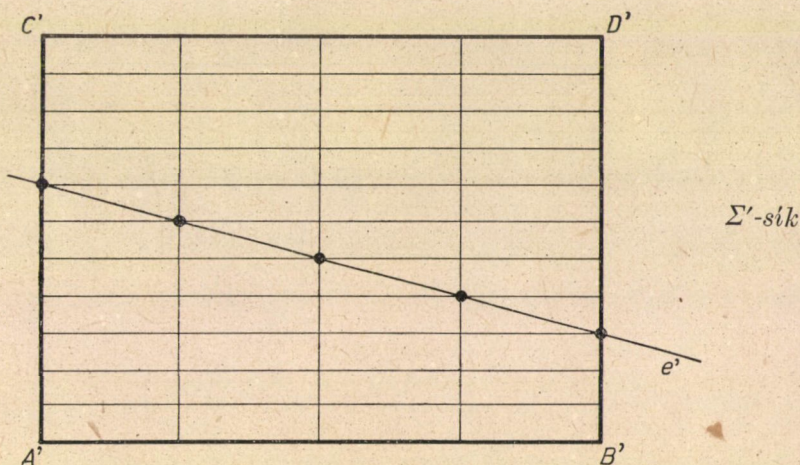
A transzformáció a  $\Sigma'$  sík derékszögű hálózatainak (amely az  $A'B'C'D'$  téglalapot tartalmazza) Möbius-rácsot feleltet meg. A Möbius-rács a 3.a és



3.b ábrák szerint szerkeszthető meg. Az  $\overline{A'C'}$ -vel párhuzamos ekvidisztáns koordinátavonalaknak az  $E$  tartójú sugársor olyan elemei felelnek meg, amelyek minden  $\overline{EF}$  egyenessel párhuzamos  $e$  egyenesen ekvidisztáns pontokat metszenek ki. Miután a sugársorok két-két elemének képét ismerjük, a  $\Sigma$  sík tetszőszerinti  $P$  pontjának képe (interpolációval) kikereshető  $\Sigma'$ -ben és viszont. SOREAU ennek az eljárásnak megfelelő pontos szerkesztést ismerteti könyvében.



3.a ábra



3.b ábra

A szerkesztéssel végrehajtott projektív transzformáció analitikus meghatározására a következőképpen járunk el:

Felvezünk a  $\Sigma$ -síkban egy tetszőszerinti  $(x, y)$  derékszögű vagy ferdeszögű koordinátarendszert, a  $\Sigma'$ -síkban pedig egy  $(x', y')$  derékszögű vagy



ferdeszögű koordináta-rendszert. A projektív leképezés transzformációs képletei ekkor

$$(1) \quad x' = \alpha \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}; \quad y' = \beta \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

Az  $\alpha$ ,  $\beta$  mennyiségek megváltoztatása az  $(x', y')$  rendszer egységeinek megváltoztatását jelenti. Ugyanilyen hatása van annak is, ha a szereplő három lineáris kifejezést többszörösükkel pótoljuk. Jelöljük a  $\Sigma'$  síkbeli koordináta-rendszernek  $x'$  tengelyét  $u'$ -vel,  $y'$  tengelyét  $v'$ -vel, végtelen távoli egyenesét  $w'$ -vel, ezek projektív megfelelője a  $\Sigma$  síkban rendre  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Az  $u$ ,  $v$ ,  $w$  egyenesek egyenletei az  $(x, y)$  koordináta-rendszerben (1) figyelembevételével rendre

$$U(x, y) \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$

$$V(x, y) \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$

$$W(x, y) \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 = 0.$$

Az  $u$ ,  $v$ ,  $w$  egyenesek szerkesztéssel meghatározhatók.  $(x, y)$  koordináta-rendszerbeli egyenleteinket leolvastva transzformációs formuláink jobboldalait az  $\alpha$  és  $\beta$  arányossági tényezőktől eltekintve meghatároztuk:

$$(2) \quad x' = \alpha \frac{V(x, y)}{W(x, y)}; \quad y' = \beta \frac{U(x, y)}{W(x, y)}.$$

Az  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  pontok és projektív képek koordinátái ki kell, hogy elégítsék a (2) egyenleteket. Ezzel a követelménnyel  $\alpha$  és  $\beta$  értéke egyértelműen meghatározható.

## 2. §. A nomogram „trivális” változata

A nomogramtervezésnél a nomogram projektív transzformációval elérhető legjobb változatának megkeresése két műveletet igényel.

1. Tájékozódás céljából felvázoljuk a nomogram egy tetszésszerű változatát, és

2. ezt alapul véve kísérletezéssel meghatározzuk azt a projektív transzformációt, amely már használható nomogramváltozatot eredményez.

Ritkán szokott már az első műveletnél a nomogramnak akár csak megközelítően is használható alakja kiadódni. Ezért célszerű a két műveletet egymástól élesen elkülöníteni. Ebből a célból a leggyakrabban előforduló kapcsolatokra lerögzítünk egy, a nomogram változatai közül kiválasztott alakot, és minden esetben ezt szerkesztjük meg tájékozódás céljára. A nomogram kiindulásul választott változatának ilyen tipizálása a tervezés első lépését mechanizálja, és nagymértékben megkönnyíti a tájékozódást. Kiindulás céljára kiválasztható a legegyszerűbben megszerkeszthető változat, melynél a nomogram használhatóságára (így pl. a nomogram részeinek korlátosságára) egyáltalában nem vagyunk tekintettel. A nomogram használhatóságára vonatkozó követelmények kielégítése teljes egészében a második tervezési műveletre hagyható.



Az

$$(3) \quad f_3 = \frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2}$$

alakú ötödrendű kapcsolatok esetén szerkesszük meg valamely derékszögű koordináta-rendszerben az

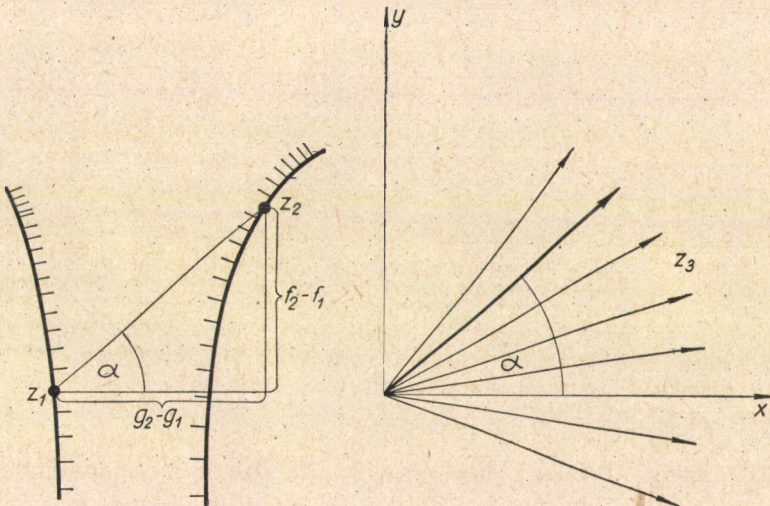
$$(4.a) \quad x = g_1, \quad y = f_1$$

$$(4.b) \quad x = g_2, \quad y = f_2$$

egyenletekkel jellemzett  $z_1$  és  $z_2$  skálát. Nyilvánvaló, hogy így  $f_3$  értékét a  $z_1$ -hez és  $z_2$ -höz tartozó skálapontokat összekötő egyenes iránytangense adja (4. ábra), tehát a  $z_3$  skála a végtelen távoli egyenesen

$$(4.c) \quad \frac{y}{x} = f_3$$

egyenlettel van megadva. (Homogén koordinátákban  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = f_3$ ,  $x_3 = 0$ .)



4. ábra

Ezek a skálák az  $f_1$ ,  $g_1$ ,  $f_2$ ,  $g_2$  függvények értékpártáblázatának birtokában minden további átszámítás nélkül közvetlenül megrajzolhatók. Pl. az

$$(5) \quad f_1 g_3 + f_2 + f_3 = 0$$

negyedrendű kapcsolat átírható

$$(5') \quad f_1 = \frac{-f_3 - f_2}{g_3},$$



alakba, és így a nomogram egy változata

$$(6.a) \quad z_1 \text{ skála : a végtelen távoli egyenesen, } \frac{y}{x} = f_1,$$

$$(6.b) \quad z_2 \text{ skála : } y = f_2, \quad x = 0,$$

$$(6.c) \quad z_3 \text{ skála : } y = -f_3, \quad x = g_3$$

egyenletekkel van meghatározva.

Az

$$(7) \quad f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + g_3 = 0$$

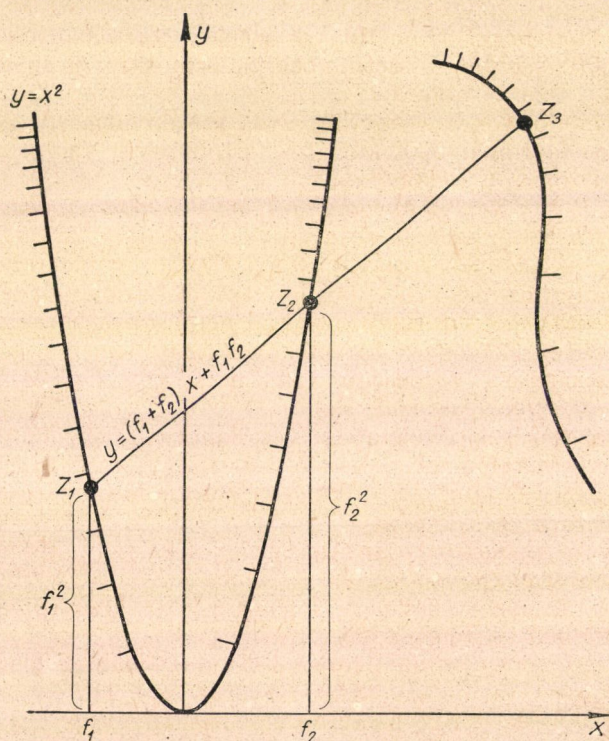
alakú negyedrendű kapcsolatok, mint ismeretes, olyan (CLARK-féle) nomogrammal ábrázolhatók, amelyben  $z_1$  és  $z_2$  skálájának egy közös kúpszelet-tartója van. A nomogram egy változatának skálaegyenletei

$$(8.a) \quad z_1 \text{ skála : } x = f_1, \quad y = f_1^2;$$

$$(8.b) \quad z_2 \text{ skála : } x = f_2, \quad y = f_2^2;$$

$$(8.c) \quad z_3 \text{ skála : } x = f_3, \quad y = g_3.$$

A  $z_1$  és  $z_2$  skálák közös tartója az  $y = x^2$  parabola (5. ábra) :



5. ábra



A gyakorlatban előforduló, háromnál magasabb nomográfiai rendszámú pontsoros nomogrammal ábrázolható kapcsolatok legnagyobb része vagy már közvetlenül a (3), (5), (7) alakok egyikében van megadva, vagy speciális ismereteket nem igénylő, egyszerű algebrai átalakítással ezekre redukálható. A (3), (5), (7) alakú kapcsolatokhoz tartozó (4), (6), (8) egyenletekkel meghatározott nomogramváltozatokat a nomogram *triviális változatának* fogjuk nevezni.

Pontmezős nomogramok triviális változata fentiekhez hasonlóan értelmezhető.

Nyilvánvaló, hogy az 1. §-ban ismertetett szerkesztés a pont és egyenes projektív értelmezése mellett akkor is elvégezhető, ha a nomogram kiindulásvett változata a triviális változat.

### 3. §. A konvex burok fogalmának projektív általánosítása és alkalmazása nomogramok transzformálásánál

A továbbiakban szükségünk lesz arra, hogy a nomogramok pontjaiból álló pontthalmaz konvex burkával foglalkozzunk. Minthogy a nomogramokat projektív transzformációknak vetjük alá, célszerű lesz a konvex tartomány és a konvex burok fogalmát a projektív síkon értelmezni.

Konvex tartománynak az olyan  $\mathcal{K}$  pontthalmazt nevezzük, amelyik projektív transzformációval korlátos és (közönséges értelemben) konvex tartománnyá alakítható. (Ennélfogva konvex tartományok az euklideszi síkon nem szükségszerűen összefüggőek, a projektív síkon azonban összefüggőek. (Vesd össze: 6. ábra.)

Ez a definíció korlátos tartományok esetén nem ad újat, minthogy korlátos konvex tartománynak korlátos tartományra való projektív leképezésénél a képtartomány is konvex.

Ha  $A$  és  $B$  egy konvex tartomány különböző pontjai, akkor az egyik  $AB$  szakasz  $\mathcal{K}$ -ban fekszik.

Minthogy állításunk korlátos konvex tartományokra igaz, ebből a konvex tartomány definíciója alapján következik bármely ilyen tartományra.

Megjegyzendő, hogy e tulajdonsággal nemcsak a konvex tartományok rendelkeznek, hanem a konvex tartományok komplementerjei is.

Az  $e$  egyenest a  $\mathcal{K}$  közönséges értelemben vett konvex tartomány támaszegyenesének szokás nevezni, ha

1) a  $\mathcal{K}$  közönséges értelemben vett konvex tartománynak legalább egy határpontját tartalmazza,

2) az  $e$  egyenes által az euklideszi síkon meghatározott két félsík közül egyikén nincs  $\mathcal{K}$ -nak pontja.

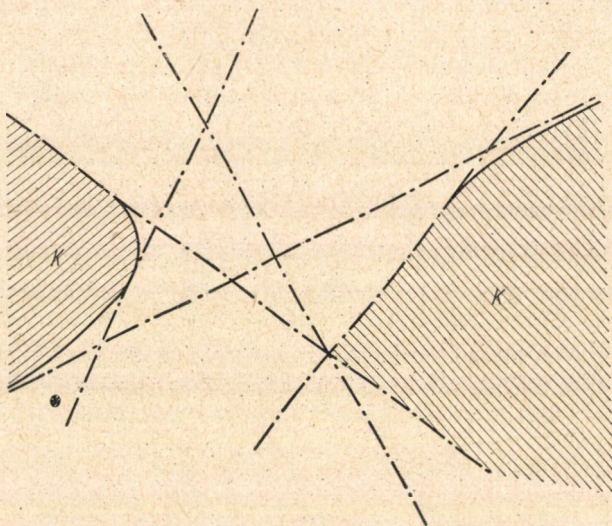
A sík olyan projektív transzformációjánál, mely  $\mathcal{K}$ -t újra véges  $\mathcal{K}'$  konvex tartományra képezi le,  $\mathcal{K}$  és  $\mathcal{K}'$  támaszegyenesei nyilván egymásnak felelnek meg. A támaszegyenes  $e$  definíciója a következőképp általánosítható a nem-véges konvex tartomány esetére:

Legyen  $f$  egy tetszőszerinti, teljesen  $\mathcal{K}$  külsejében fekvő egyenes. Nevezük  $e$ -t a  $\mathcal{K}$  konvex tartomány támaszegyenesének, ha

1.  $e$  tartalmazza  $\mathcal{K}$ -nak legalább egy határpontját,

2. az  $e$  és  $f$  egyenesek által meghatározott egyik szögtér belsejében nincs  $\mathcal{K}$ -nak pontja (6. ábra).





6. ábra

*Konvex tartomány és támaszegyenesei*

Ha  $\mathcal{K}$  síkját olyan projektív transzformációnak vetjük alá, mely  $f$ -et a végtelen távoli egyenesbe viszi át,  $e$  képe  $\mathcal{K}$  véges képének közös egyenesbe vett támaszegyenésébe megy át. Ennélfogva könnyen belátható, hogy ez a definíció  $f$  speciális választásától független.

Ha  $\mathcal{K}$ -nak van belső pontja, akkor egy  $\mathcal{K}$ -n kívül felvett  $P$  ponton  $\mathcal{K}$ -nak pontosan két támaszegyenese halad át. Az állítás a szemlélet alapján belátható.

A  $\mathcal{Q}$  zárt halmazt a  $\mathcal{H}$  halmaz konvex burkának nevezzük, ha

1.  $\mathcal{Q}$  tartalmazza  $\mathcal{H}$ -t,
2.  $\mathcal{Q}$  konvex tartomány,
3.  $\mathcal{Q}$ -nek semmilyen valódi részhalmaza nem tesz eleget 1-nek és 2-nek.

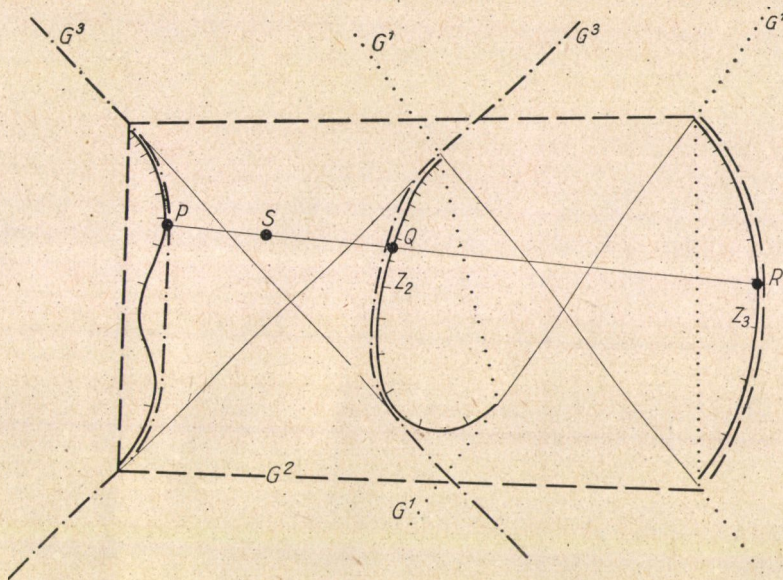
A továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a szóbanforgó  $\mathcal{H}$  halmaz zárt. Nyilvánvaló, hogy konvex burok csak akkor lehetséges, ha van olyan egyenes, amelyik  $\mathcal{H}$ -t nem metszi. Azt mondjuk, hogy a  $\mathcal{Q}$  konvex burok az  $e$  egyeneshez tartozik, ha  $\mathcal{Q}$ -nek nincs  $e$ -vel közös pontja.

A konvex tartomány, a tartományhoz tartozó támaszegyenések, a konvex burok, az egyeneshez tartozó konvex burok mind projektív invariánsok. A végtelen távoli egyeneshez tartozó konvex burkot véges konvex buroknak fogjuk nevezni. Ez nyilván azonos az euklidesi síkon értelmezett konvex burokkal, melyről ismeretes, hogy egy és csak egy ilyen létezik, ha  $\mathcal{H}$  korlátos. Ebből következik a  $\mathcal{H}$  halmaznak tőle diszjunkt  $e$  egyeneshez tartozó konvex burkának létezése és unicitása, ha a végtelen távoli egyenest a sík projektív transzformációjával az  $e$  egyenesbe visszük át.

Miután különböző egyenesekhez nem feltétlenül tartozik  $\mathcal{H}$ -nak ugyanaz a konvex burka, a konvex buroknak az euklidesi síkon érvényes unicitási tétele nem marad a projektív síkon érvényben. (Így pl. ha  $\mathcal{H}$  két pontból áll, pontosan két konvex burka van, tudniillik a két pont által a projektív síkon meghatározott két szakasz.)



Foglalkozzunk ezután olyan pontsoros, vagy pontmezős nomogramokkal, melyeknek skálatartományai a projektív síkon összefüggő tartományok. A gyakorlatban ez a feltétel legtöbbször teljesül. A szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy ilyen nomogramnak, mint pontthalmaznak legfeljebb három konvex burka lehet. Legyen a három skálatartomány tetszőleges három, egy egyenesen fekvő pontja  $P, Q, R$ , melyek közül  $P$  a  $\mathcal{Z}_1$ ,  $Q$  a  $\mathcal{Z}_2$ ,  $R$  a  $\mathcal{Z}_3$  skálatartományhoz tartozó. Legyen továbbá a  $PQR$  egyenesnek egy, a nomogram valamelyik  $Q$  konvex burkán kívül fekvő pontja  $S$ . Nevezzük a  $Q$  konvex burkot a nomogram skálatartományaira nézve *jó elrendezésűnek*, ha  $P, Q, R$



7. ábra

Nomogram konvex burkai. ( $Q^3$  jó elrendezésű).

tetszőleges megválasztása esetén  $P$  és  $Q$  elválasztja egymástól  $R$ -t és  $S$ -et. (7. ábra).

A nomogram konvex burka a nomogrammal szemben támasztott következő két gyakorlati irányelv szempontjából fontos.

A) Ne legyen a nomogramnak végtelenbe nyúló része. Ez mindenképpen kielégítendő követelmény.

B) A nomogram eredményskála, vagy az ehhez tartozó pontmező lehetőleg essék a másik két skálatartomány „közé”. Ennek az irányelvnek, — melynek kielégítése a gyakorlati esetek egy nagy részében célszerű — az indokolásával a következő §-ban foglalkozunk.

Ez a két feltétel a konvex burok fogalmának segítségével pontosabban fogalmazható: *a nomogramnak legyen véges konvex burka, és ez legyen a három skálatartományra nézve jó elrendezésű*. Az ilyen nomogramot *jó elrendezésű nomogrammnak* fogjuk nevezni.

Előfordul, hogy a skálatartományokra vonatkozó jó elrendezés kikötése nem teljesíthető, mert két skálatartománynak közös részthalmaza van (pontsorok esetén a tartók átmetszik egymást). Viszont, ha a skálatar-



tományokat képező ponthalmazok gyakorlati szempontból jelentős része kielégíti a jó elrendezés feltételét, érdemes lehet a fentemlített, jó elrendezésre vonatkozó követelményt értelemszerűen gyengíteni azáltal, hogy azt csak a skálatartományoknak előre lerögzített jelentősebb részhalmazára vonatkozóan követeljük meg. A gyengített feltételt kielégítő konvex burkot nevezzük gyakorlati értelemben *jó elrendezésűnek*.

Legyen a nomogramnak valamely kiindulásul választott alakja  $\mathcal{N}$ , és legyen  $T$  az a projektív transzformáció, mely  $\mathcal{N}$ -et a végleges  $\mathcal{N}'$  nomogramváltozatba viszi át. Legyen továbbá  $w$  az  $\mathcal{N}$  síkjának az az egyenese, amely a  $T$  projektív transzformációnál a képsík végtelen távoli egyenesébe megy át.

Az A) követelmény ekvivalens azzal, hogy az  $\mathcal{N}'$  nomogramnak legyen  $Q'$  véges konvex burka, azaz a kiindulásul választott nomogramot csak olyan  $T$  transzformációnak szabad alávetni, amelynél  $w$  nomogram valamely  $Q$  konvex burkától diszjunkt.

Foglalkozzunk ezek után olyan nomogramokkal, melyeknek van leg-  
alább gyakorlati értelemben jó elrendezésű  $Q^*$  konvex burka.

A nomogram transzformációjánál hasznos tájékoztatást ad a következő szabály:

*Az  $\mathcal{N}$  nomogram  $T$  leképezésénél kapott  $\mathcal{N}'$  nomogram akkor és csak akkor tesz eleget fenti A) és B) feltételeknek, ha  $w$ -nek  $Q^*$ -gal nincs közös pontja.*

Ugyanis mint mondtunk,  $\mathcal{N}'$  korlátossága (A) feltétel ekvivalens azzal, hogy  $\mathcal{N}$ -nek van egy  $w$ -től diszjunkt konvex burka. Másrészt pedig a konvex burk jó elrendezése projektív invariáns tulajdonság, és így a B) feltétel teljesülése ekvivalens azzal, hogy ez a konvex burk épp  $Q^*$ .

Ebből következik, hogy az első vázlatból jó elrendezésű, korlátos nomogramot kapunk, ha a  $Q$  burkon kívüli  $w$  egyenest transzformálunk végtelen távolivá. Ez megkönnyíti számunkra a tájékozódást akkor is, ha az első vázlatnak végtelenben fekvő elemei (pontjai vagy egész skála) vannak és benne a skálák sorrendje nem megfelelő.

\*

Sajnos, elég gyakoriak az olyan ábrázolható függvénykapcsolatok, melyek nomografikus ábrázolásánál a jó elrendezésre vonatkozólag még a gyengített feltételek sem teljesíthetők. A következőkben bemutatunk két gyakran előforduló nomogramtípust, melynek nincs jó elrendezésű konvex burka. Amennyiben a  $\mathcal{Q}_1$  és  $\mathcal{Q}_2$  skálatartomány összefügg egymással, összehalmazuknak a nomogram korlátossága miatt pontosan egy konvex burka van. Jelöljük ezt  $Q_{12}$ -vel. Könnyen belátható, hogy ekkor a jó elrendezésű konvex burk definíciója értelmében a nomogramnak nincs jó elrendezésű konvex burka, még gyakorlati értelemben sem, ha a  $\mathcal{Q}_3$  tartomány minden pontja  $Q_{12}$  külsejében vagy határán helyezkedik el.

Ez az eset áll fenn pl. az

$$(9) \quad f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2) g_3 + h_3 = 0$$

kapcsolatok CLARK-féle nomogramja esetén, amelynél  $z_3$  a keresett változó és amely kielégíti a következő két feltételt:

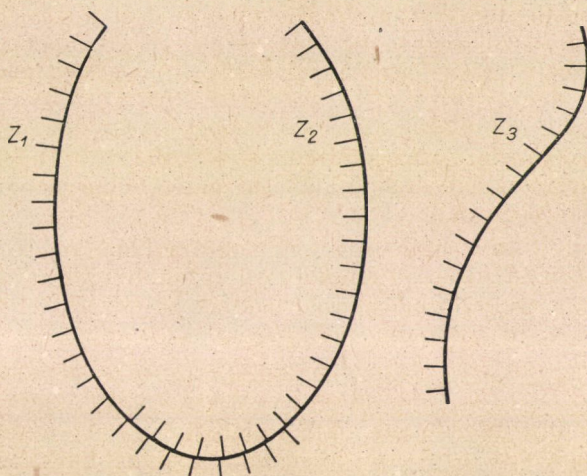
1. Van olyan  $z_1 = z_1^0$  és  $z_2 = z_2^0$  értékpár, melyre  $f_1 = f_2$  és



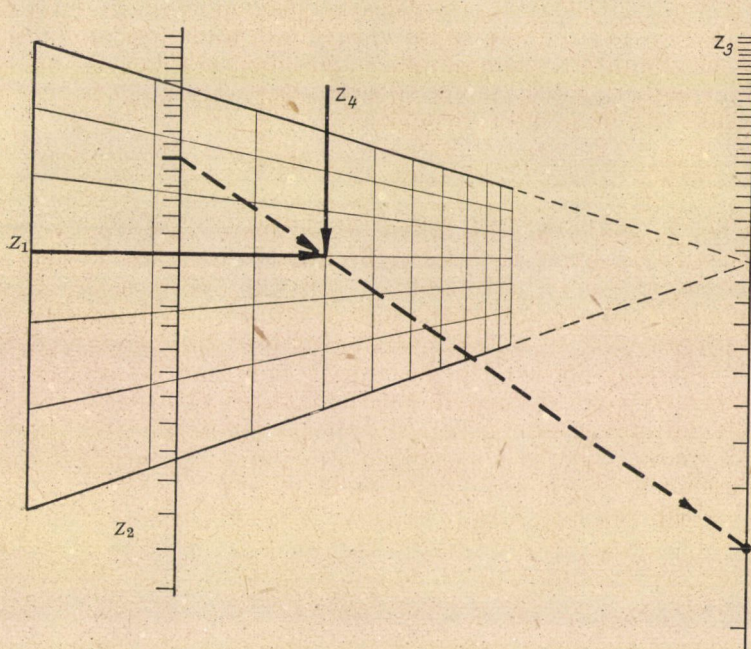
2. minden  $z_3$  értékre fennáll az

$$f_3 h_3 < g_3^2$$

egyenlőtlenség. (Ez az egyenlőtlenség biztosítja, hogy a  $z_3$  skála egésze a  $z_1, z_2$  változók közös kúpszelet-tartójának külsejében legyen.) (Lásd. 8. ábra.)



8. ábra



9. ábra



Továbbá például nincsen gyakorlati értelemben sem jó elrendezésű konvex burka az

$$(10) \quad f_2 - f_1 + f_3 f_4 = 0$$

kapcsolat Cauchy-típusú pontmezős nomogramjának, melynek egy-egy egyenes skálatartója van a  $z_2$  és  $z_3$  változók számára és egy pontmezője a  $z_1$  és  $z_4$  változók számára ( $z_3$  értéke az eredmény), továbbá

1. van olyan nomogramban ábrázolandó  $z_1 = z_1^0$ ,  $z_2 = z_2^0$  és  $z_3 = z_3^0$  értékhármass, melyre

$$f_1 = f_2 \text{ és } f_4 = 0$$

és

2.  $f_4$  alulról vagy felülről korlátos.<sup>2)</sup> (Lásd: 9. ábra az előző oldalon.)

Megjegyezzük, hogy mindkét példában  $z_1 = z_1^0$ ,  $z_2 = z_2^0$  (és  $z_4 = z_4^0$ ) értékekre e nomogram nem használható; ezen értékek környezetében a nomogram használata igen nagy leolvasási hibával jár. Ennek oka a második példában az ábrázolandó kapcsolat struktúrájában keresendő, mert a képletet

$$f_3 = \frac{f_1 - f_2}{f_4}$$

alakban írva, a jobboldal fenti értékekre értelmetlenné válik.

Az első példában ezzel szemben az a leolvasásnál fellépő zavar a nomogramikus ábrázolásmódból adódik, amennyiben a (9) kapcsolat helyett — mint ismeretes — az

$$(f_1 - f_2)[f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2) g_3 + h_3] =$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 1 & -f_1 & f_1^2 \\ 1 & -f_2 & f_2^2 \\ 1 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0$$

kapcsolatot ábrázoljuk. Így, bár az eredeti kapcsolat  $f_1 = f_2$ -re nem válik triviálissá, az  $f_1 - f_2$ -vel bővített kapcsolat már igen. Vagyis az ábrázoláshoz szükséges  $f_1 - f_2$  tényezővel való bővítés csempészi be az említett leolvasási zavart.

#### 4. §. A nomogram kivitelezésére vonatkozó gyakorlati követelményekről

A nomogram használata esetén az eredménynek csak megközelítő értékét kapjuk meg. Azonban minden nomogramtól megkívánjuk, hogy a leolvasással elérhető pontosság a gyakorlat szempontjából kielégítő legyen és hogy a nomogram méretei ne legyenek olyan nagyok, hogy annak használatát komolyan nehezítsék, vagyis, ha a nomogramot olyan nagyságban készítjük el, hogy adott alakú és méretű papírlapon elhelyezhető legyen; akkor a leolvasási hiba nagysága előírt korlát alatt maradjon.

<sup>2)</sup> Enélkül a  $z_3$  skála beleeshetne a  $(z_1, z_4)$  pontmezőbe és ekkor a nomogramnak esetleg lehetne *gyakorlati értelemben* jó elrendezésű konvex burka.



A *pontsoros nomogramok* használatánál a  $z_3$  értékében mutatkozó hiba általában két komponensből adódik:

a) a nomogram pontatlan elkészítéséből, a papír utólagos deformációjából, a vonalzó nem egyenes voltából származó „objektív” hiba (ezzel itt nem foglalkozunk);

b) a leolvasás pontatlanságából származó „szubjektív” hiba. Ennek forrásai: a leolvasásnál használt vonalzó pontatlan beállítása, a  $z_3$ -skálán való leolvasásnál a vonalzó élének véges vastagsága miatt fellépő parallaxis, a  $z_3$ -skála tartójának véges vastagsága, továbbá a  $z_3$ -skála beosztásainak véges vastagsága, illetőleg az osztások közötti interpoláció hibája.

PENTKOVSKIJ [2] és HAJÓS [3] foglalkozott nomogramok leolvasási hibáival. Az általuk megadott képleteket jelen cikk tartalmának megfelelően átfogalmazva és egyesítve a következőképpen fejezhető ki a nomogram leolvasásánál fellépő különböző hibaforrások által okozott hiba legnagyobb értéke:

$$(11) \quad \Delta z_3 = \frac{dz_3}{ds} \Delta s,$$

ahol

$$(12) \quad \Delta s = \frac{p+v}{\sin \alpha} + d \cotg \alpha + \delta$$

(10., 11. ábrák). Itt  $\Delta z_3$  jelenti a leolvasásnál a  $z_3$  változó értékében jelentkező hibát;

$s$  a  $z_3$  skálán a skála valamely rögzített pontjától mért ívhosszat;

$\frac{dz_3}{ds}$  a  $z_3 = z_3(s)$  függvénynek az  $s$  ívhossz szerinti differenciálhányadosát,

amely a skála sűrűségét méri.

Az alábbiakban olyan skálákkal vagy skálarészekkel foglalkozunk, amelyekre  $\frac{dz_3}{ds}$  állandó előjelű.  $s$  pozitív irányának megfelelő választásával,

tehát  $\frac{dz_3}{ds} > 0$ . Ez azonban a lényeget illetően nem jelent semminemű megszorítást.

$\Delta s$  jelenti a pontos és a leolvasott  $z_3$  értékhez tartozó skálapontok távolságát.

Jelölje  $R$  a leolvasásnál a  $z_1$  és  $z_2$  értékekhez tartozó skálapontokon átfektetett  $i$  egyenesnek és a  $z_3$  skálának metszéspontját. (Az  $R$ -nél található  $z_3$  érték adja meg a kiválasztott  $z_1$ -hez és  $z_2$ -höz tartozó eredményt.) Jelölje  $e$  a  $z_3$  skála  $R$ -ben meghúzott érintőjét. Akkor a (12) képletben

$\alpha$  az  $i$  és  $e$  egyenesek hajlásszöge;

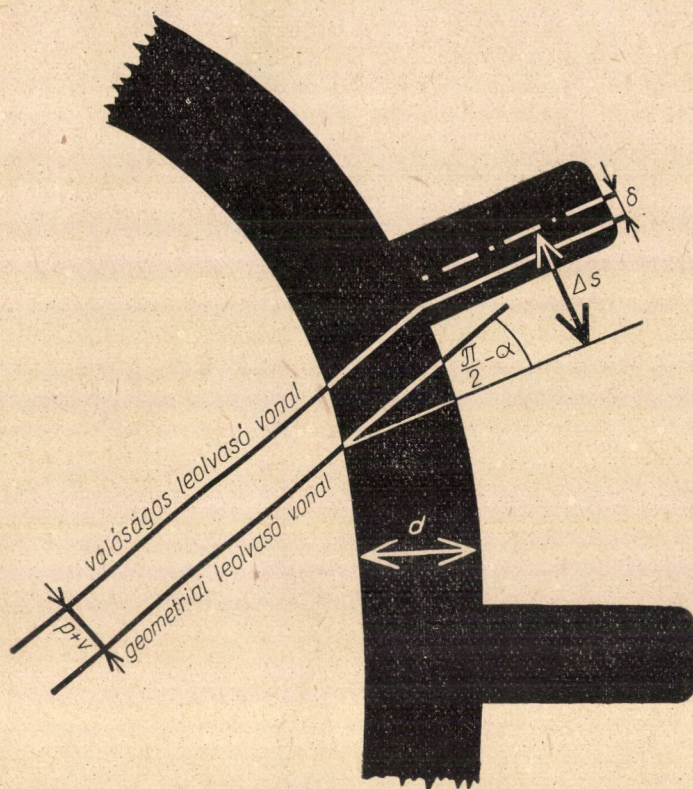
$p$  a vonalzó véges élvastagsága miatt fellépő parallaxis;

$\delta$  a  $z_3$ -skála osztásvonalának véges vastagsága miatt, vagy az interpolációs hiba miatt fellépő eltolódás;

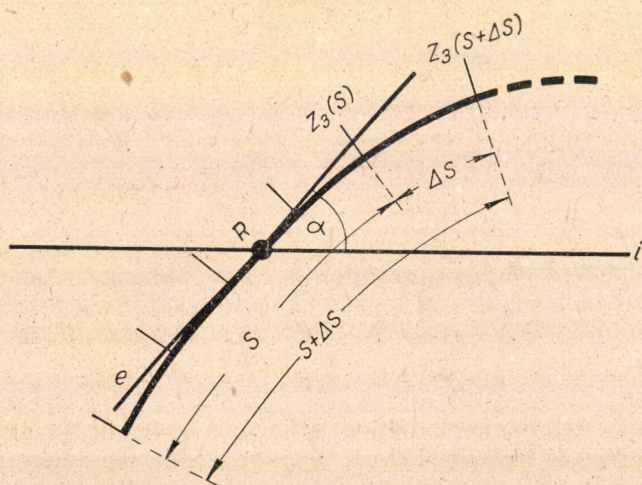
$d$  a  $z_3$ -skála vastagsága;

$v$  a vonalzó pontatlan beállításának következtében  $R$ -nél  $i$ -re merőleges irányban fellépő eltolódás.





10. ábra



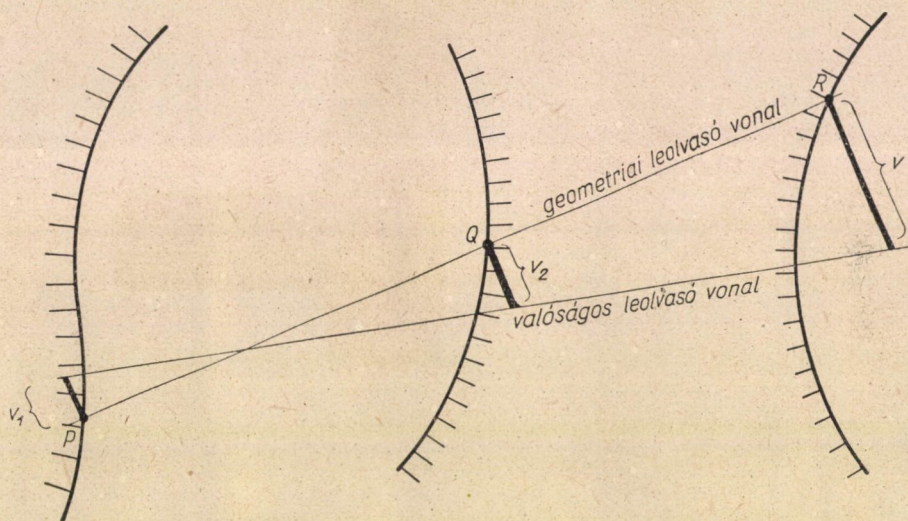
11. ábra



PENTKOVSZKIJ  $v$  értékét a vonalzónak a  $z_1$  és  $z_2$  skálákon mutatkozó beállítási hibájából számítja ki. Ha a leolvasásnál a  $z_1$  skálán fekvő  $P$ , a  $z_2$  skálán fekvő  $Q$  és a  $z_3$  skálán fekvő  $R$  pontokat kötjük össze az  $i$  egyenessel, akkor kedvezőtlen esetben, azaz, ha a  $z_1$  skálán jelentkező  $v_1$  és a  $z_2$  skálán jelentkező  $v_2$  vonalzóbeállítási hiba összegeződik:

$$(13) \quad v = \frac{v_1 \cdot \overline{QR} + v_2 \cdot \overline{PR}}{\overline{PQ}},$$

ahol  $v_1$  és  $v_2$  az  $i$  egyenesre (»geometriai leolvasó vonal«) merőleges eltolódásokat jelentenek (lásd 12. ábra). Itt  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{PR}$ ,  $\overline{QR}$  távolságokat jelentenek.  $v_1$  és  $v_2$  kismértékben függ ugyan az  $i$  egyenesnek a  $z_1$  illetőleg  $z_2$  skálatartó



12. ábra

érintőjével bezárt szögétől az illető skálák véges vonalvastagsága miatt, mi azonban ezt a körülményt nem vesszük figyelembe. Fel fogjuk tenni, hogy  $v_1 = v_2 = \text{állandó}$ . Ha az  $R$  pont  $P$  és  $Q$  között van, akkor (13)-ból

$$(13.a) \quad v = v_1,$$

ha azonban a felvett pontok sorrendje pl.  $PQR$ , akkor

$$(13.b) \quad v = \frac{\overline{PR} + \overline{QR}}{\overline{PR} - \overline{QR}} v_1 > v_1.$$

A (13.a) és (13.b) képletekből látható, hogy míg jó elrendezésű nomogramok esetén a leolvasási hiba gyakorlatilag független a  $PQ$  távolságtól, addig nem jó elrendezésű nomogrammnál akármilyen nagy lehet, ha a  $P$  és  $Q$  pontok elég közel esnek egymáshoz.



Ezért, ha egyéb, nyomósabb szempontok nem szólnak ellene, mindig érdemes arra törekedni, hogy az eredményskála a többi között helyezkedjék el, azaz a nomogram jó elrendezésű legyen.

$\Delta z_3$ -nak (11) és (12) által meghatározott értéke nemcsak a leolvasó gyakorlottságától, jó szemétől, diszpozíciójától, továbbá a nomogram rajztechnikai kivitelétől, stb. függ, hanem a nomogram geometriai konstrukciójától is. Ez utóbbitól függenek ugyanis  $\frac{dz_3}{ds}$ ,  $\alpha$  és részben  $v$  is.

A gyakorlat általában előír valamilyen  $H$  hibakorlátot, amely még  $z_3$  függvénye lehet:

$$|\Delta z_3| \leq H(z_3).$$

Legtöbbszörre két előírás szokásos: 1.  $H(z_3)$  állandó (a hiba abszolút értéke van korlátozva), vagy pedig 2.  $H(z_3)$  arányos  $z_3$ -al (a relatív hiba abszolút értéke van korlátozva).

A nomogram szerkesztésénél szemünk előtt lebegő szempont, hogy

$$(14) \quad F(z_1, z_3) = \frac{\Delta z_3}{H(z_3)} = \frac{\frac{dz_3}{ds}}{H(z_3)} \Delta s$$

a lehető legkisebb legyen, azaz ha a különböző  $(z_1, z_3)$  számpárok egyenlő fontosságúak (pl. a nomogramot ábrázolandó értéktartományon belül bármely  $(z_1, z_3)$  értékpár egyenlő valószínűséggel fordulhat elő), akkor  $\max_{(z_1, z_3)} F(z_1, z_3)$  minimális legyen az előírt kapcsolat és nomogramterjedelem mellett.

Meg kell jegyeznünk, hogy vannak olyan ábrázolható kapcsolatok, ahol a leolvasási hiba nem korlátos és semilyen transzformációval sem tehető korlátossá. Így pl. a  $z_3 = z_1/z_2$  kapcsolat egyenletes  $z_1$  és  $z_2$  skálájú, jól elrendezhető, úgynevezett  $Z$  nomogramján, vagy az

$$\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3}.$$

kapcsolat egyenletes  $z_1, z_2, z_3$  skálájú, jól el nem rendezhető nomogramján, ha mindkét esetben  $z_2 = 0$  és  $z_1 = 0$  bennefoglaltatik a változók értéktartományában (13., 14. ábra). Ilyenkor csak olyan hibakorlátot írhatunk elő, amely  $z_1$ -től is függ, pl.

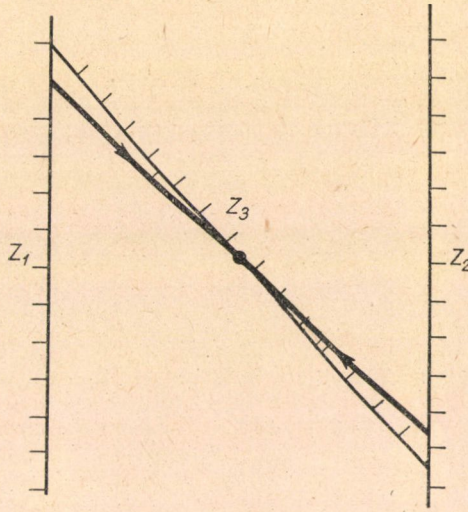
$$|\Delta z_3| < H^*(z_3, z_1) = H(z_3) K(z_1).$$

$K(z_1)$  olyan függvény, mely  $z_1 \rightarrow 0$  esetén a szükséges rendben végtelenhez tart. Fenti példáinknál pl.

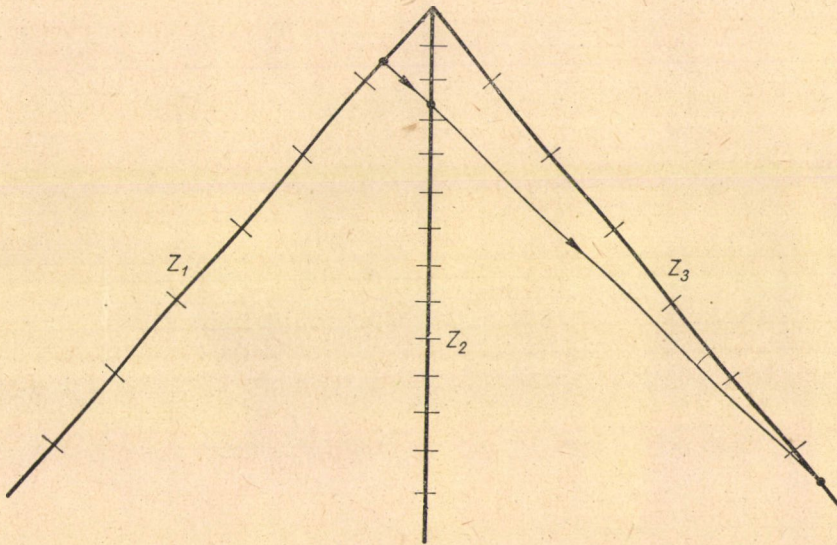
$$K(z_1) = \begin{cases} \frac{m}{z_1}, & \text{ha } |z_1| < m \\ m, & \text{ha } |z_1| \geq m, \end{cases}$$

választható, esetenként alkalmasan választott  $m$  értékkel.





13. ábra



14. ábra

*Pontmezős nomogramok* esetén a hibaforrások száma megnövekszik.

$v$  értékét növeli, ha a  $\mathcal{Z}_1$  vagy  $\mathcal{Z}_2$  skálatartományoknak legalább egyike pontmező. Ha ugyanis pl. a  $\mathcal{Z}_1$  skálatartomány a  $z_1$  és  $z_4$  változók skáláját tartalmazza, akkor 1. a vonalzó beállításánál a  $z_1$  és  $z_4$  skálák vonalai között egyidejűleg kell interpolálni és 2. a  $z_1$  és  $z_4$  skálák vonalainak esetleges éles metszése is pontatlanná teszi a vonalzó beállítását.



Ugyanígy  $\delta$  értékét növeli, ha a  $\mathcal{Z}_3$  skálatartomány pontmező, különösen, ha a  $z_3$  és  $z_6$  skálák vonalai élesen metszik egymást.

Ezért pontmezős nomogramok tervezésénél arra is kell ügyelni, hogy az egyes pontmezőkön belül a görbeseregek lehetőleg ne messék egymást élesen.

### 5. §. Az eredményskála sűrűségének szabályozása egyenes tartó esetén

A (14) képletben szereplő  $F(z_1, z_3)$  függvény  $\frac{1}{H(z_3)} \frac{dz_3}{ds}$  tényezője lényegében a  $z_3(s)$  skálafüggvénytől függ, a  $z_3$  skála tartójának alakjától és a többi skálától azonban független. A  $\Delta s$  tényezőnek a nomogrammban előforduló legnagyobb értéke viszont a (12) képlet alapján a skálák sűrűségétől függetlennek tekinthető és csak a skálatartók geometriai viszonyaitól függ. Ha a nomogram eredményskáájának tartója egy  $r$  egyenes, a „jó” nomogramhoz vezető projektív transzformáció meghatározására szolgáló szerkesztés az  $F(z_1, z_3)$  függvény két tényezőjének ezen sajátosságát felhasználva különösen jól hozzá idomítható az előző paragrafusban említett gyakorlati követelményekhez.

Célunk, hogy olyan projektív transzformációt szerkesszünk, mely a nomogram triviális változatát az  $F(z_1, z_3)$  függvény minimumát megközelítő változatba viszi át. A nomogram gyakorlatilag legjobb változatának megközelítését egyenes  $z_3$  tartó esetére kényelmi szempontból két szakaszban végezhetjük; először a  $z_3$  skála skálafüggvényét igyekszünk alkalmas transzformációs paraméterekkel — a nomogram többi skálájával és a többi transzformációs paraméterrel mit sem törődve — kedvezően befolyásolni, majd az eredményskála sűrűségi viszonyait többé nem bolygatva a még szabadon hagyott transzformációs paraméterek megfelelő megválasztásával a nomogramskáák tartóinak geometriai viszonyaira gyakorolunk befolyást.

Eljárásunk első, a  $z_3$  skála sűrűségét szabályozó szakaszában a  $z_3$  skálán mérhető hosszak mérésére hosszegységet választunk, azaz őket egy rögzített hosszúsághoz viszonyítjuk. Ettől a hosszúságtól meg kell követelnünk, hogy lehetőség szerint független legyen a kiindulásul választott  $\mathcal{N}$  nomogramot a végleges  $\mathcal{N}'$  változatba átalakító  $T$  projektív transzformáció megválasztásától. Ilyen volna pl. az  $\mathcal{N}'$  számára megadott területrés  $D$  legnagyobb átmérője. A tervezés egyszerűsítése érdekében Pentkovszkij ehelyett a  $z_3$  skálához rögzített hosszat választ: a  $z_3$  skála  $g$  hosszát<sup>4)</sup>. Ez azonban nem független a  $T$  transzformációtól. Ennélfogva módszerének alkalmazásánál előfordulhat, hogy a  $z_3$  skála viszonylagos sűrűsége  $\mathcal{N}'$ -ben kielégítő, a  $z_3$  skála azonban oly rövidnek adódik  $D$ -vel összehasonlítva, hogy a leolvasási hiba mégis lényegesen nagyobb, mint egy olyan  $T^*$  alkalmazása mellett, amely a skála viszonylagos sűrűsége szempontjából nem olyan jó, de hosszabb  $z_3$  skálát eredményez. Ezért célszerűbbnek látjuk, hogy a  $g$  hossz helyett

<sup>4)</sup> PENTKOVSKIJ [1] (48. §.) a skálák jellemzésére bevezeti a karakterisztika fogalmát. A mi jelöléseinkkel a  $z_3$  skála karakterisztikája

$$K = \left[ \frac{g}{H(z_3)} \frac{dz_3}{ds} \right]^{-1}.$$

Egyenes skálák esetén meglehetősen bonyolult képletet közöl a  $K$  minimumát adó projektív transzformáció bizonyos esetekben való meghatározására.



az  $r$  egyenesnek  $\mathcal{H}'$  véges  $Q'$  konvex burkával való  $\overline{I'J'}$  közös szakaszának  $h$  hosszát vezessük be mértékegység gyanánt. A gyakorlatban megvalósított nomogrammoknál  $h$  meghaladja  $D$  felét-háromnegyedét. (Az esetek nagyrésztében  $h$  hozzávetőlegesen megegyezik az  $\mathcal{H}'$  számára rendelkezésre álló téglalap-alakú síkrész egyik oldalával.)  $\Gamma$  meghatározásának második szakaszában ezt könnyűszerrel biztosíthatjuk, tehát erre az első szakaszban nem kell ügyelnünk. Így  $h$  gyakorlatilag állandónak tekinthető, azaz független  $\Gamma$ -től, legalábbis az egyáltalában szóba jövő  $\Gamma$  transzformációk esetében. Másrészt  $h$  pusztán a skálák geometriai viszonyaitól függ, a  $z_3$  skála sűrűségétől független, így  $h$  kellő nagyságának biztosítása valóban a második szakaszra hagyható. Ezek alapján a  $\Gamma$  megválasztására javasolt eljárásunk pontosabban a következő két szakaszból áll:

1. Az  $r$  egyenest egy  $\dagger$  projektív transzformációval úgy képezzük le egy  $r'$  egyenesre, hogy ezáltal a dimenzió nélküli

$$(15) \quad \varphi(z_3) = \frac{h}{H(z_3)} \frac{dz_3}{ds}$$

menyiség lehetőség szerint egyenletesen kicsiny legyen. Ez a követelmény a  $\dagger$  transzformációt és az  $r'$  egyenesen fekvő skálát *hasonlósági transzformációtól eltekintve* határozza meg. Másszóval: *ebben a lépésben  $r'$  végtelen távoli pontjának az  $r$  egyenesen fekvő  $W$  megfelelőjét határozzuk meg.*

2. Ezután a  $\dagger$  leképezést a triviális nomogrammváltozat  $\Sigma$  síkjának valamely  $\Sigma'$  síkra való olyan  $\Gamma$  projektív transzformációjába ágyazzuk, amellyel  $a$ ) a  $\Sigma'$  síkban ábrázolt nomogramon a szintén dimenzió nélküli

$$(16) \quad \sigma = \frac{\Delta s}{h} = \frac{1}{h} \left[ \frac{p+v}{\sin \alpha} + d \cot \alpha + \delta \right]$$

menyiség a lehetőséghez képest kicsiny, és  $b$ ) a nomogram a sík előírt területrészen helyezhető el. Az esetek egy nagy részében eljárásunk e második szakaszában elegendő a nomogramskálák tartóinak geometriai viszonyait tekintetbe venni anélkül, hogy akár a  $z_3$ , akár a  $z_3$  skála sűrűségi viszonyaira ügyelnénk. (Kivételes esetekben azonban ez is szükségessé válhat.) Az itt javasolt módszer lépéseinek illusztrálására először az  $r$  egyenes transzformációját vizsgáljuk, majd a következő paragrafusban a  $\dagger$  transzformációnak a  $\Gamma$  transzformációba való beágyazását két egyszerű nomogramtípuson szemléltetjük.

**Eljárás a  $\dagger$  transzformáció meghatározására.** Vegyünk fel az  $r$  egyenesen történő helymeghatározásra tetszés szerinti rögzített kezdőpontot és  $r$ -nek a  $Q$  burokba eső részén tetszés szerinti  $\overline{KL}$  szakaszt. A  $\dagger$  leképezés által nyert pontokat és koordinátákat vesszővel jelöljük.  $r'$  végtelen távoli  $W'$  pontjának megfelelője az  $r$  egyenesen  $W$ . Az  $II'$ ,  $JJ'$ ,  $WW'$  pontpárok meghatározzák az egyenes projektív leképezését és koordinátaikkal meghatározható a  $K'L'$  szakasz előjelével együtt:

$$(17) \quad \frac{\overline{K'L'}}{I'J'} = \frac{(l j i w)}{(i k l w)} = \frac{k-l}{i-j} \frac{(w-i)(w-j)}{(w-k)(w-l)} \equiv f(w; i, j, k, l),$$

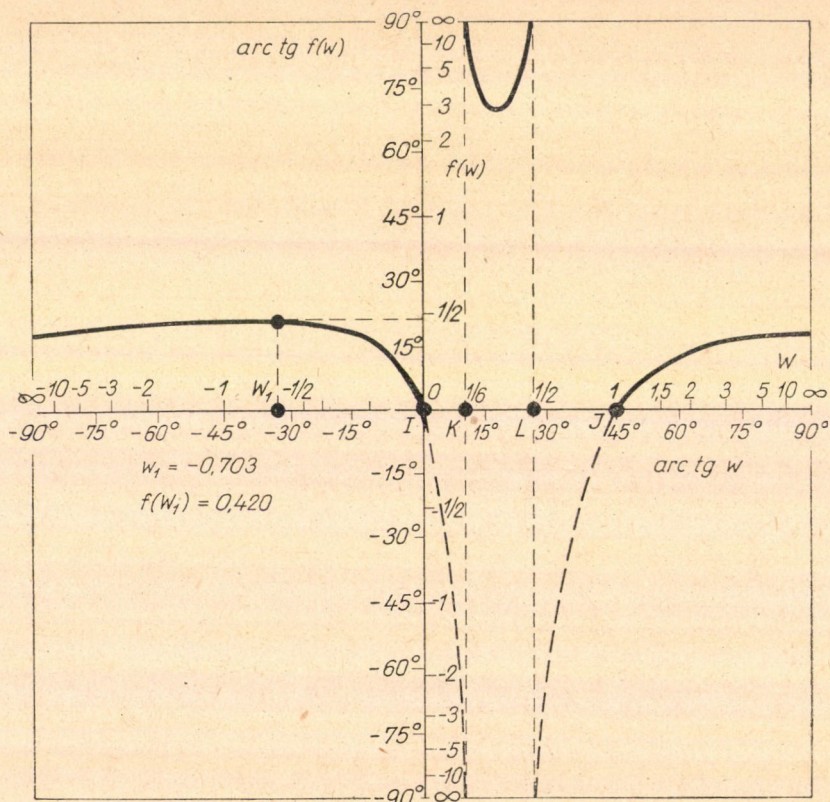


ahol a kis betűk a megfelelő nagy betűvel jelzett pontok koordinátáit jelentik. Az összefüggés közvetlenül igazolható a benne szereplő kettősviszonyok részletes kiírásával, ha tekintetbe vesszük, hogy  $W'$  az  $r'$  egyenes végtelen távoli pontja. Az  $f(w; i, j, k, l)$  függvény — melyet, amennyiben ez félreértést nem okozhat, röviden  $f(w)$ -vel jelölünk — az  $r$  egyenes projektív transzformációjával szemben természetesen érzéketlen. Az  $f(w)$  függvény menete a következő táblázattal adható meg, ha a megadott pontok ciklikus sorrendje  $IKLJ$ :

	$w$	$i$		$k$		$l$		$j$		$i$
$f(w)$	Előjele	0	—	$\mp \infty$	+	$\pm \infty$	—	0	+	0
	Növekedés- csökkenés	$\searrow$	$\searrow$		$\searrow \nearrow$		$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow \searrow$	$\searrow$

Elemi következtetésekkel megmutatható, hogy az  $f(w)$  függvénynek pontosan két szélső értéke van, amelyek  $w$  abszisszája az

$$(18) [(i+j) - (k+l)] w^2 - 2(ij - kl) w + [ij(k+l) - kl(i+j)] = 0$$



15. ábra



egyenlet két megoldása, melyek közül az egyik a  $Q$ -be eső  $IJ$  szakaszra esik, a másik a  $Q$ -n kívüli szakaszra. Ez utóbbi mindig maximum (l. 15. ábra).

Most rátérünk a nomogramskálák valamely fenti 1. követelményt kielégítő + transzformációjának meghatározására.

A „legjobb”  $W$  pont a § elején mondottak értelmében a következőképpen jellemezhető:

A  $W$  pont által (hasonlósági transzformációtól eltekintve) definiált + transzformációnak alávetett  $z_3$  skálához tartozó  $\varphi(z_3)$  függvény maximuma a „legjobb”  $W$  esetén legkisebb.

Pentkovszkij az előbb idézett helyen lényegében ezt a szélső értéket határozza meg, ami meglehetősen bonyolult képletekre és előírásokra vezet. Ehelyett itt egyszerűbb eljárást javasolunk, mely gyakorlatilag teljesen kielégítő eredményekre vezet. Lemondva a „legjobb”  $W$  meghatározásáról, meghatározzuk  $\varphi(z_3)$ -nak a  $z_3$  skála véges számú szakaszán felvett átlagértékeit és e véges számú érték közül keressük ki a legnagyobbat. Feladatunk most annak a  $W$  pontnak a meghatározása, melyre e maximum a legkisebb.

Részletesebben: a  $z_3$  skála ábrázolandó  $R_1 R_{n+1}$  szakaszát az  $I, R_1, R_2, \dots, R_{n+1}, J$  sorrendű  $R_v$  pontokkal  $n$  részre osztjuk (a kiindulásul választott nomogrammváltozat alakjának, a pontossági követelmény természetének és egyéb szempontoknak figyelembevételével általában  $n = 2$ , esetleg 1 vagy 3 választás ajánlható).

A minimálisra teendő  $\varphi(z_3) = \frac{h}{H(z_3)} \frac{dz_3}{ds}$  függvény integrálközepe az  $R_v R_{v+1}$  szakaszon

$$\bar{\varphi}_v = \frac{\Phi(z_3^{(v+1)}) - \Phi(z_3^{(v)})}{f(w; i, j, r_v, r_{v+1})},$$

ahol

$$\Phi(z_3) = \int \frac{dt}{H(t)},$$

a  $W$  pont helyzetétől, illetőleg az alkalmazott projektív transzformációtól független érték. Így pl. ha  $H(z_3)$  állandó (a hiba nagyságát korlátozzuk), akkor

$$(19) \quad \Phi(z_3) = a z_3 + b,$$

és ha  $H(z_3)$  arányos  $z_3$ -mal (a hiba százalékos értékét korlátozzuk), akkor

$$(20) \quad \Phi(z_3) = a' \log z_3 + b',$$

( $a, b, a', b'$  állandók).

(17)-tel összehangban a  $\bar{\varphi}_v$  számok reciprok értékeit hasonlítjuk össze. Ezért ábrázoljuk az

$$F_v(w) = \frac{f(w; i, j, r_v, r_{v+1})}{\Phi(z_3^{(v+1)}) - \Phi(z_3^{(v)})}$$



függvényeket és jelöljük ki az

$$F(w) = \min_{r=1, 2, \dots, n} F_r(w)$$

függvényt. Az  $F(w)$  függvénynek a  $\mathcal{Q}$ -n kívüli  $\overline{IJ}$  szakaszon pontosan egy tartományi maximuma (az egész szakaszon felvett legnagyobb érték) van, amelyhez tartozó  $w$  értéket  $w_m$ -el jelöljük.

A  $\varphi(z_3)$  függvény csökkentése érdekében általában szükséges és elegendő a  $\Gamma$  projektív transzformációt úgy választanunk, hogy az  $r'$  egyenes végtelen távoli pontjának az  $r$  egyenes  $w_m$  koordinátájú  $W$  pontja feleljen meg.

Ha pl.  $n = 2$ , jelölje  $w_1$  az  $f(w; i, j, r_1, r_2)$ ,  $w_3$  pedig az  $f(w; i, j, r_2, r_3)$  függvény (18)-ból kiszámítható (lokális) maximumának helyét, és legyen  $\bar{w}$  az  $F_1(w) = F_3(w)$  egyenlet megoldása. (A szimmetrikusabb jelölés kedvéért az  $R_2 R_3$  szakaszhoz tartozó mennyiségeket itt  $r = 3$  indexszel látjuk el.)  $w$  értéke az

$$(21) \quad (R_1 R_3 R_2 W) = -\lambda$$

feltételből határozható meg, ahol

$$\lambda = \frac{\Phi(z_3^{(2)}) - \Phi(z_3^{(1)})}{\Phi(z_3^{(3)}) - \Phi(z_3^{(2)})}.$$

Ha  $W_1$  és  $W_3$  elválasztja a  $\bar{W}$  pontot  $\mathcal{Q}$ -tól, akkor  $w_m = \bar{w}$ , egyébként  $w_m = w_1$  vagy  $w_2$  aszerint, hogy  $F_1(w_1)$  kisebb, vagy nagyobb  $F_3(w_3)$ -nál.

A  $W$  pont különösen egyszerűen határozható meg, ha  $I' = R_1$ ,  $J' = R_{n+1}$ . Ez a helyzet pl. akkor, ha bármely, a nomogrammon ábrázolt  $z_1 z_2$  értékpárhoz tartozó  $z_3$  érték szerepel a  $z_3$  skálán. Ilyenkor azt fogjuk mondani, hogy a  $z_3$  skála „teljes”. Akkor az eredménysskálának ebben az esetben rögzített hosszát legjobban akkor használjuk ki, ha a skálát lehetőleg az

$$s = \Phi(z_3)$$

egyenletnek megfelelően szerkesztjük. Ez könnyen belátható, hiszen az eredménysskala hossza akkor használható ki jól, ha  $\varphi(z_3) \approx$  állandó. Ebből  $\varphi(z_3)$  és  $\Phi(z_3)$  értelmezését felhasználva következik állításunk. — Tehát (18) és (19) alapján  $H(z_3) = c$  esetben az egyenletet,  $H(z_3) = c' \cdot z_3$  esetben a logaritmikust megközelítő eredménysskálára kell törekednünk, ha az teljes ( $c, c'$  állandók). A fenti alternatíva alapján következik, hogy  $n = 2$  választás mellett „legjobb”  $W$  gyanánt ilyenkor mindig az  $F_1(w) = F_3(w)$  egyenlet (19) által definiált megoldása adódik. Tehát  $H(z_3) = c$  (abszolút hibakorlát) esetén

$$z_3^{(2)} = \frac{z_3^{(1)} + z_3^{(3)}}{2}$$

felvétellel,  $H(z_3) = c' \cdot z_3$  (relatív hibakorlát) esetén  $z_3^{(2)} = \sqrt{z_3^{(1)} z_3^{(3)}}$  felvétellel  $\lambda = +1$  adódik, azaz a  $W$  pont az  $R_2$  ponttal  $R_1$ -et  $R_3$ -tól harmonikusan választja el.



## 6. §. Példák a skálák geometria viszonyainak szabályozására

Az ismertetett szerkesztés a  $\dagger$  projektív transzformációt affin transzformációtól eltekintve egyértelműen meghatározza azáltal, hogy rögzíti az  $r$  egyenes képének végtelen távoli pontjához rendelt  $r$  egyenesbeli  $W$  pontot.

Ebben a paragrafusban egyszerű speciális esetekben meghatározzuk a rögzített  $W$  pont esetén nyerhető „optimális” nomogramváltozatot.

Legyenek  $T_1$  és  $T_2$  a  $\Sigma$ -síknak a  $\Sigma'$ , illetve a  $\Sigma''$  síkra való olyan projektív transzformációi, melyek a  $W$  pontot a  $\Sigma'$ , illetve  $\Sigma''$  sík egy végtelen távoli pontjába viszik át. Jelöljük a  $T_1$  által létesített képeket egy, a  $T_2$  által létesítetteket két vesszővel. Az  $r$  egyenes  $r'$  és  $r''$  képeivel parallel  $\Sigma'$ , illetőleg  $\Sigma''$  síkbeli egyenessereg egymásnak felel meg. (Természetesen, ha a  $\Sigma'$ , illetőleg  $\Sigma''$  sík végtelen távoli egyeneseit is a sereghez számítjuk.) Ennélfogva a  $T^* = T_2^{-1} T_1$  transzformáció az  $r'$ -vel parallel egyeneseket újra parallel egyenesekbe viszi át és rajtuk affin leképezést létesít.

Ebből pl. következik, hogy egymást egy pontban metsző egyenes skálatartók esetén egyedül az előző § előírásai szerint megszerkesztett  $W$  pont ismeretében eldönthető, hogy célszerű-e parallel skálájú nomogrammot szerkeszteni. (Célszerű, amennyiben a  $W$  által definiált projektív transzformációk „közel” párhuzamos skálájú nomogramot eredményeznek, vagyis ha a  $W$  pont „közel” van a skálatartók  $W_0$  metszéspontjához. Pontosabban, ha  $|(WIJW_0)| \ll 1$ . Ebben az esetben olyan  $\dagger$  transzformációt alkalmazunk, amely nem a  $W$ , hanem a  $W_0$  pontot transzformálja végtelen távolivá).

Ha az összehasonlítható nomogramok skálasorrendje megegyezik azaz a véges konvex burkok egymásnak felelnek meg, akkor a  $z_3$  skála egyenese a véges konvex burkokból szintén egymásnak megfelelő szakaszokat metsz ki. Ezeknek egymásra való leképezése hasonlósági transzformáció. Ennélfogva a nomogramokban a  $\varphi(z_3)$  mennyiségek egyenlők, és így a legjobb nomogramváltozat meghatározása szempontjából csak a  $\sigma$  mennyiség irányadó.

### A. Parallel egyenes tartójú nomogramok

Tegyük fel, hogy valamely  $T_1$  projektív transzformációval nyert  $\mathcal{N}_1$  nomogram tartói párhuzamosak. Vizsgáljuk meg, hogy ha adva van a nomogram számára rendelkezésre álló területrész — melyet egyszerűség kedvéért egységoldalú négyzetnek választunk — az összes lehetséges leképezésekkel elérhető változatok közül melyik a gyakorlatilag legjobb. A nomogram két szélső tartója a négyzet két átellenes oldalára esik és a legnagyobb tartó hossza egységnyi. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a kiindulásul választott  $T_1$  transzformációval nyert  $\mathcal{N}_1$  változat mindkét szélső tartója egységnyi. A középső tartó pontjai nem eshetnek a két 'szélső' tartó által meghatározott véges négyszögtartomány külsejébe. Ha ugyanis a középső tartónak volna ilyen kieső pontja, az nem lehetne kollineáris  $z_1 z_2 z_3$  ponthármastagja.

Előrebocsátjuk, hogy ha a két szélső tartó által meghatározott trapéz mindig egyenlőszárú akkor a különböző nomogramváltozatok összehasonlításánál az  $\alpha$  szög figyelembevételétől eltekintünk, minthogy annak a nomogram pontosságára gyakorolt befolyása a szokásos elrendezésnél kicsi.



Csak olyan  $T^*$  transzformációk jöhetnek szóba, melyek a nomogramot befoglaló négyzet belsejét egy olyan trapéz belsejére képezik le, mely a négyzetnek valódi résztartománya. Ennélfogva a nomogram két skálatartója biztosan rövidül, a harmadik változatlan, egységnyi hosszúságú marad. Ebből következik, hogy ha az *eredményiskála középen* van, a nyert nomogramban  $h < 1$ . Azonban ennél az elrendezésnél  $\sigma$  értéke csak  $\alpha$  és  $h$  függvénye ( $v$  állandónak tekinthető),  $\alpha$  hatásától eltekintünk, tehát a *legjobb*nak tekinthető változatban a két szélső tartó hossza egyenlő.

Ha az *eredményiskála a szélen van*, és  $T^*$  az eredményiskála hosszát hagyja változatlanul, ezáltal a  $z_1$  és  $z_2$  skála tartói közelednek. Ebben az esetben tehát  $h = 1$ , de  $v$  értéke növekszik a transzformáció során, azaz  $\sigma$  értéke is növekszik. Ha a másik szélső skála, pl.  $z_1$  marad változatlan, már nem következtethetünk ilyen egyszerű módon. Ekkor ugyanis  $T^*$  a  $h$  hossz csökkenésével együtt  $v$  értékét is csökkenti, minthogy ekkor a  $z_1$  és  $z_2$  skálák távolodnak egymástól. Így a (16) képletben szereplő  $v/h$  értékére nem mondhatunk konkrét számolás nélkül biztosat. Legyenek a skálák összetartozó végpontjai valamely derékszögű koordináta-rendszerben a transzformáció elvégzése előtt és után

	$T^*$ előtt	$T^*$ után
$z_1$	(0, 0)	(0, 0)
	(0, 1)	(0, 1)
$z_2$	(a, 0)	(a', 0)
	(a, b)	(a', b')
$z_3$	(1, 0)	(1, 0)
	(1, 1)	(1, c')

$$(0 < a < 1, \quad 0 < b \leq 1; \quad 0 < a' < 1, \quad 0 < b' < 1, \quad 0 < c' \leq 1)^3)$$

A (0, 0), (0, 1), (1, 0) fixpontokkal rendelkező  $T^*$  (vagyis a skálatartókat párhuzamosan hagyó) transzformációk analitikusan a következő képletekkel adhatók meg:

$$x' = \frac{(m+1)x}{x+m}, \quad y' = \frac{my}{x+m}.$$

$$\text{Innen } h = c' = \frac{m}{m+1}.$$

A  $z_2$  és  $z_3$  skála távolsága

$$a' = \frac{(m+1)a}{m+a}.$$

<sup>3)</sup> Tekintve, hogy az  $\alpha$  szög befolyásától eltekintünk, a leolvasási hiba csak a skálák hosszától és távolságától függ. Ezért egy-egy végpontjuk az általánosság megszorítása nélkül felvehető az abszcissa-tengelyen.



A  $z_1$  és  $z_2$  skála távolsága

$$1 - a' = \frac{m(1-a)}{m+a}.$$

(13) felhasználásával

$$v = \frac{(1-a') + 1}{a'} v_1 = \frac{2m+a-ma}{(m+1)a} v_1;$$

$$(22) \quad \frac{v}{h} = \left[ 1 + \frac{2m(1-a)+a}{ma} \right] v_1.$$

Mármost egyrészt az  $x'$  koordinátának  $0 \leq x \leq 1$  szakaszon való korlátosságából, másrészt a  $c' < 1$  feltételből egyszerűen adódik, hogy  $m > 0$ . Akkor pedig (22) alapján

$$\frac{v}{h} > v_1, \text{ és a fortiori } \frac{p+v+\delta}{h} > p+v_1+\delta,$$

és így a  $T^*$  transzformációval nyert nomogramra vonatkozó kifejezéseket csillaggal megkülönböztetve  $\alpha = 90^\circ$  esetén

$$\sigma^* > \sigma.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a párhuzamos skálatartójú nomogramok bármely skálasorrend mellett akkor a legpontosabbak, ha a szélső skálák a nomogram számára biztosított négyzet csúcspontjai.

Természetesen az állítás akkor is igaz marad, ha négyzet helyett téglalap alakú területet adunk meg a nomogram számára.

A gyakorlatban előforduló parallel egyenes tartójú nomogramok szinte mindig eleget tesznek ennek az egyszerű feltételnek.

Felvetődik itt az a kérdés, hogy a tárgyalat két elrendezés: „eredmény-skála közepén” azaz a jóelrendezésű nomogram, és „eredmény-skála a szélén” közül melyik melyik praktikusabb. Magától értetődik, hogy amennyiben a  $z_3$  skála teljes, előnyösebb, ha az eredmény-skála közepén van. Ha viszont az eredmény-skála nem teljes, sőt a jó elrendezésű nomogramban nagyon rövidnek adódik, elképzelhető (amint a számítás meg is fogja mutatni), hogy a téglalap alakú nem jó elrendezésű változat jobb eredményt ad a hosszú skálatartó miatt — a sokkal nagyobb  $v$ -érték ellenére is.

Az összehasonlítandó két nomogrammváltozatban most a  $\varphi(z_3)$  értékek sem egyeznek meg, miután a skálasorrend és így a véges konvex burok különböző. Miután  $T^*$  a  $z_3$  skálát arányosan nyújtja, a  $\varphi(z_3)$  értékek fordítva arányosak a  $z_3$  skálák  $g$  hosszával.

Tekintsük az egyik  $T^*$  projektív transzformációt, mely a „négyzet-alakú” jó elrendezésű nomogramot szintén „négyzet-alakú” nem jó elrendezésűvé alakítja. Legyenek a két nomogram skálatartóinak összetartozó végpontjai



	Jó elrendezésű	Nem jó elrendezésű
	nomogram	
$z_1$	(0, 0)	(0, 0)
	(0, 1)	(0, 1)
$z_2$	(1, 0)	(d, f)
	(1, 1)	(d, e)
$z_3$	(a, 0)	(1, 1)
	(a, b)	(1, 0)

$$(0 < a < 1, \quad 0 < b \leq 1, \quad 0 < d < 1, \quad 0 \leq e < f \leq 1).$$

T\* analitikusan meghatározható a  $z_1$  és  $z_3$  skálák adataival:

$$x' = \frac{bx}{(b+1)x - a}, \quad y' = \frac{bx - ay}{(b+1)x - a}.$$

Ebből

$$d = \frac{b}{b+1-a}, \quad e = \frac{b-a}{b+1-a}, \quad f = \frac{b}{b+1-a}.$$

$d, e$  és  $f$  ismeretében kiszámítható  $v/g$  értéke. Ennél a számításnál — miután a  $v_1$  értékéhez való viszonyát amúgy sem ismerjük — a  $p$  parallaxist és a  $\delta$  interpolációs hibát egyelőre elhanyagoljuk.

	$h$	$v/v_1$	$v/g$
A jó elrendezésű nomogramon	$b$	1	$\frac{1}{b} v_1$
A nem jó elrendezésű nomogramon	1	$\frac{2-d}{d} = \frac{b+2-2a}{b}$	$\frac{b+2-2a}{b} v_1$

Következésképpen ez a nem jó elrendezésű nomogram akkor előnyösebb a jó elrendezésűnél, ha

$$\frac{b+2-2a}{b} < \frac{1}{b},$$

azaz

$$b < 2a - 1.$$

Azonban a jó elrendezésű nomogramm  $z_3$  skálájának a szélső skálák által meghatározott négyzet mindkét átlójával van közös pontja. (Ellenkező esetben ugyanis az egyik szélső skálának lenne felesleges szakasza). Ennélfogva, ha most már elhagyjuk azt a megszorítást, hogy a skálák egy-egy végpontja az  $x$ -tengelyre essék és  $a$  jelenti általában a jó elrendezésű



nomogramban  $z_3$  tartójának  $z_1$ , illetve  $z_2$  tartóitól való távolságai közül a nagyobbikat,  $b$  a  $z_3$  skála hosszát, akkor reális nomogramok esetében

$$b \geq 2a - 1$$

mindig teljesül.  $p$  és  $\delta$  elhanyagolása esetén tehát mindig a jó elrendezésű nomogram adódik előnyösebbnek.

Levezetésünkben a  $p$  és  $\delta$  értékeket is figyelembe véve az egyik nem jó elrendezésű nomogram előnyösebbnek adódik a jó elrendezésűnél, ha

$$b < 2ka + 1 - 2k,$$

ahol

$$k = \frac{v_1}{v_1 + p + \delta} < 1.$$

Ebből látható, hogy ha a jó elrendezésű nomogrammban

a) az eredményskála „csak valamivel” nyúlik túl a szélső tartók téglalapjának átlóin, akkor az egyik nem jó elrendezésű nomogram előnyösebb,

b) ha az eredményskála „majdnem” teljes, akkor a jó elrendezésű nomogram előnyösebb.

Azonban pontos határvonalat nem tudunk vonni a jó és nem jó elrendezésű nomogramok között, amíg  $k$  értékére valami feltevéssel nem élünk.

#### B. Közös ponton átmenő egyenes tartójú nomogramok

Az  $\alpha$  szög hatásának figyelembe vételére jó például szolgálnak azok a közös ponton átmenő egyenes tartójú nomogramok, melyek skáláinak közös végpontja van, a  $z_3$  skála a  $z_1$  és  $z_2$  skála közé esik, és rajta csak hasonlósági transzformáció engedhető meg. A skálák végpontjait a nomogram számára rendelkezésre álló területrészt szabja meg:

$$z_1 \text{ skála } \dots A(-a, 0), C(\xi, m);$$

$$z_2 \text{ skála } \dots C(+a, 0), C(\xi, m);$$

$$z_3 \text{ skála } \dots D(\eta, 0), C(\xi, m),$$

vagy a  $\overline{CD}$  szakasz egy  $\overline{CD}_1$  része.  $a, m$  állandó,  $\xi, \eta$  változtatható értékek és

$$-a < \eta < +a,$$

$$-a < \xi < +a.$$

Meghatározzuk azt a nomogramváltozatot, melyre egy rögzített  $z_3$  értékhez tartozó maximális  $\sigma$  érték a legkisebb. Minthogy az eredményskála közepén van,  $v = v_1 =$  állandó. Ennélfogva a  $\sigma$  érték az  $\alpha$  szögtől és a  $h$  hosszúságtól függ.

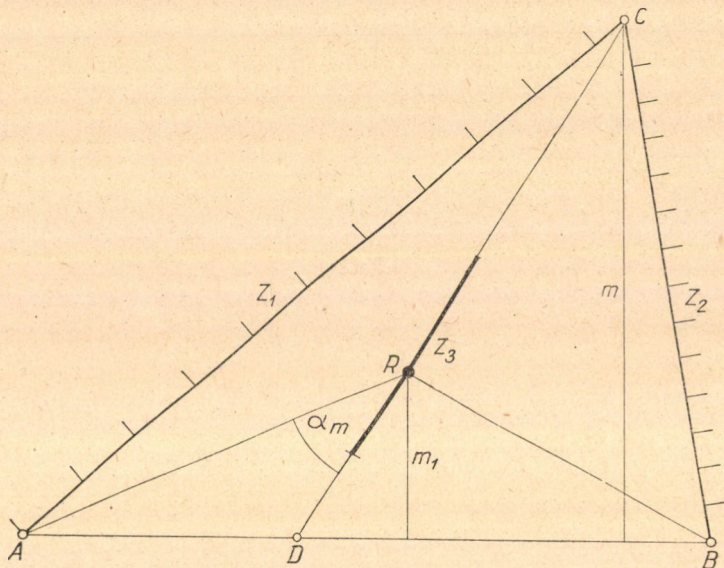
Határozzuk meg először  $\frac{1}{h \sin \alpha}$  fenti maximum-minimum értékét.



1. Ha  $A, B, C, D$  rögzített, a  $CD$  egyenesen fekvő tetszőleges  $R$  ponthoz tartozó legnagyobb  $\sigma$  értéket akkor kapjuk, amikor  $\alpha$  a legkisebb, azaz

$$\alpha_m = \min [ARD \angle, BRD \angle]$$

(16. ábra). Legyen először  $\overline{CD}$  iránya rögzített. Akkor, miközben  $C$  végigfut az  $y = m$  egyenesen,  $R$  egy  $y = m_1$  egyenesen mozog ( $m_1 = \text{konst.}$ ).  $\alpha_m$  legnagyobb értékét  $ARD \angle = BRD \angle$  mellett éri el. Minthogy közben  $h = \overline{CD}$  állandó,  $\sigma$  is ebben a helyzetben maximális.



16. ábra

2. Változzék most  $\overline{CD}$  iránya és  $C$  helyzete egyidejűleg, de oly módon, hogy közben mindig  $\overline{RD}$  legyen az  $ARB \angle$  szögfelezője. Akkor

$$h = \frac{m}{\sin CDB \angle}.$$

Az  $ARD \triangle$ -ből

$$\frac{\sin ARD \angle}{\sin CDB \angle} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AR}}.$$

A háromszög szögfelezőire vonatkozó ismert elemi geometriai tétel szerint

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BR}},$$

vagy

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AR} + \overline{BR}}.$$



Innen

$$\sin \alpha_m = \sin ARD \sphericalangle = \sin CDB \sphericalangle \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AR} + \overline{BR}}.$$

Végül  $h$  és  $\sin \alpha_m$  kiszámított értékének felhasználásával

$$\frac{1}{h \sin \alpha_m} = \frac{\overline{AR} + \overline{BR}}{2am}.$$

Ennélfogva  $\frac{1}{h \sin \alpha_m}$  minimális értékét akkor éri el, amikor a fix  $m_1$  magasságú  $ARB \triangle$ -re nézve  $\overline{AR} + \overline{BR}$  a legkisebb. Ez pedig akkor következik be, amikor  $\overline{AR} = \overline{BR}$  vagyis amikor  $C(0, m)$  és  $D(0, 0)$ , és így az ábra szimmetrikus a  $z_3$  tartóra. Ugyanekkor azonban

$$\frac{\cotg \alpha_m}{h} = \frac{1}{h \sin \alpha_m} \cdot \cos \alpha_m$$

is minimális, hiszen a  $\overline{CD}$  egyenesnek a szimmetriatengelyből való bármely elmozdításánál  $\alpha_m$  csak csökkenhet és így  $\cos \alpha_m$  csak nőhet. Ha a  $\delta$  interpolációs hiba kismértékű csökkenését figyelmen kívül hagyjuk, akkor kimondhatjuk, hogy a  $z_3$  skála bármely pontjában a fellépő maximális leolvasási hiba akkor lesz a legkisebb, amikor a  $z_3$  skála az ábra szimmetriatengelyébe esik.

## 7. §. Nomogramtervezési eljárás általános nomogramokra

Az alábbiakban megmutatjuk, hogyan építhető fel az eddig ismertetett fogalmakból és módszerekből egy olyan nomogramtervezési eljárás, amely egyesíti magában a szerkesztés gyorsaságának és áttekinthetőségének előnyét a numerikus számolás által elérhető pontossággal. Elérendő célként lebeg szemünk előtt, hogy lehetőleg mechanikus szabályok alkalmazásával, automatikusan kiadódjék az adott függvénykapcsolat esetén legcélszerűbb nomogram-elrendezés. (Ha egy képlet többféle típusú nomogrammal ábrázolható, ezek közt természetesen nem tud az eljárás válogatni.)

Az alábbiakban ismét csak azokkal az esetekkel foglalkozunk, amelyekben

1. az egyes skálatartományok összefüggőek,
2. a nomogramnak van egy kitüntetett  $z_3$  „eredmény”-skálája, (az ehhez tartozó skálatartományt továbbra is  $\mathcal{Q}_3$ -mal jelöljük) és
3. a nomogramnak van konvex burka.

Ezek a feltételek a gyakorlati eseteknek nagy részében teljesülnek.

A javasolt módszer lépései a következők:

A) Felvázoljuk a nomogram triviális változatát ( $\mathcal{N}$ , amely a  $\Sigma$  síkban van elhelyezve). Kiválasztjuk a nomogramnak azt a konvex burkát, melyet a végleges nomogram korlátos konvex burkába szándékozunk transzformálni.

B) Szerkesztéssel meghatározzuk azt a  $T$  projektív transzformációt, mely  $\mathcal{N}$ -et a gyakorlat által előírt pontossági, továbbá a nomogram kívánatos



alakjára, terjedelmére vonatkozó, és esetleg egyéb feltételeket lehetőleg jól kielégítő  $\mathcal{H}'$  nomogramra képezi le.<sup>5)</sup>

C) Ha  $\mathcal{H}'$  még javításra szorul, módosítjuk a szerkesztésre vonatkozó feltételeket, és a B) pontbeli eljárást ismét a nomogram triviális változatából kiindulva megismételjük. Esetleg a nomogramnak egy másik konvex burkából indulunk ki.

D) Ha már nem kívánjuk a nomogram alakjának további módosítását, akkor az 1. §-ban ismertetett módon a  $\Sigma$  és  $\Sigma'$  síkbeli koordinátarendszerek felvétele után a szerkesztés alapján megállapíthatók a T transzformáció analitikus geometriai formulái és a kellő pontossággal meghatározhatók a nomogram pontjainak koordinátái.

Az eljárás gerincét képezi a tervezés B) alatt vázolt szakasza, vagyis, hogy az  $\mathcal{H}'$  nomogram használhatóságára vonatkozó, a 4. §-ban megfogalmazott követelményekből kiindulva a transzformációt egyértelműen meghatározó geometriai feltételeket állapítunk meg, ezek alapján szerkesztéssel meghatározzuk a T-t definiáló adatokat és elvégezzük a leképezést. Természetesen a 4. §. követelményei nem minden függvénykapcsolat esetén elégíthetők ki egyenlő mértékben és egyforma módszerrel, azért nem is lehet a szerkesztés számára univerzális érvényű törvényeket felállítani, legfeljebb az egyes esetekre individuálisan alkalmazható irányvonalakat tudunk megszabni.

Az alábbiakban T egyértelmű meghatározására a gyakorlatban előforduló nomogramok egy nagy csoportjának tervezésénél alkalmazható geometriai feltételeket szabunk és megmutatjuk a feltételek szerkesztéssel való kielégítésének módját.

**1. A  $z_3$ -skála sűrűségére vonatkozó feltétel.** Az 5. §-ban megtárgyaltuk a  $z_3$  tartó  $W$  pontjának szerkesztését, amennyiben a  $z_3$  tartó egyenes. Ellenkező esetben válasszunk ki az 5. §-ban tárgyalt elvek szerint a  $z_3$  skálán  $n + 1$  (általában 3) pontot. (Ha a  $z_3$  skálán egyenletes beosztás kívánatos, a  $z_3^{(v)}$  értékek lehetnek számtani sor tagjai, ha logaritmikus beosztás előnyös, képezhetnek mértani sort.)

Ezután a  $z_3$  skála kijelölt pontjait egy közös  $t$  egyenesben fekvő  $T_v$  ( $v = 1, \dots, n + 1$ ) pontokkal közelítjük, majd a  $\Phi(z_3^{(v)})$  értéket rendelve a  $T_v$  ponthoz, elvégezzük az 5. §-ban javasolt szerkesztést a  $W$  pont meghatározására.

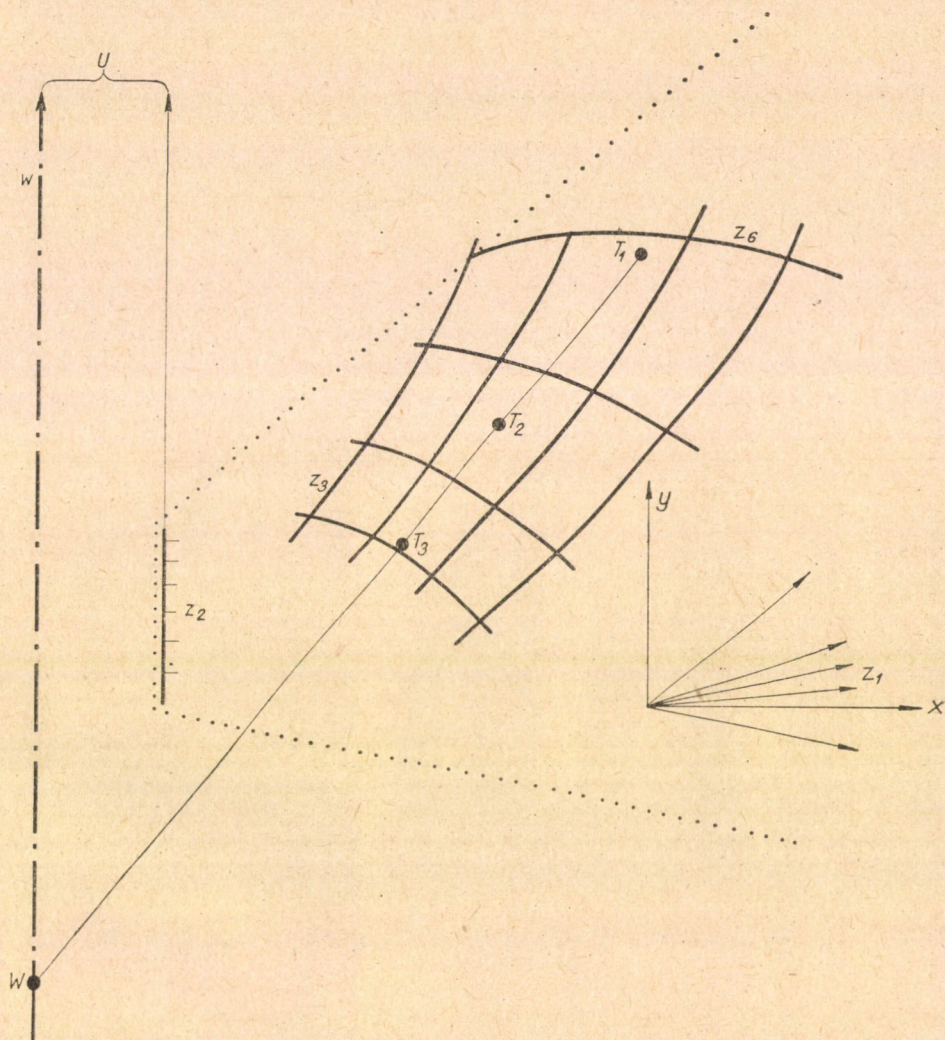
A  $W$  pont ilyen meghatározása természetesen nagyfokú bizonytalanságot és önkényességet rejt magában, és amellet a  $z_3$  skála erős görbültsége igen bizonytalanná teheti az eljárást. A nomogramtervező érzékére, tapasztalatára kell bízunk a felvett  $n + 1$  pont számát, elrendezését, továbbá görbe skála esetén a  $z_3$  skálának egyenessel való közelítését. Még egyenes skála esetén is kétes, hogy a (14) szerinti  $F(z_1, z_3)$  függvényre vonatkozó szélsőértékfeladat megoldásához milyen közel van az általunk javasolt közelítő megoldás.

Az egyenessel való közelítés jósága pl. csak a transzformált, kész nomogramon ellenőrizhető. Mindenesetre a tájékozódást megkönnyíti, hogy  $W$  ismeretében már látható, hogy a  $z_3$  skála mely részei kb. milyen mértékben hosszabbodnak vagy rövidülnek. Ez a skála kis környezetének hosszabbodá-

<sup>5)</sup> Tetszőleges halmaz T által létesített képét a halmaz jele mellé írt vesszővel jelöljük.



sára vagy rövidülésére is ad némi támpontot. Ezenkívül  $W$  körülbelüli ismerete és a választott  $Q$  konvex burok ad némi tájékoztatást a  $\Sigma'$  sík végtelen távoli egyenesének  $\Sigma$  síkbeli  $w$  megfelelőjéről.  $w$  becslésszerű ismerete alapján többnyire megbecsülhető a végleges nomogram alakja.  $\mathcal{N}$ -ben távoli  $z_1$



17. ábra

és  $z_2$  skálarészekhez tartozó  $z_3$  skálapontokat nem szükséges olyan pontosan közelíteni, mint ha a megfelelő  $z_1$  és  $z_2$  skálarészek közel esnek. (Az éles metszések veszélye miatt). Ezáltal a közelítés pontosságát (érék szerint) súlyozni tudjuk.

Még nehezebb feladat a  $t$  egyenes jó kijelölése, ha  $\mathcal{Q}_3$  pontmező.



**2. Kiegészítő szempontok.** Ha  $w'$  a  $\Sigma'$  sík végtelen távoli egyenese, akkor  $w$  illeszkedik a  $W$  pontra. A  $w$  egyenes egy második,  $W^*$  pontjának választása — sajnos — még  $w$  választásánál is bizonytalanabb alapokon nyugszik.  $W^*$  megválasztására a következő szempontok adhatók:

a) Ha a nomogramnak  $z_1$  és  $z_2$  skálái egyenes tartójú pontsorok (Cauchy-féle nomogram), legyen  $\mathcal{N}$ -beli tartójuk metszéspontja  $U$ . Ha a  $WU$  egyenes nem metszi  $Q$ -t,  $w = WU$  választással párhuzamos skálatartójú nomogramot szerkeszthetünk. (17. ábra.)

Hasonló a helyzet, ha a nomogramnak egy skálapárja olyan pontmezőt alkot, melynek egyik görbeserege sugársor. Legyen ennek tartója  $V$ . Ha a  $VW$  egyenesnek nincs közös pontja  $Q$ -vel,  $w = VW$  választással a sugársor képe párhuzamos egyenesekből fog állni.

b) A

$$z_1 = \frac{f_{25} - f_{36}}{g_{25} - g_{36}},$$

alakú ötödrendű függvénykapcsolat esetén a nomogram triviális változatának  $z_1$  skálája a végtelen távoli egyenesen van és  $y/x = z_1$  egyenlettel van meghatározva [2. § (4.c)].

A nomogram megrajzolása, vagy kapcsolása szempontjából kívánatos lehet egyenletes  $z_1$ -skála elérése. A  $T$  transzformáció  $\mathcal{N}$  végtelen távoli  $z_1$  skáláját akkor viszi át egyenletes skálába, ha  $w$  párhuzamos az  $y$  tengellyel. Amen nyibena már megszerkesztett vagy felvett  $W$  ponton átmenő,  $y$ -tengellyel párhuzamos egyenes nem metszi  $Q$ -t, egyenletes  $z_1$  skála elérhető (18. ábra).

Az a) és b) esetekben a projektív transzformáció analitikus formulái egyszerű geometriai számítással a szerkesztés tényleges elvégzése nélkül is meghatározhatók.

Ha az előbbi speciális alakú nomogramok egyike sem szerkeszthető meg, a c) vagy d) pontban ismertetett módon járhatunk el.

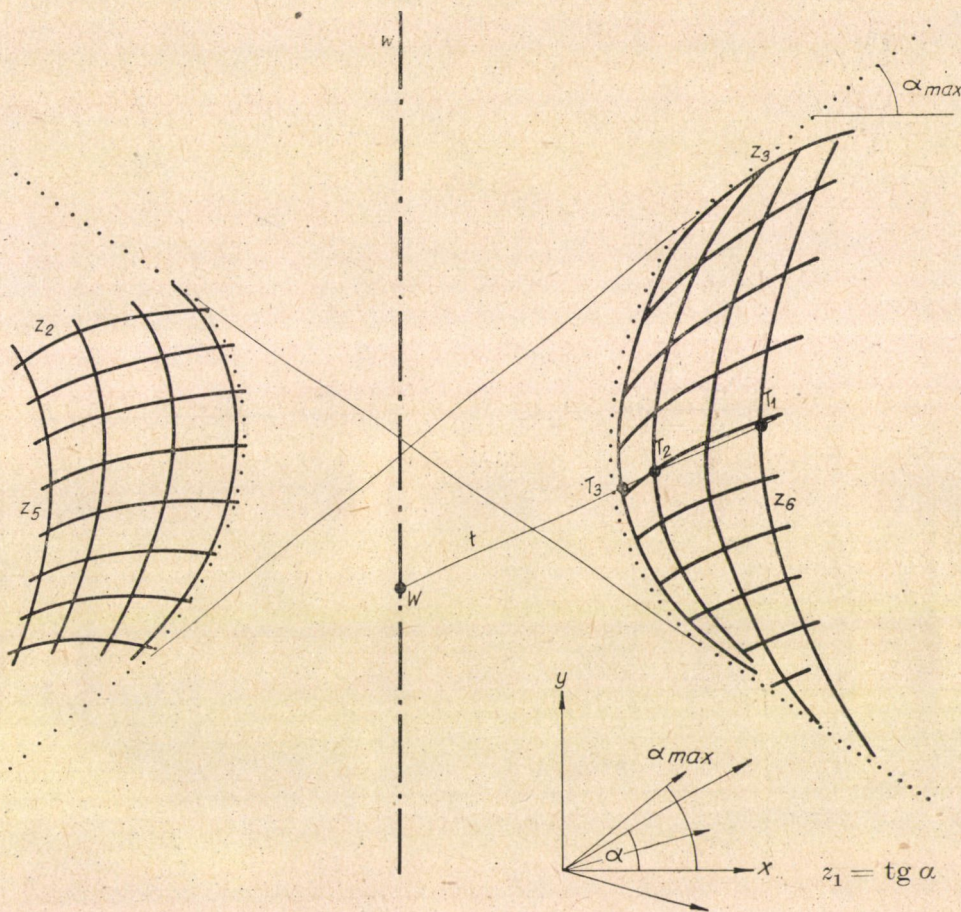
c) Tegyük fel, hogy  $Q$  oly módon burkolható egy  $a, b, c, d$  négyoldallal, hogy annak  $a$  oldala a  $\mathcal{Q}_1$ ,  $b$  oldala a  $\mathcal{Q}_2$  skálatartományhoz jól simul.  $a$  és  $b$  legyenek a  $Q$  által meghatározott négyszögtartomány szemközti oldalai. Legyen  $a$  és  $b$  metszéspontja  $F$ ,  $c$  és  $d$  metszéspontja  $E$  (lásd a 2. ábrát), legyen  $\overline{EF}$   $Q$ -nek külső egyenese. Ha az 5. §. előírása alapján megszerkesztett  $W$  „közel” van  $\overline{EF}$ -hez, választható  $w = EF$ . Ezáltal speciális esetként kapjuk a SOREAU-féle nomogramszerkesztési eljárást, de azzal a többlettel, hogy egyben áttekinthető képet kapunk ennek a  $z_3$  skála viszonylagos sűrűségére vonatkozó feltétellel való kompatibilitásáról. Ha ez nem áll ugyan fenn, de becslésünk szerint a kész nomogram  $\mathcal{Q}_1$  és  $\mathcal{Q}_2$  skálatartományai nem kerülnek túlságosan közel egymáshoz, a parallelskálás nomogramoknál kapott eredmények jobb híján alkalmazhatók, azaz úgy transzformálhatjuk a nomogramot, hogy  $c' \parallel d'$  legyen. Ekkor  $w = \overline{WF}$ .

Általánosabban: Tegyük fel, hogy a  $\mathcal{Q}_1$  és  $\mathcal{Q}_2$  skálatartományok  $Q_1$  és  $Q_2$  konvex burkai egymást nem tartalmazzák. A szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy ekkor legalább két közös támaszegyenesük van. Válasszuk ezek közül azt az  $\bar{m} \bar{n}$  párt, amely a  $Q$  konvex buroknak is támaszegyenesese. (A szem-



lélet alapján nyilvánvaló, hogy ilyen pár mindig pontosan egy van.) A  $c$  és  $d$  egyenesek szerepét most  $\bar{m}$  és  $\bar{n}$  tölti be, azaz, ha  $\bar{m}$  és  $\bar{n}$  metszéspontja  $E$ , akkor a  $T$  transzformációt ismét  $W = \overline{WE}$  feltétellel szerkesztjük.

Az eljárás előnye, hogy nem jó elrendezésű nomogram is tervezhető vele. Ekkor azonban  $\bar{m}$  és  $\bar{n}$  a  $\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$  halmaz  $Q_{12}$  és a  $\mathcal{Q}_3$  halmaz  $Q_3$

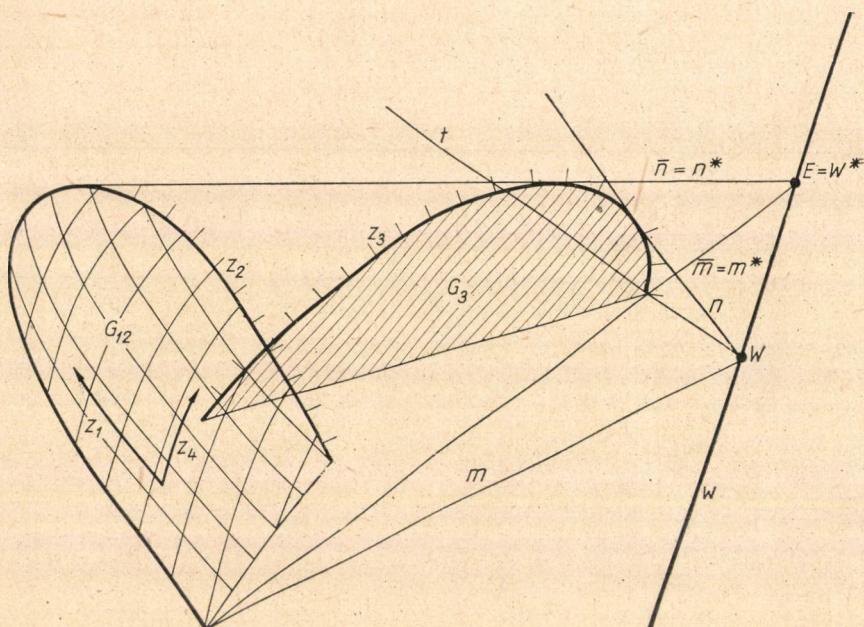


18. ábra

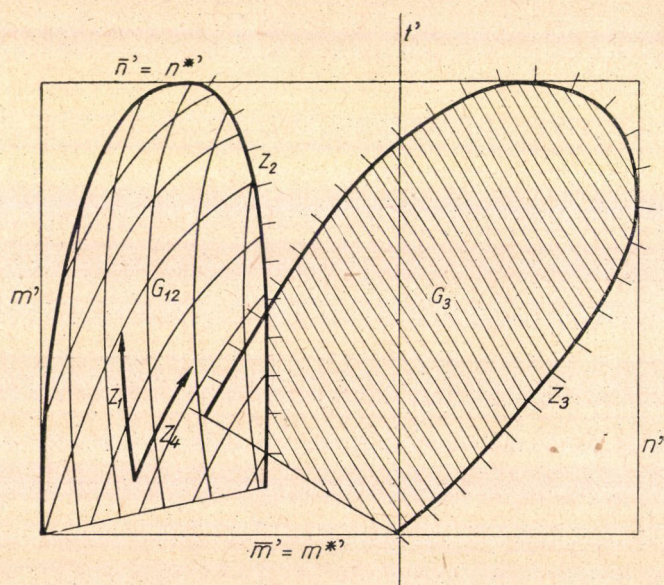
konvex burkának közös támaszegyenesei. (19.a, 19.b ábrák). Hátránya lehet, hogyha a nyert nomogramon pl.  $\bar{m}$ -nak rövid a  $Q$ -vel közös szakasza, a megfogalmazott feltétel semmitmondóvá, céltalanná válik.

d) Centrális  $\mathcal{Q}_3$ . Jó elrendezésű  $Q$  konvex burok esetén egyéb szempont híján elég arra törekednünk, hogy a skálák végleges nagyságában és elhelyezkedésében feltűnő aránytalanságok ne legyenek; a  $w$  egyenes felvételénél megmaradt egy szabadsági fokot erre használjuk fel. Ez különösen akkor ésszerű a 6. §. utolsó példája kapcsán mondottakkal összhangban (egy pon-





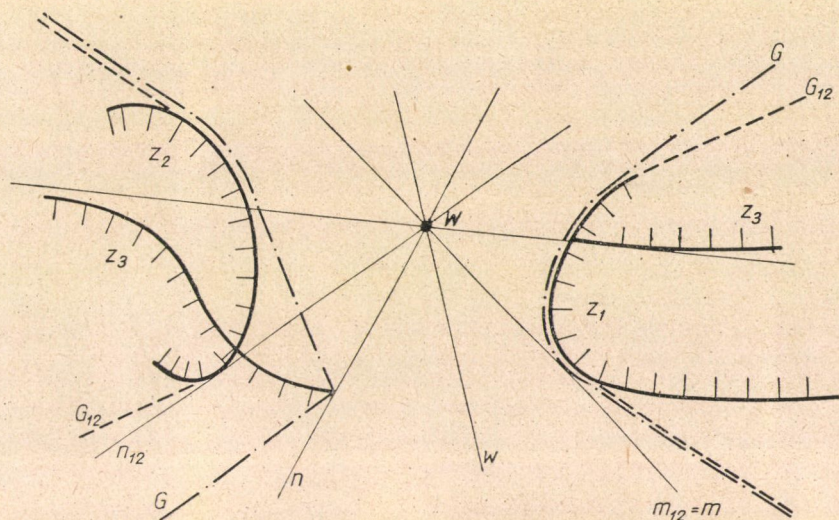
19.a ábra



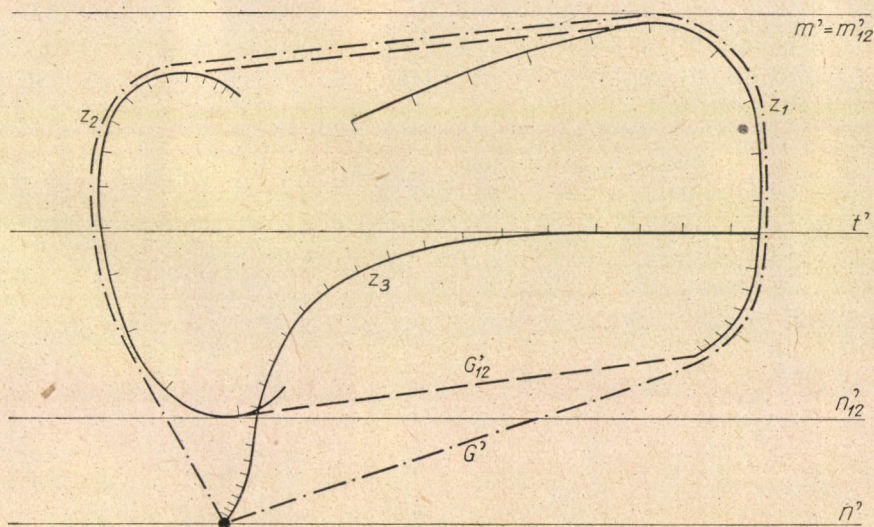
19.b ábra



ton átmenő egyenes skálás nomogramok), ha a  $\mathcal{Q}_1$  és  $\mathcal{Q}_2$  skálatartományok egy helyen nagyon közel kerülnek egymáshoz a végleges nomogramon.



20.a ábra



20.b ábra

Legyen a  $\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$  halmaznak  $w$ -hez tartozó konvex burka  $Q_{12}$  és  $Q_{12}$ -nek a  $W$  ponton keresztülmenő két támaszegyenes  $m_{12}$  és  $n_{12}$  (20.a és 20.b ábra). A  $T$  leképezésnél  $t$ ,  $m_{12}$  és  $n_{12}$  párhuzamos egyenesekbe mennek át. Írjuk elő az

$$(23) \quad (m'_{12} n'_{12} t) = \mu$$



osztóviszony értékét úgy, hogy ezáltal a  $\mathcal{Q}_3$  skálatartomány képeinek központi fekvését biztosítsuk a  $\mathcal{Q}_{12}$  konvex burkokhoz képest. (Ehhez általában  $\mu = 1$  választás célszerű.) (23) másképpen

$$(m'_{12} n'_{12} t' w') = -\mu$$

alakban írható, ahol  $w'$  a  $\Sigma'$  sík végtelen távoli egyenese. A  $T^{-1}$  transzformáció alkalmazásával a (23) feltétel

$$(24) \quad (m_{12} n_{12} t w) = -\mu$$

alakra hozható, aminek alapján  $w$  megszerkeszthető. (20a. és 20b. ábra)

A  $\mathcal{Q}_3$  skálatartomány központi fekvését azért is célszerű biztosítani, hogy elkerüljük annak a  $\mathcal{Q}_1$  vagy  $\mathcal{Q}_2$  skálatartományhoz való túlságos hozzá-simulását, ami éles metszéseket eredményezhetne.

3. *A leképezés egyértelmű meghatározása és befejezése.* A  $w$  egyenes ismeretében a  $T$  projektív transzformáció affin transzformációtól eltekintve meg van határozva.

Hogy a leképezést egyértelművé tegyük, választunk még egy  $W^*$  pontot  $w$ -n.

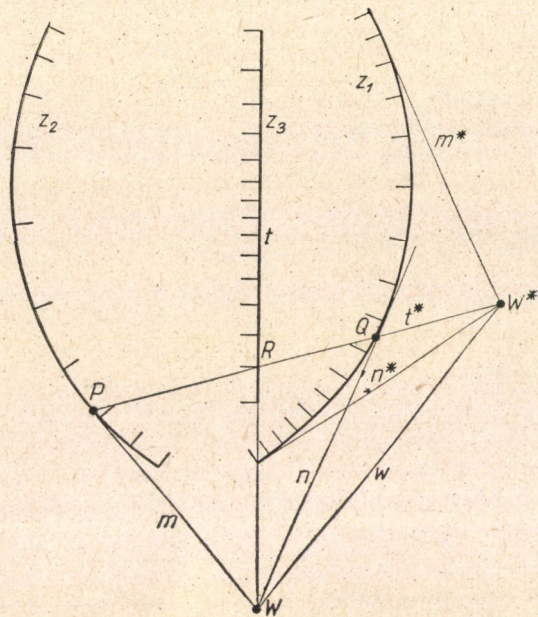
Legyenek  $Q$ -nek  $W$ -n áthaladó támaszegyenesei  $m$  és  $n$ , a  $W^*$ -n áthaladók  $m^*$  és  $n^*$ . Az  $mm^*nn^*$  négyoldal által elhatárolt,  $Q$ -t tartalmazó tartomány projektív transzformáltja olyan paralelogramma, melynek  $m'n'$  és  $m^*n^*$  párhuzamos oldalpárjai. Legyen  $m'm^*n'n^*$  a rajzterjedelem által meghatározott  $a \times b$  méretű téglalap (vagy esetleg általánosabban olyan paralelogramma, melynek  $a, b$  oldalhosszai és  $\gamma$  hegyesszöge adott). Az  $mm^*nn^*$  négyoldalnak az  $m'm^*n'n^*$  paralelogrammára való leképezése a SOREAU-féle módszerrel történhetik. Az  $m'm^*n'n^*$  paralelogramma „burkolja”, a transzformált nomogramot, abban az értelemben, hogy  $Q'$ -t tartalmazza és minden egyes paralelogrammaoldal tartalmazza  $Q'$ -nek, tehát a  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3$  skálatartományok valamelyikének is legalább egy pontját.

Mint már mondtuk,  $T$ -t egybevágósági transzformációkat nem számítva öt számadat határozza meg egyértelműen. Ezek közül kettő ( $\lambda$  és  $\mu$ ) elegendő ahhoz, hogy affin transzformációktól eltekintve meghatározza, a többi három paraméter ( $a, b, \gamma$ ) változtatásával a nomogram már csak affin transzformációt szenved.

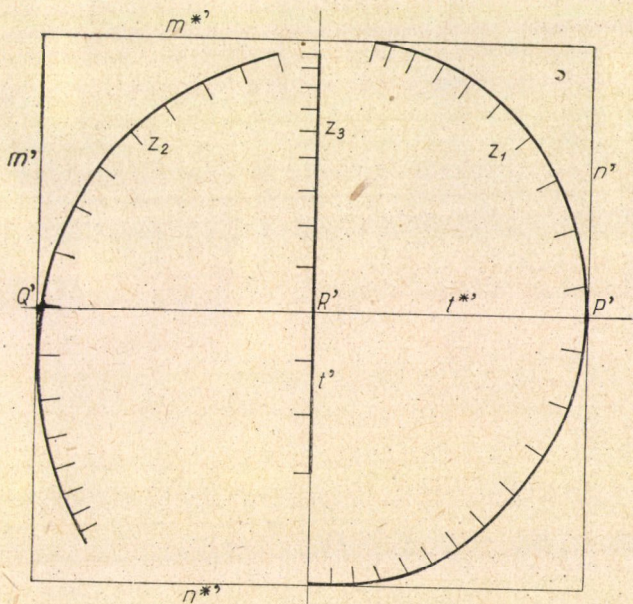
$W^*$  különböző felvételeivel olyan nomogramokat kapunk, melyek egymásba affin transzformációval átvihetők. Ezek közül ki kell választanunk az éles metszések szempontjából optimális változatot.

Az affin transzformáció végrehajtására tulajdonképpen nem nagyon érdemes tanácsot adni, hiszen a cél: a  $\mathcal{Q}_1$  és  $\mathcal{Q}_2$  skálatartományoknak  $\mathcal{Q}_3$  skálatartományra vonatkoztatott szembenállása nem definiálható egyértelműen. Egy megoldás, hogy a  $\mathcal{Q}_1$  és  $\mathcal{Q}_2$  tartományokban egy  $P$  illetőleg  $Q$  pontot választunk, melyekre előírjuk, hogy  $PQ = t^* \perp t$  legyen.  $P$  és  $Q$  lehetnek például a leggyakrabban előforduló vagy átlagos változóértékekhez tartozó pontok (21.a és 21.b ábra). Másik lehetőség  $E$  megválasztására: Legyen  $t^*$  a  $\mathcal{Q}_1$  és  $\mathcal{Q}_2$  (illetve  $\mathcal{Q}_{12}$  és  $\mathcal{Q}_3$ ) burkok feljebb definiált,  $\bar{m}$  és  $\bar{n}$  közös támaszegyeneseinek egyike, ha ennek  $\Sigma'$ -beli képén a  $Q$ -vel határos szakasz elég hosszúra adódik. (Vesd össze: 19.a és 19.b ábra.)





21.a ábra



21.b ábra



Van egy problematikus része a tervezés  $A$ -val jelölt lépésének is: a konvex burok megválasztása, ha a nomogramnak több konvex burka van. Erre a következő szempontok érvényadók:

Ha a  $\mathcal{Q}_3$  tartomány nem adódik túlzottan kicsinyre, vagy éppenséggel teljes, mindenképpen a jó elrendezésű konvex burok választandó.

Ha a  $\mathcal{Q}_3$  tartomány kicsinyre adódnék, nem lehet általános érvényű tanácsot adni. Amennyiben a skálatartományok egy pontra illeszkedő egyenesekkel közelíthetők, a 6. §. első példájában közölt összehasonlítás az 5. §-ban közölt szerkesztés adhat előzetes támpontot a legcélszerűbb konvex burok kiválasztásáról.

Az  $mm*nn*$  négyszögtartomány ismeretében a leképezés a SOREAU által alkalmazott szerkesztéssel befejezhető. Ha a kapott nomogram-alak megfelelő, a szerkesztésből meghatározzuk az alkalmazott projektív transzformációt meghatározó egyenleteket és a transzformációt számítással is elvégezzük. Ellenkező esetben a feltételek módosításával a szerkesztést megismétljük.

\*

A javasolt módszer előnyei és hátrányai a következőkben foglalhatók össze:

Előnye a módszernek, hogy

1. A szerkesztés nem korlátozódik egy speciális nomogram-alakra (pl. párhuzamos skálájú nomogram), hanem kiadódik belőle a legcélszerűbb kivitelű alak.

2. Közvetlen és áttekinthető kapcsolat van a nomogram kivitelére vonatkozó követelmények és a szerkesztés között (ellentétben a tisztán számítással végzett projektív transzformáció módszerével), ami a tervezést rutinmunkává teszi.

3. Ennek következtében a szerkesztés gyakran a legelső lépésnél, de legtöbbször az első lépés után végrehajtott korrekció során megadja a megvalósítható legjobb nomogram-változatot.

4. Egy projektív transzformáció is lényegesen gyorsabban hajtható végre a szerkesztéssel, mint a tisztán számításos módszerrel, mert a triviális nomogram-alakból indul ki és a projektív transzformáció szerkesztése gyorsabban végezhető és áttekinthetőbb, mint a számítás; a transzformációs lépések pedig nem láncszerűen kapcsolódnak, hanem mindig a triviális alakból indulnak ki.

5. Ugyanezek miatt kisebb a hibalehetőség.

6. A szerkesztéssel szemben támasztott pontossági kikötések minimálisak, mert a szerkesztés nem túl nagy hibája egyáltalán nem befolyásolja a számítással előállított nomogram jóságát, hiszen csak a számítással elvégzett projektív transzformáció képleteiben szereplő konstansokban okoz eltérést.

Hátránya a módszernek, hogy

1. Nem minden esetben alkalmazható egyformán előnyösen. Pl. extrém alakú pontmezős, vagy igen erősen görbült eredményskála esetén alkalmazása nehézkes lehet, vagy nem vezet jó eredményre.

2. Egyszerűbb esetekben (párhuzamos skálás nomogramok) kerülő utat jelent.



## 8. §. Kidolgozott példa

Példaként bemutatjuk a

$$\xi^3 - p\xi - q = 0$$

harmadfokú egyenlet nomogramjának tervezési fázisait. Előírt skálaterjedelem:  $0 \leq p \leq 15$ ,  $0 \leq q \leq 50$ ,  $0 \leq \xi \leq 5$ . A hiba nagyságára vonatkozó feltétel: a  $\xi$ -skálán való leolvasásnál előadódó relatív hiba legyen lehetőleg állandó. Ennek megfelelően  $T_1$ -et a  $\xi = 5$ ,  $T_3$ -t a  $\xi = 0,2$ ,  $T_2$ -t a  $\xi = \sqrt{0,2 \cdot 5} = 1$  „közelében” vesszük fel, és a  $\Sigma'$  síkbeli képpontokra a  $(T_1' T_3' T_2') = 1$  feltételt szabjuk.

A nomogram triviális alakja (6) szerint a következő egyenletekkel jellemezhető (homogén koordinátákban):

$$\begin{aligned} p \text{ skála: } & x_1 = 1, \quad x_2 = p, \quad x_3 = 0; \\ q \text{ skála: } & x_1 = 0, \quad x_2 = q, \quad x_3 = 1 \\ \xi \text{ skála: } & x_1 = \xi, \quad x_2 = \xi^3, \quad x_3 = 1. \end{aligned}$$

A nomogram  $Q$  jó elrendezésű konvex burkát képező négyszög-tartomány csúcspontjai homogén koordinátákban (vesd össze: 22.a ábra):

$$\begin{aligned} A(0, 0, 1) & \quad (q = 0 \text{ skálapont}), \\ B(1, 0, 0) & \quad (p = 0 \text{ skálapont}), \\ C(0, 50, 1) & \quad (q = 50 \text{ skálapont}), \\ D(1, 15, 0) & \quad (p = 15 \text{ skálapont}). \end{aligned}$$

A  $t$  egyenes és a  $T_1, T_2, T_3$  pontok megválasztásával igen nagy körültekintéssel kell eljárni, tekintettel arra, hogy a  $\xi$ -tartó erősen eltér az egyenestől. Ezért előzetes becslést végzünk a végleges nomogram alakjára nézve, hogy ezáltal a  $T$  pontoknak a végleges nomogramon a  $\xi$  skálához való közelségét becsülni tudjuk.

A  $T_1, T_2, T_3, W$  pontok koordinátái az  $\Sigma$  síkon legyenek rendre  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_w, y_w)$ . Akkor

$$(y_1 y_3 y_2) \gg 1$$

alapján  $(y_1 y_3 y_2 y_w) \approx -1$  figyelembevételével becslésszerűen

$$y_w \approx -1.$$

Másrészt egyenlőtlenségünk alapján a  $t$  egyenesnek sokkal pontosabban kell közelítenie az  $R_3$  és  $R_2$  pontokat, mint  $R_1$ -et. Ebből következik, hogy

$$0 < x_w \leq 1.$$

Tekintettel arra, hogy  $w$  nem metszheti a konvex burkot, a  $q$ -skála tartójának végtelen távoli pontja egy olyan  $\overline{W}$  pont képe lesz, melyre

$$-1 \leq y_{\overline{w}} \leq 0.$$

Ebből már következik, hogy a  $q = 1$  pont legfeljebb olyan közel lesz a  $q = 0$  ponthoz, mint a  $q = \infty$ ,  $p = \infty$  ponthoz, azaz a  $p$  és  $q$  tartók  $F'$  metszés-



pontjához. A  $q = 50$  és  $q = \infty$  távolsága igen kicsire adódik  $w$  bármilyen választásánál.

Könnyen belátható, hogy a  $q$  skálán a  $C'$  pont közelében fekvő pontok esetén a leolvasásnál fellépő éles metszések csak úgy kerülhetők el, ha a  $D'$  pont szintén igen közel fekszik  $F'$ -hez. Azaz, a nomogram „háromszög-alakú” lesz. Figyelembe véve, hogy az éles metszések miatt az  $F'$  pont közelében nagyobb leolvasási hiba várható, mint egyebütt, ügyelnünk kell a  $\xi$  skála pontjainak a  $t$  egyenes pontjaival való jó megközelítésére: előnyben részesítjük a  $\xi = 5$  és  $\xi = 1$  pontokat, hogy ezáltal a 7. §. utolsó példájában mondottak értelmében  $t$  centrális helyzetének biztosításával ezt a  $\xi$  skála felső szakasza is elérjük. Ezért a következő pontokat választjuk:

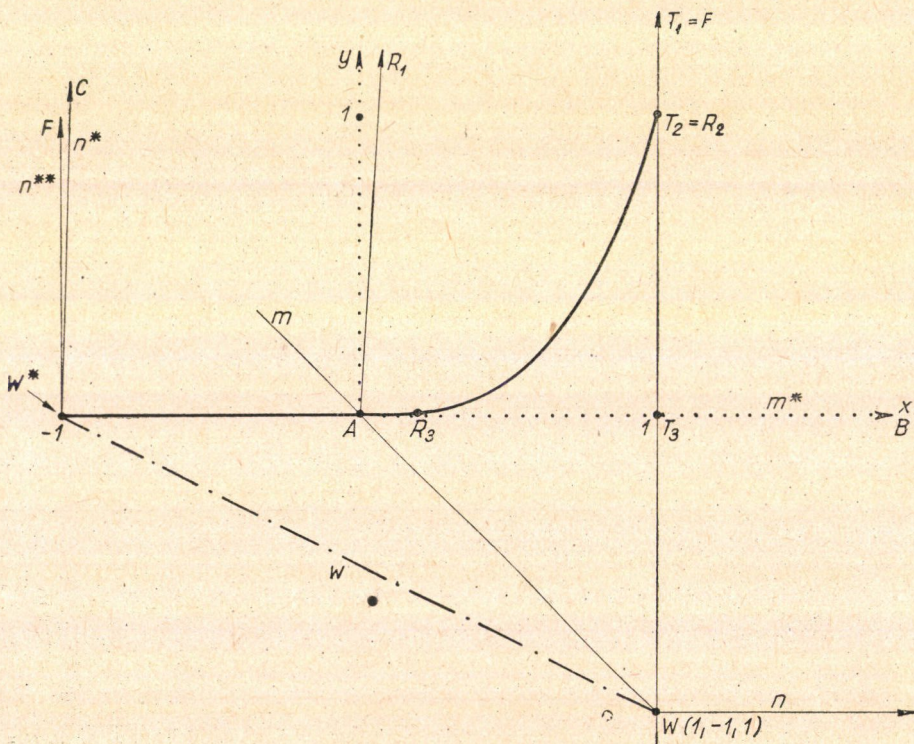
Minthogy a  $\xi = 5$  pont a végleges nomogramon  $F$ -hez nagyon közel esik, a számítás egyszerűsítése érdekében választható az  $F$  pont  $T_1$ , azaz a  $\xi = 5$  helyett. Egyszerűség kedvéért  $T_3$  legyen a rögzített  $t$  egyenes és  $AC$  metszéspontja:

$$T_3(1, 0, 1).$$

$W$  koordinátáit kiszámíthatjuk a

$$(T_1 T_3 T_2 W) = -1$$

feltétel alapján. Ennek alapján a  $W$  pont koordinátái  $(-1, 1, 1)$ . (22.b ábra)

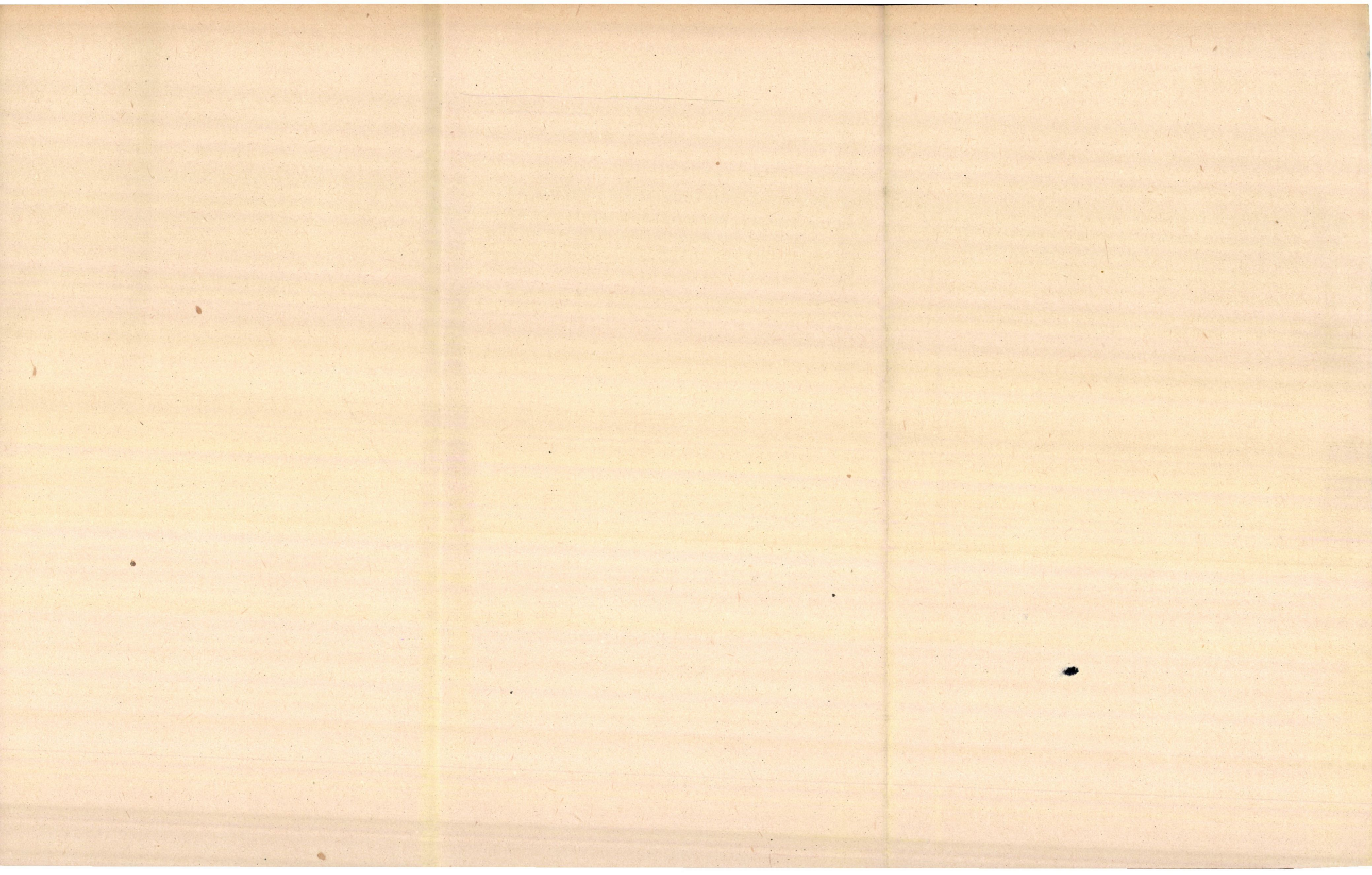


22.b ábra











A  $Q'$  konvex burok  $W$ -hez tartozó  $m$  és  $n$  támaszegyeneseinek iránytangensei  $-1$  és  $0$ ,  $t$  iránytangense végtelen. Legyen

$$\mu = -(mntw) = 1$$

akkor ebből az egyenletből  $w$  iránytangense  $-\frac{1}{2}$ .

Az előző § 3. pontjának megfelelően legyen  $t^* = \overline{AB}$ , a  $p$  és  $q$  skálatartók nagyobb „támaszközü” közös támaszegyenese, mely  $Q = Q_{12}$ -nek is támaszegyenese.  $W^*$  a  $t^*$  és  $w$  egyenesek metszéspontja:  $W^*(-1, 0, 1)$ .

$Q_{12} = Q$ -nek  $W^*$ -hoz tartozó támaszegyenesei:

$$m^* = \overline{AB}, n^* = \overline{CW^*}$$

A számítást egyszerűsíti, ha  $n^*$  helyébe az  $n^{**} = \overline{W^*F}$  egyenest írjuk.  $n^{**}$  nem támaszegyenese  $Q$ -nek, de  $Q$ -n kívül halad és tekintetbe véve  $w$  helyzetét, látható, hogy  $n^{**}$ -nek  $Q'$  határától való legkisebb távolsága kicsi a nomogram méreteihez képest.

A leképezési feladatot tehát a következő feladatra vezettük vissza: Az  $mm^*n^{**}$  egyenesek által határolt, az  $(1, 1, 1)$  pontot belsejében tartalmazó konvex négyszögtartományt téglalapra képezzük le, melynek párhuzamos oldalpárjai:  $m' = \overline{A'B'}$  és  $n'$ , hosszuk  $a$ , továbbá  $m^{*'} = n$ , hosszuk  $b$  (24. ábra).

A  $\Sigma$  síkban felvett derékszögű koordináta-rendszer  $x'$ -tengelye legyen a  $t^*$  egyenes,  $y'$ -tengelye (miután a  $t^{*'}$  és  $t'$  egyeneseket az előző §-ban ismertetett előírás szerint egymásra merőlegesseknek vesszük fel). Akkor az  $A'B'F = T', T_3$  pontok derékszögű koordinátái

$$A' \left( -\frac{a}{2}, 0 \right), B' \left( +\frac{a}{2}, 0 \right), T'_1(0, b), T'_3(0, 0)$$

Továbbá:  $T'_2$  a  $\overline{T'_1T'_3}$  szakasz felezőpontja:  $T'_2 \left( 0, \frac{b}{2} \right)$ .

Az  $N'$  nomogram pontjainak megszerkesztése. Az  $mm^*nn^{**}$  négyszög  $n^{**}$  oldalára esik a  $p$  és  $q$  skálák tartóinak és a  $t$  egyenesnek  $T_1$  metszéspontja.  $T'_1, A'$  és  $B'$  ismeretében a nomogram két egyenes skálájának tartója megrajzolható. Adva van tehát a szerkesztéshez az  $ABT_1$  koordináta-háromszög és a  $T_2$  egységpont képével együtt. Ennek alapján a leképezést egyszerűen végezhetjük el.

A  $p = 1$  skálapont képét az  $\overline{A'T'_1}$  és  $\overline{B'F'}$  egyenesek metszéspontja, a  $q = 1$  skálapont képét a  $\overline{B'T'_2}$  és  $\overline{A'F'}$  egyenesek metszéspontja adja.

Ismeretes ezenkívül a  $p = 0$  skálapont ( $B'$ ), a  $p = \infty$  ( $F'$ ),  $q = 0$  ( $A'$ ),  $q = \infty$  ( $F'$ ) skálapontok.

$\Sigma$ -ban a  $p$  és  $q$  skála egyenletes skálák projektív képei, ennél fogva pontjaik megszerkeszthetők, ha ismeretes három skálapont helyzete. A szerkesztés menete látható a 23. ábrán.

A  $\xi$ -skála bekalibrálásával készíthető el a  $\Sigma'$  síkon. Tetszés szerinti  $\xi = \xi_1$  értékhez tartozó  $X$  pont koordinátái  $\Sigma$ -ban  $(\xi_1, \xi_1^2, 1)$ . Ennél fogva  $\overline{AX}$  a ( $\Sigma$ -ban a végtelen távoli egyenesen elhelyezett)  $p$  skálán a  $p = \xi_1^2$



pontot, viszont  $\overline{BX}$  a  $q$  skálán a  $q = \xi_1^3$  értéket metszi ki. Ebből a  $\Sigma'$ -síkbeli  $\xi$ -skálának az adott  $\xi_1$  értékhez tartozó  $X'$  pontja nyomban adódik.

A projektív transzformáció analitikus geometriai meghatározása. A projektív transzformáció egyenleteinek megállapításához vegyük fel a  $\Sigma'$  síkban az  $(x', y')$  koordináta-rendszert most oly módon, hogy az  $y'$  tengely a  $q$  skálával ( $A'C'$  egyenes), az  $x'$  tengely pedig az  $A'B'$  egyenessel essék egybe. Tehát (22.a ábra) az 1. § szerint az ottani jelölésekkel  $u = \overline{AB}$ ,  $v = \overline{AC}$ ,  $w = \overline{EW}$ ;

$u$  egyenlete

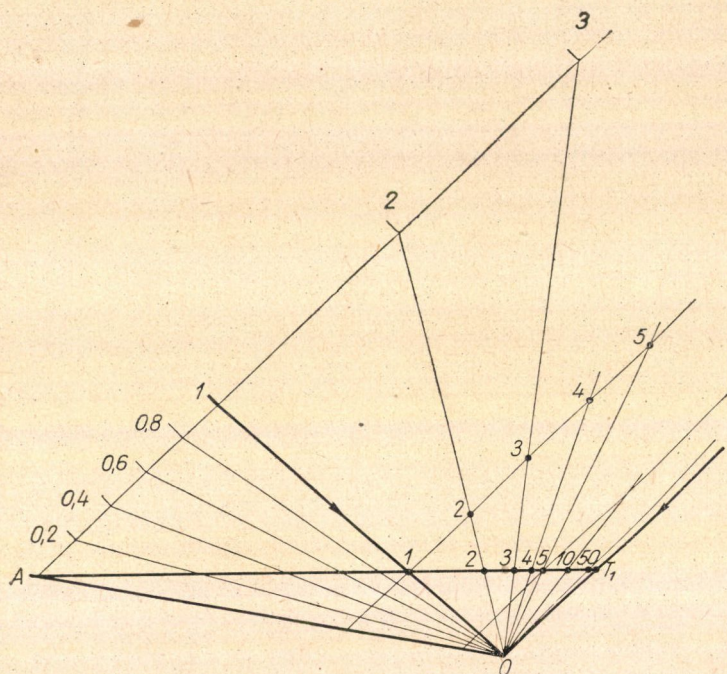
$$U \equiv y = 0,$$

$v$  egyenlete

$$V \equiv x - 1 = 0,$$

$w$  egyenlete

$$W \equiv x + 2y - 1 = 0.$$



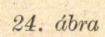
23. ábra

A (2) egyenletek alapján tehát a transzformációs képletek:

$$x' = \alpha \frac{x - 1}{x + 2y + 1} \left( = \alpha \frac{x_1 - x_3}{x_1 + 2x_2 + x_3} \right),$$

$$y' = \beta \frac{y}{x + 2y + 1} \left( = \beta \frac{x_2}{x_1 + 2x_2 + x_3} \right).$$











Helyettesítsük be a

$$B(1, 0, 0) = B'\left(\frac{a}{2}, 0\right),$$

$$T_1(0, 1, 0) = T'_1(0, b)$$

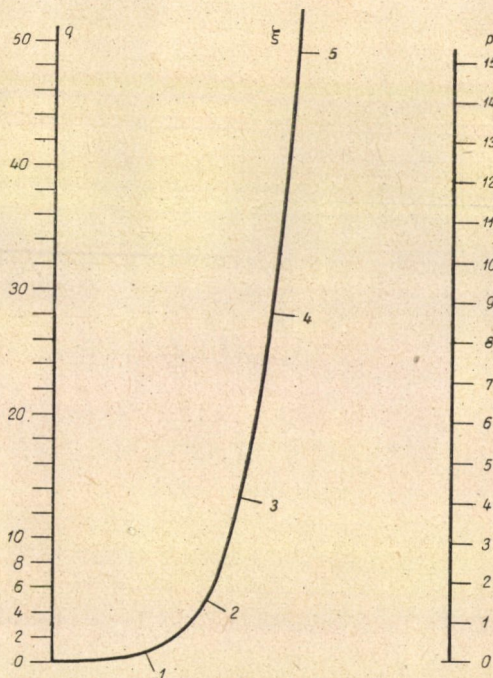
összetartozó pontpárok koordinátáit. Így  $\alpha = a/2$ ,  $\beta = 2b$  adódik. Ezekkel a nomogram skáláira az alábbi képletek adódnak, melyek alapján a nomogram pontjainak koordinátái kiszámíthatók és a nomogram megrajzolható:

$$p \text{ skála: a } \overline{B'T'_1} \text{ egyenesen } y' = b \frac{p}{p + \frac{1}{2}},$$

$$q \text{ skála: a } \overline{A'T'} \text{ egyenesen } y' = b \frac{q}{q + \frac{1}{2}},$$

$$\xi \text{ skála: } x' = \frac{a}{2} \frac{\xi - 1}{2\xi^3 + \xi + 1}, \quad y' = b \frac{2\xi^3}{2\xi^3 + \xi + 1}.$$

A teljesség kedvéért megszerkesztjük a  $\xi^3 - p\xi - q = 0$  egyenlet nomogramjának párhuzamos egyenestartójú kivitelét is (25. ábra).



25. ábra



$$u = \overline{AB}, v = \overline{AC}, w = \overline{EF},$$

$$u \text{ egyenletéből} \quad U \equiv y,$$

$$v \text{ egyenletéből} \quad V \equiv x,$$

$$w \text{ egyenletéből} \quad W \equiv x + \frac{10}{3}.$$

Így a nomogramot befoglaló téglalap méreteinek figyelembevételével a transzformációs képletek

$$x' = a \frac{x}{x + \frac{10}{3}}, \quad y' = \frac{b}{15} \frac{y}{x + \frac{10}{3}}.$$

\*

Köszönetet mondok CZIPSZER JÁNOSnak, aki a 2. § megírásánál volt segítségemre, HAJÓS GYÖRGY akadémikusnak és BÉKÉSSY ANDRÁSnak a kézirat átnézésékor tett számos alapvető kérdést érintő megjegyzéséért, továbbá HORÁNYI ILONÁnak, SAS TIBORNÉnak és MESZLÉNYI MÁRIÁnak, akik a példák kidolgozásával és az ábrák gondos elkészítésével voltak segítségemre.

#### IRODALOM

- [1] R. SOREAU : *Nomographie ou traité des abaques*. Paris, 1921. (II., pp. 115—118.)
- [2] М. В. ПЕНТКОВСКИЙ : *Номография*. Гостехиздат, Москва — Ленинград, 1949. (pp. 24—32.)
- [3] HAJÓS Gy.: „A nomográfia alkalmazhatóságának hatáiról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 1(1951) 268—273.

(Beérkezett : 1956. II. 15. — Átdolgozva : 1956. VI. 6.)

#### FÜGGELÉK

#### A PROJEKTÍV ÉRTELEMBEN ÁLTALÁNOSÍTOTT KONVEX BURKOK SZÁMÁRÓL

CZIPSZER JÁNOS

##### 1. §.

**Segéd-tétel.** Legyen  $\mathcal{H}$  egy zárt halmaz a projektív síkon. Két különböző,  $\mathcal{H}$ -ra nézve külső  $e$  és  $f$  egyeneshez akkor és csak akkor tartozik ugyanaz a konvex burok, ha  $\mathcal{H}$  teljesen az  $e$  és  $f$  egyenesek által meghatározott egyik,  $\Omega_1$  vagy  $\Omega_2$  szögtérben fekszik.



Bizonyítás : Jelöljük  $Q_e$ -vel és  $Q_f$ -fel az  $e$ , illetve az  $f$  egyeneshez tartozó konvex burkot. Ha  $Q_e = Q_f$ , akkor  $Q_e$ -nek sem  $e$ -vel, sem  $f$ -fel nincs közös pontja, s így  $Q_e$  és vele együtt  $\mathcal{K}$  is teljesen  $\Omega_1$ -be vagy  $\Omega_2$ -be esik.

Ha  $\mathcal{K}$   $\Omega_1$ -be esik, akkor —  $e$ -t végtelen távoli egyenesnek tekintve — ez azt jelenti, hogy a korlátos  $\mathcal{K}$  halmaz  $f$  egyik oldalán fekszik, s így az ő közönséges értelemben vett konvex burkának,  $Q_e$ -nek nincs  $f$ -fel közös pontja.  $Q_f$  értelmezése alapján innen következik, hogy  $Q_f \supset Q_e$ .  $e$  és  $f$  felecserélésével adódik, hogy  $Q_e \supset Q_f$ , és így valóban  $Q_e = Q_f$ .

Így a  $\mathcal{K}$  külsejében fekvő egyeneseket osztályokba lehet sorolni úgy, hogy két különböző egyenes csak akkor tartozzék egy osztályba, ha  $\mathcal{K}$  teljesen az általuk meghatározott egyik szögtérben fekszik. Ezen osztályok számossága megegyezik  $\mathcal{K}$  konvex burkainak a számosságával.

## 2. §.

**Tetszőleges halmaz konvex burkainak számosságáról.** Könnyen belátható, hogy az előzőekben említett egyenes-osztályok nyílt halmazok, azaz minden egyenessel együtt annak bizonyos egyenes-környezetét is tartalmazzák. Ámde diszjunkt nyílt (egyenes-) halmaz a projektív síkon csak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok lehet (ugyanis mindegyik tartalmaz legalább egy racionális koordinátájú egyenest), és így egy halmaz konvex burkainak a halmaza is csak legfeljebb megszámlálható.

## 3. §.

**$n$  pontból álló ponthalmaz konvex burkainak száma.**  $n$  pontból álló ponthalmaz konvex burkainak a száma 1. § szerint megegyezik azon egyenes-osztályok számával, melyeket úgy értelmezünk, hogy két különböző egyenes különböző, vagy ugyanazon osztályba tartozik aszerint, amint a ponthalmaz pontjait elválasztják vagy sem. Így a szóban forgó konvex burkok számának meghatározása éppen duális megfelelője annak a problémának, hogy  $n$  egyenes hány tartományra osztja a projektív síkot.<sup>6)</sup> Szemléletessége miatt inkább az utóbbi problémával foglalkozunk.

Jelentse  $v_P$  az adott egyenesek közül a sík  $P$  pontján áthaladóknak a számát. Bármely két egyenes metszéspontját csomópontnak nevezzük.  $N(n)$ -nel jelöljük a tartományok számát. Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy

$$(25) \quad N(n) = \binom{n}{2} + 1 - \sum \binom{v_P - 1}{2},$$

ahol  $P$  befutja az összes csomópontot. Formulánk  $n = 1$ -re nyilvánvalóan érvényes. Tegyük fel, hogy ez a formula  $n = k$ -ra igaz. Ha  $n = k + 1$  egyenesünk van, akkor tehát közülük  $k$ -t kiválasztva, az általuk létesített tartományok  $N(k)$  számára írhatjuk, hogy

$$N(k) = \binom{k}{2} + 1 - \sum \binom{v_P - 1}{2}.$$

<sup>6)</sup> Az euklidesi síkra vonatkozó analóg probléma azon megszorítással, hogy bármely három egyenesnek nincs közös pontja, a megoldással együtt megtalálható H. DÖRRIE *Triumph der Mathematik* c. könyvében (66. feladatt).



Itt és a következőkben  $v_p$  a kiválasztott  $k$  egyenesre vonatkozik. A kimaradt  $(k+1)$ -edik egyenest jelöljük  $e$ -vel. A jobboldali  $\Sigma$  nem változik, ha  $p$  nemcsak a  $k$ , hanem a  $k+1$  egyenes által létesített csomópontokat is befutja, hiszen az újonnan beiktatandó pontokban  $v_p = 1$  és így  $\binom{v_p-1}{2} = 0$ . Csomóponton mostantól a  $k+1$  egyenes által létesített csomópontok értendők.  $\Sigma''$  az  $e$  egyenesen levő,  $\Sigma'$  a többi csomópontokra vonatkozó szummációt,  $N^*(n)$  (1) jobboldalát jelöli. Akkor

$$\begin{aligned} N^*(k+1) &= \binom{k+1}{2} + 1 - \sum' \binom{v_p-1}{2} - \sum'' \binom{v_p}{2} = \\ &= N(k) + k - \Sigma''(v_p - 1) = N(k) + k - \Sigma'' v_p + l, \end{aligned}$$

ahol  $l$  jelenti az  $e$ -n levő csomópontok számát. Minthogy  $e$  a többi  $k$  egyenes mindegyikét egy és csak egy pontban metszi, azért

$$\Sigma'' v_p = k$$

és így

$$N^*(k+1) = N(k) + l$$

$e$  azokat a tartományokat, amelyeken keresztülhalad, kettéosztja és nyilván annyi tartományon halad keresztül, ahány metszéspontja van a  $k$  egyenesből álló konfigurációval, azaz  $l$ . Tehát  $N(k+1) = N(k) + l$  azaz  $N^*(k+1) = N(k+1)$ , s ezzel állításunkat igazoltuk.

Visszatérve az  $n$  pontból álló halmaz konvex burkainak számára, most ezt jelöljük  $N(n)$ -nel;  $v_p$  pedig jelentse a halmaznak a  $p$  egyenesen levő pontjainak számát. Akkor

$$(26) \quad N(n) = \binom{n}{2} + 1 - \sum \binom{v_p-1}{2},$$

ahol  $p$  befutja a halmaz bármely két pontja által meghatározott egyeneseket.

(Beérkezett : 1956. II. 15.)

ГРАФИЧЕСКИЙ-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД  
ПЛАНИРОВАНИЯ НОМОГРАММ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК  
И НОМОГРАММ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК С БИНАРНЫМИ ПОЛЯМИ  
(С ПРИЛОЖЕНИЕМ Я. ЦИПСЭРА)

Ш. ПАЛ

Резюме

Работа ставит перед собой задачу убыстрения планирования номограмм из выравненных точек и номограмм с бинарными полями при возможно максимальном удовлетворении требований точности, требуемых практикой.

Для наиболее часто встречающихся функциональных зависимостей предлагаются за основу типовые варианты номограмм, шкалы которых очень легко могут быть определены из функциональной зависимости и уравнения которых могут быть запомнены. Исходные варианты могут содержать и бесконечно удаленные элементы (тривиальный вариант номограммы, уравнения (6), (8), (10); рис. 4-5).



Для проективного преобразования взятого за основу тривиального варианта номограммы, чтобы облегчить ориентировку, вводится проективное обобщение выпуклой оболочки точечного множества. (См. рис. 6—7.) Порядок шкал номограммы относительно (любой) выпуклой оболочки является проективным инвариантом. Поэтому имея в виду и ограниченность номограммы — в случае выбранного порядка шкал лишь какая-нибудь внешняя прямая выпуклой оболочки, относящейся к этому порядку, может быть преобразована в бесконечно далекую. Для оптимального удовлетворения требований точности предъявляемых к номограмме, соединяются формулы ПЕНТКОВСКОГО [2] и ХАЕША [3], относящиеся к погрешности ответа номограммы. Используя это, определение наиболее подходящего проективного преобразования тривиального варианта номограммы производится в два этапа, соответствующие двум факторам погрешности ответа.

1. Приближая шкалу результатов номограммы прямой, простым способом определяется такие проективные преобразования этой прямой, при которых выражение — зависящее лишь от плотности шкалы и от заданной границы погрешности — приближает собственное наименьшее значение. Таким образом получаем точку опоры для выбора точки, соответствующей бесконечно удаленной точке проективного отображения.

2. Выражение обычно приближенно зависит лишь об геометрических соотношений носителей шкал (резкие разрезы, зависимость шкал, относительное расстояние шкал, относительное расположение шкал и выпуклых оболочек и т. д.). Получается требование что для окончательного номограммы значение (16) было бы минимальным. Для иллюстрации этого определяется оптимальный вариант простой номограммы с тремя прямыми носителями при фиксированной относительной плотности шкалы результатов.

В случае более общих номограмм это в твоем требование может быть переведено на геометрический язык с большим трудом и неопределенностью. Здесь большую помощь оказывает знание относительного расположения шкал и выпуклых оболочек, а также опыт, извлеченный из упомянутых примеров.

С помощью этого состоящего из двух последовательных шагов, метода планирования номограмм, может быть определено проективное преобразование, дающее (определенную отображением какого-нибудь полного четырех-угольника) хорошую номограмму.

Для аналитического определения проективного преобразования может быть использован очень простой, комбинированный графическо-вычислительный метод, опубликованный СОРО. [1] Упомянувшиеся до сих пор графические и вычислительные шаги требовали минимальной точности. Дело в том, что с помощью полученного преобразования, исходя из простых уравнений для шкал исходного (тривиального) варианта номограммы, непосредственно получаем уравнения для шкал окончательного варианта номограммы, точность которого практически не зависит от точности предыдущих шагов.

Для иллюстрации предлагаемого метода планирования номограмм автор строит номограмму неполного уравнения третьей степени в случае двух систем условий.

В дополнении к работе автором которой является Я. ЦИПСЭР, доказано что а) множества всех выпуклых оболочек любого данного множества счетно. б) Число всех выпуклых оболочек множества состоящего из  $n$  точек дается формулой (25) где  $v_p$  равно числу точек множества на прямой  $p$  и  $p$  пробегает все прямые соединяющие две любые точки.

# EINE NUMERISCHE UND GRAPHISCHE METHODE ZUR KONSTRUKTION VON FLUCHTENTAFELN UND BINÄREN LEITERTAFELN (MIT EINEM ANHANG VON. J. CZIPSZER)

S. PÁL

## Zusammenfassung

Die Arbeit setzt sich zum Ziel, die Konstruktion von Fluchtentafeln und binären Leitertafeln ohne Koppelung zu beschleunigen, unter weitgehender Berücksichtigung der Genauigkeitsbedürfnisse der Praxis.

Es werden für die am öftesten vorkommenden funktionalen Zusammenhänge typisierte Nomogrammvarianten als Ausgangspunkt für die Konstruktion vorgeschlagen.



deren Leitern aus dem Zusammenhang leicht bestimmbar sind und deren Gleichungen sich auch leicht merken lassen. Diese Varianten können auch unendlich ferne Elemente enthalten [die „triviale“ Variante, Gl. (6), (8), (10), Figur 4. und 5.].

Zur Erleichterung der Orientierung bezüglich der projektiven Transformation der Ausgangsvariante wird der Begriff der konvexen Hülle einer Punktmenge verallgemeinert (vgl. Fig. 6., 7.). Die Reihenfolge der Nomogrammskalen ist bezüglich dieser Hülle invariant gegenüber projektiven Transformationen. Daher lässt sich eine projektive Transformation angeben, die eine beliebige äussere Gerade dieser Hülle in die unendlich ferne transformiert.).

Zur optimalen Befriedigung der Genauigkeitsansprüche werden die Formeln über die Ablesungsungenauigkeit von PENTKOWSKI [3] und HAJÓS [2] kombiniert. Die beste Projektion der trivialen Nomogrammvariante wird mittels dieser Formeln in zwei Schritten durchgeführt, entsprechend den zwei Faktoren des Fehlers.

1. Zuerst wird die Ergebnisskala des Nomogramms durch eine Gerade approximiert und durch ein einfaches Verfahren diejenigen Transformationen dieser Geraden bestimmt, bei welchen der Ausdruck (15), — der dem Umkehrwert des von Pentkovski Skalencharakteristik genannten Ausdruckes ähnlich aufgebaut ist, und der nur von der Dichtigkeit der Skala abhängt — seinen Minimum gut annähert. Wir erhalten dadurch eine Auskunft über dem unendlich fernen Punkt der Bildgerade entsprechendem Punkt  $W$ .

2. Der Wert des Ausdruckes (16) hängt im Allgemeinen nur von den geometrischen Eigenschaften der Skalenträger (scharfe Schnitte, Zusammenhang der Skalen, Abstand der Skalen von einander u. s. w.) ab. Es ergibt sich die Forderung, dass für den endgültigen Nomogramm der Ausdruck (16) möglichst klein sei. Zur Illustration wird die optimale Variante einer Fluchtentafel mit drei parallelen, sowie sich in einem Punkt treffenden geraden Skalenträgern angegeben, wobei die relative Dichtigkeit der Ergebniss-Skala festgelegt ist.

Im Falle allgemeinerer Nomogramme lässt sich diese zweite Forderung in die Sprache der Geometrie nicht so leicht übersetzen. Hier leistet die Kenntnis über die Anordnung und konvexe Hülle der Skalen eine gute Hilfe. Die bei den obigen Beispielen gemachten Erfahrungen sind auch nützlich.

Bei Konstruktionsverfahren, die aus der sukzessiven Ausführung dieser beiden Schritte besteht, lässt sich die projektive Transformation, die ein gutes Nomogramm liefert, bei diesem Verfahren mit wenigen Versuchen bestimmen. Zur analytischen Bestimmung der Transformation dient ein einfaches rechnerisches und konstruierendes Verfahren, welches von SOREAU [1] publiziert wurde.

Die durchzuführenden Schritte benötigen eine geringe Genauigkeit. Mittels der erhaltenen Transformation lassen sich nämlich aus den Gleichungen der Skalen des Ausgangsnomogramms unmittelbar diejenigen des endgültigen Nomogramms bestimmen; die Genauigkeit der letzten ist praktisch unabhängig von der Genauigkeit der zwischenliegenden Schritte.

Zur Illustration wird die Konstruktion eines Nomogramms zur Bestimmung der Wurzeln der kubischen Gleichung durchgeführt (vgl. Fig. 22—26.).

In dem von JÁNOS CZIPSZER geschriebenen Anhang des Artikels findet Bestätigung, dass a) die Menge der konvexen Hüllen einer beliebigen Punktmenge höchstens abzählbar ist, und b) die Anzahl der konvexen Hüllen von  $n$  Punkten (25) angibt, wo  $v_p$  die Anzahl der auf der Gerade  $p$  liegenden Punkte bedeutet, wenn  $p$  die Menge der durch zwei beliebige Punkte des Punktsystems gelegenen Geraden durchläuft.



## TÁBLÁZAT AZ EXPONENCIÁLIS-INTEGRÁL FÜGGVÉNYRE

BÉKÉSSY ANDRÁS és TÓTH KÁROLY

Az alábbi táblázat az

$$(1) \quad y(x) = x e^{-x} \overline{\text{Ei}}(x) = x e^{-x} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^t}{t} dt + \int_{\varepsilon}^x \frac{e^t}{t} dt \right),$$

függvény értékeit adja meg  $x = 15$  és  $x = 30$  között nyolc tizedes jegyre számítva. Megjegyezzük, hogy kerekítési hibák véletlen halmozódása folytán néhány helyen az utolsó tizedes jegy esetleg egy egységgel hibás.

Az  $\overline{\text{Ei}}(x)$  exponenciális-integrál értékei  $x \leq 15$  értékekre több táblázatban megtalálhatók (lásd pl. [1], [2], [3]),  $x > 15$  argumentumértékek esetében azonban gyakorlatilag az

$$(2) \quad y(x) \sim 1 + \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} + \dots$$

aszimptotikus sorra vagyunk utalva. Az  $x = 15$  és kb.  $x = 30$  közötti intervallumban viszont  $10^{-8}$  nagyságrendű relatív pontossági igény esetében az aszimptotikus sorral számolni még nagyon kényelmetlen, illetve  $x = 15$  körül ilyen pontosságot nem is lehet vele elérni, úgy, hogy nem látszott feleslegesnek az alábbi táblázat elkészítése, mintegy kiegészítésül a [3] táblázathoz, amely hét értékes jegyet ad meg. Az  $\overline{\text{Ei}}(x)$  helyett inkább az  $y(x)$  függvényt tabelláztuk, mert így a tábla terjedelme jelentékenyen kisebb lehetett. Az  $y(x)$  függvényből megfelelő pontosságú  $e^x$  táblázat, pl. [4] segítségével  $\overline{\text{Ei}}(x)$  könnyen számítható.

A táblázat az  $y(x)$  függvény

$$(3) \quad y' = 1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)y$$

differentiálegyenletének közismert módszerekkel való numerikus integrálása útján készült. A numerikus integrálás hibáját úgy tartottuk számon, hogy minden egész és félegész  $x$  értékre az  $y$  függvényt aszimptotikus sor segítségével is kiszámítottuk és interpoláltunk. A kétféle módon számított értékeknek a tartalékjegyek elhagyása után való egyezése alapján fogadtuk el a táblázatot helyesnek. Mivel a (2) sor  $x = 15$  körül még nem alkalmas az  $y(x)$  kellő pontosságú előállítására, szükséges volt, hogy valamilyen módszert alkalmazzunk



a pontosság növelésére. TH. STIELTJES módszerével [6] a következő formulák alapján számoltunk :

$$y(x) = 1 + \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} + \dots + \frac{n!}{x^n} + \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} R_{n+1}(x),$$

$$(4) \quad R_{n+1}(x) = \left(s - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{x} \left(\frac{8}{270} - \frac{s(s-1)^2}{3}\right) + O\left(\frac{1+|s|^5}{x^2}\right),$$

$$s = x - n - 1.$$

Ezek segítségével a (2) formulával elérhető pontosságnál több nagyságrenddel jobbat tudtunk elérni.

A számításokban segítségünkre voltak KEMPELEN MÁRTA, SIMON SÁNDOR és TARNAY GYULA, a Matematikai Kutató Intézet munkatársai, akiknek ez úton is köszönetünket fejezzük ki.

#### IRODALOM

- [1] JAHNKE—EMDE: *Tafeln höherer Funktionen*. Teubner, Leipzig, 1952. (5. Auflag).
- [2] MATHEMATICAL TABLES PROJECT OF THE WORK PROJECTS ADMINISTRATION FOR THE CITY OF NEW-YORK: TABLES OF SINE, COSINE AND EXPONENTIAL INTEGRALS, Vol. I—II, Washington, 1940.
- [3] ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ. Изд. Академии Наук СССР, Москва, 1954.
- [4] ТАБЛИЦЫ  $e^x$  И  $e^{-x}$ . Изд. Академии Наук СССР, Москва, 1955.
- [5] J. R. AIREY: „The »converging factor« in asymptotic series and the calculation of Bessel, Laguerre and other functions.” *Philosophical Magazine (7. Series)* **24** (1937) 521—552.
- [6] TH. STIELTJES: „Recherches sur quelques series semiconvergentes.” *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (Ser. 3.)* **3** (1886) 201—258.

(Beérkezett: 1955. VIII. 31. — Átdolgozva: 1956. I. 26.)

#### ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

А. БЕКЕШШИ и К. ТОТ

#### Резюме

Нижеследующая таблица дает значения функции (1) между  $x = 15$  и  $x = 30$  с точностью до восьми десятичных знаков. Значения интегральной показательной функции  $\bar{E}i(x)$  при  $x \leq 15$  приведены во многих таблицах (см. например [1], [2], [3]), если же  $x > 15$ , то практически мы вынуждены пользоваться асимптотическим рядом (2). Однако, в интервале между  $x = 15$  и приблизительно  $x = 30$  считать с помощью асимптотического ряда с восьмью ценными десятичными знаками ещё очень неудобно, а при  $x = 15$  такой точности даже нельзя достигнуть, так, что не казалось излишним составить нижеследующую таблицу, как в дополнение к таблицам [3], дающих 7 ценных знаков. Вместо функции  $\bar{E}i(x)$  мы табулировали функцию  $y(x) = xe^{-x} \bar{E}i(x)$ , так как таким образом значительно сокращается объём таблицы. Исходя из функции  $y(x)$  с помощью достаточно точной таблицы  $e^x$  (например, (4))  $\bar{E}i(x)$  может быть легко вычислено.

Таблица была составлена с помощью численного интегрирования дифференциального уравнения (3) для функции  $y(x)$ . Погрешность численного интегрирования контро-



лировались тем, что для всех целых и полуцелых  $x$  значения функции  $y(x)$  вычислялись и с помощью асимптотического ряда (2). Так как ряд (2) при  $x = 15$  ещё не годится для достаточно точного вычисления  $y(x)$  было необходимо применить какой-нибудь метод увеличения точности. Такой метод был разработан Т. СТИЛТЬЕСОМ (6) и Э.Р. АЙРЭЙЕМ (5), такой же метод даёт нашей формулой (4). С помощью [4] мы смогли получить на несколько порядков более высокую точность, чем с помощью формулы (2).

TAFEL DER  $\overline{\text{Ei}}(x)$  FUNKTION

A. BÉKÉSSY und K. TÓTH

## Zusammenfassung

Die Tafel gibt die Werte von  $y(x) = xe^{-x}\overline{\text{Ei}}(x)$  (siehe (1)) in dem Intervall  $15 \leq x \leq 30$  mit acht Dezimalstellen an.

Die Werte von  $\overline{\text{Ei}}(x)$  bis  $x = 15$  sind in mehreren Tafeln angegeben, [1], [2], [3], für  $x > 15$  ist aber unserer Wissens keine Tafel vorhanden, deshalb muss man für numerische Zwecke die wohlbekannte asymptotische Formel (2) benutzen. Sind aber die Genauigkeitsansprüche gross, so ist die Reihe (2) unbequem, ja sogar für Werte nahe  $x = 15$  ist eine Genauigkeit von ungefähr  $10^{-8}$  überhaupt nicht zu erreichen. Darum schien es nicht überflüssig die obige Tafel als Ergänzung zur Tafel [3] zu berechnen. Es wurde die Funktion  $xe^{-x}\overline{\text{Ei}}(x)$  statt  $\overline{\text{Ei}}(x)$  tabelliert, weil dadurch der Umfang der Tafel wesentlich kleiner ausfiel,  $y(x)$  ist nämlich in dem tabellierten Gebiet eine sehr langsam veränderliche Funktion. Aus  $y(x)$  kann man  $\overline{\text{Ei}}(x)$  mit einer Exponentialtafel (z. B. [4]) leicht berechnen.

Die Tabelle aus der Differentialgleichung (3) mittels numerischer Integration berechnet. Um die Grössenordnung der Fehler der numerischen Integration sicher festzustellen, wurde  $y(x)$  auch aus der Formel (2) für  $x = 15, 15,5, 16, \dots$  usw. berechnet. Da aber die asymptotische Reihe für Werte nahe  $x = 15$  noch ungeeignet ist, die Funktion  $y(x)$  mit genügender Genauigkeit darzustellen, wurde eine Methode zur Verbesserung der Genauigkeit verwendet, die einer von STIELTJES und AIREY angegebenen Methode (siehe [5] und [6]) ähnlich ist. Mit Hilfe von Formel (4) erhält man eine weit bessere Approximation als mit Formel (2).

Wir bemerken, dass infolge der zufälligen Anhäufung von Abrundungsfählern die letzte Dezimalstelle eventuell um eins falsch sein kann.



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
15,00	1,078 103 11	6225	15,40	1,075 690 41	5835
01	78 040 86	6214	41	75 632 06	5827
02	77 978 72	6204	42	75 573 79	5817
03	77 916 68	6194	43	75 515 62	5808
04	77 854 74	6184	44	75 457 54	5799
05	77 792 90	6174	45	75 399 55	5790
06	77 731 16	6163	46	75 341 65	5781
07	77 669 53	6154	47	75 283 84	5772
08	77 607 99	6143	48	75 226 12	5762
09	77 546 56	6134	49	75 168 50	5754
15,10	1,077 485 22	6124	15,50	1,075 110 96	5744
11	77 423 98	6113	51	75 053 52	5735
12	77 362 85	6104	52	74 996 17	5727
13	77 301 81	6094	53	74 938 90	5717
14	77 240 87	6084	54	74 881 73	5709
15	77 180 03	6074	55	74 824 64	5700
16	77 119 29	6064	56	74 767 64	5690
17	77 058 65	6055	57	74 710 74	5682
18	76 998 10	6044	58	74 653 92	5673
19	76 937 66	6035	59	74 597 19	5664
15,20	1,076 877 31	6026	15,60	1,074 540 55	5656
21	76 817 05	6015	61	74 483 99	5646
22	76 756 90	6006	62	74 427 53	5638
23	76 696 84	5996	63	74 371 15	5629
24	76 636 88	5987	64	74 314 86	5620
25	76 577 01	5977	65	74 258 66	5612
26	76 517 24	5967	66	74 202 54	5603
27	76 457 57	5958	67	74 146 51	5594
28	76 397 99	5948	68	74 090 57	5586
29	76 338 51	5939	69	74 034 71	5577
15,30	1,076 279 12	5930	15,70	1,073 978 94	5568
31	76 219 82	5920	71	73 923 26	5560
32	76 160 62	5910	72	73 867 66	5551
33	76 101 52	5901	73	73 812 15	5542
34	76 042 51	5892	74	73 756 73	5535
35	75 983 59	5882	75	73 701 38	5525
36	75 924 77	5873	76	73 646 13	5517
37	75 866 04	5863	77	73 590 96	5509
38	75 807 41	5855	78	73 535 87	5500
39	75 748 86	5845	79	73 480 87	5492
15,40	1,075 690 41		15,80	1,073 425 95	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
15,80	1,073 425 95		16,20	1,071 296 09	
81	73 371 12	5483	21	71 244 46	5163
82	73 316 37	5475	22	71 192 90	5156
83	73 261 70	5467	23	71 141 43	5147
84	73 207 12	5458	24	71 090 03	5140
85	73 152 62	5450	25	71 038 70	5133
86	73 098 20	5442	26	70 987 46	5124
87	73 043 87	5433	27	70 936 28	5118
88	72 989 61	5426	28	70 885 19	5109
89	72 935 45	5416	29	70 834 16	5103
		5409			5094
15,90	1,072 881 36		16,30	1,070 783 22	
91	72 827 35	5401	31	70 732 34	5088
92	72 773 43	5392	32	70 681 55	5079
93	72 719 59	5384	33	70 630 82	5073
94	72 665 83	5376	34	70 580 17	5065
95	72 612 15	5368	35	70 529 60	5057
96	72 558 56	5359	36	70 479 10	5050
97	72 505 04	5352	37	70 428 67	5043
98	72 451 61	5343	38	70 378 32	5035
99	72 398 25	5336	39	70 328 04	5028
		5327			5021
16,00	1,072 344 98		16,40	1,070 277 83	
01	72 291 78	5320	41	70 227 70	5013
02	72 238 67	5311	42	70 177 64	5006
03	72 185 63	5304	43	70 127 65	4999
04	72 132 68	5295	44	70 077 73	4992
05	72 079 80	5288	45	70 027 89	4984
06	72 027 01	5279	46	69 978 12	4977
07	71 974 29	5272	47	69 928 42	4970
08	71 921 65	5264	48	69 878 80	4962
09	71 869 09	5256	49	69 829 25	4955
		5248			4949
16,10	1,071 816 61		16,50	1,069 779 76	
11	71 764 21	5240	51	69 730 35	4941
12	71 711 89	5232	52	69 681 01	4934
13	71 659 64	5225	53	69 631 75	4926
14	71 607 47	5217	54	69 582 55	4920
15	71 555 38	5209	55	69 533 42	4913
16	71 503 37	5201	56	69 484 37	4905
17	71 451 43	5194	57	69 435 38	4899
18	71 399 57	5186	58	69 386 47	4891
19	71 347 79	5178	59	69 337 63	4884
		5170			4878
16,20	1,071 296 09		16,60	1,069 288 85	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
16,60	1,069 288 85		17,00	1,067 393 69	
61	69 240 15	4870	01	67 347 67	4602
62	69 191 51	4864	02	67 301 70	4597
63	69 142 95	4856	03	67 255 81	4589
64	69 094 46	4849	04	67 209 97	4584
65	69 046 03	4843	05	67 164 20	4577
66	68 997 67	4836	06	67 118 49	4571
67	68 949 39	4828	07	67 072 85	4564
68	68 901 17	4822	08	67 027 27	4558
69	68 853 02	4815	09	66 981 75	4552
		4808			4546
16,70	1,068 804 94		17,10	1,066 936 29	
71	68 756 93	4801	11	66 890 90	4539
72	68 708 98	4795	12	66 845 57	4533
73	68 661 11	4787	13	66 800 31	4526
74	68 613 30	4781	14	66 755 10	4521
75	68 565 56	4774	15	66 709 96	4514
76	68 517 89	4767	16	66 664 88	4508
77	68 470 28	4761	17	66 619 86	4502
78	68 422 75	4753	18	66 574 90	4496
79	68 375 28	4747	19	66 530 01	4489
		4741			4483
16,80	1,068 327 87		17,20	1,066 485 18	
81	68 280 54	4733	21	66 440 40	4478
82	68 233 27	4727	22	66 395 69	4471
83	68 186 07	4720	23	66 351 05	4464
84	68 138 93	4714	24	66 306 46	4459
85	68 091 86	4707	25	66 261 93	4453
86	68 044 86	4700	26	66 217 46	4447
87	67 997 92	4694	27	66 173 06	4440
88	67 951 05	4687	28	66 128 71	4435
89	67 904 24	4681	29	66 084 43	4428
		4673			4422
16,90	1,067 857 51		17,30	1,066 040 21	
91	67 810 83	4668	31	65 996 04	4417
92	67 764 22	4661	32	65 951 94	4410
93	67 717 68	4654	33	65 907 89	4405
94	67 671 20	4648	34	65 863 91	4398
95	67 624 79	4641	35	65 819 99	4392
96	67 578 44	4635	36	65 776 12	4387
97	67 532 16	4628	37	65 732 32	4380
98	67 485 94	4622	38	65 688 57	4375
99	67 439 78	4616	39	65 644 88	4369
		4609			4362
17,00	1,067 393 69		17,40	1,065 601 26	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
17,40	1,065 601 26	4357	17,80	1,063 903 23	4130
41	65 557 69	4351	81	63 861 93	4125
42	65 514 18	4345	82	63 820 68	4120
43	65 470 73	4339	83	63 779 48	4115
44	65 427 34	4334	84	63 738 33	4109
45	65 384 00	4327	85	63 697 24	4103
46	65 340 73	4322	86	63 656 21	4099
47	65 297 51	4316	87	63 615 22	4093
48	65 254 35	4310	88	63 574 29	4087
49	65 211 25	4305	89	63 533 42	4083
17,50	1,065 168 20	4298	17,90	1,063 492 59	4077
51	65 125 22	4293	91	63 451 82	4071
52	65 082 29	4287	92	63 411 11	4066
53	65 039 42	4281	93	63 370 45	4061
54	64 996 61	4276	94	63 329 84	4056
55	64 953 85	4270	95	63 289 28	4051
56	64 911 15	4264	96	63 248 77	4045
57	64 868 51	4258	97	63 208 32	4040
58	64 825 93	4253	98	63 167 92	4035
59	64 783 40	4247	99	63 127 57	4029
17,60	1,064 740 93	4242	18,00	1,063 087 28	4024
61	64 698 51	4236	01	63 047 04	4019
62	64 656 15	4230	02	63 006 85	4014
63	64 613 85	4224	03	62 966 71	4009
64	64 571 61	4219	04	62 926 62	4003
65	64 529 42	4214	05	62 886 59	3999
66	64 487 28	4207	06	62 846 60	3993
67	64 445 21	4202	07	62 806 67	3988
68	64 403 19	4197	08	62 766 79	3983
69	64 361 22	4191	09	62 726 96	3978
17,70	1,064 319 31	4186	18,10	1,062 687 18	3972
71	64 277 45	4180	11	62 647 46	3968
72	64 235 65	4174	12	62 607 78	3962
73	64 193 91	4169	13	62 568 16	3957
74	64 152 22	4163	14	62 528 59	3953
75	64 110 59	4158	15	62 489 06	3947
76	64 069 01	4153	16	62 449 59	3942
77	64 027 48	4147	17	62 410 17	3937
78	63 986 01	4141	18	62 370 80	3932
79	63 944 60	4137	19	62 331 48	3927
17,80	1,063 903 23		18,20	1,062 292 21	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
18,20	1,062 292 21	3922	18,60	1,060 761 54	3729
21	62 252 99	3917	61	60 724 25	3725
22	62 213 82	3912	62	60 687 00	3720
23	62 174 70	3907	63	60 649 80	3715
24	62 135 63	3902	64	60 612 65	3710
25	62 096 61	3897	65	60 575 55	3706
26	62 057 64	3892	66	60 538 49	3702
27	62 018 72	3887	67	60 501 47	3696
28	61 979 85	3883	68	60 464 51	3692
29	61 941 02	3877	69	60 427 59	3688
18,30	1,061 902 25	3872	18,70	1,060 390 71	3683
31	61 863 53	3868	71	60 353 88	3679
32	61 824 85	3862	72	60 317 09	3674
33	61 786 23	3858	73	60 280 35	3669
34	61 747 65	3853	74	60 243 66	3665
35	61 709 12	3847	75	60 207 01	3660
36	61 670 65	3844	76	60 170 41	3656
37	61 632 21	3838	77	60 133 85	3652
38	61 593 83	3833	78	60 097 33	3646
39	61 555 50	3828	79	60 060 87	3643
18,40	1,061 517 22	3824	18,80	1,060 024 44	3638
41	61 478 98	3819	81	59 988 06	3633
42	61 440 79	3814	82	59 951 73	3629
43	61 402 65	3809	83	59 915 44	3625
44	61 364 56	3805	84	59 879 19	3620
45	61 326 51	3799	85	59 842 99	3616
46	61 288 52	3795	86	59 806 83	3611
47	61 250 57	3790	87	59 770 72	3607
48	61 212 67	3786	88	59 734 65	3602
49	61 174 81	3780	89	59 698 63	3598
18,50	1,061 137 01	3776	18,90	1,059 662 65	3594
51	61 099 25	3771	91	59 626 71	3589
52	61 061 54	3767	92	59 590 82	3585
53	61 023 87	3761	93	59 554 97	3580
54	60 986 26	3757	94	59 519 17	3577
55	60 948 69	3753	95	59 483 40	3571
56	60 911 16	3747	96	59 447 69	3568
57	60 873 69	3743	97	59 412 01	3563
58	60 836 26	3739	98	59 376 38	3559
59	60 798 87	3733	99	59 340 79	3554
18,60	1,060 761 54		19,00	1,059 305 25	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
19,00	1,059 305 25	3551	19,40	1,057 917 96	3384
01	59 269 74	3545	41	57 884 12	3380
02	59 234 29	3542	42	57 850 32	3376
03	59 198 87	3537	43	57 816 56	3372
04	59 163 50	3533	44	57 782 84	3368
05	59 128 17	3529	45	57 749 16	3365
06	59 092 88	3525	46	57 715 51	3360
07	59 057 63	3520	47	57 681 91	3356
08	59 022 43	3516	48	57 648 35	3352
09	58 987 27	3512	49	57 614 83	3349
19,10	1,058 952 15	3507	19,50	1,057 581 34	3344
11	58 917 08	3503	51	57 547 90	3341
12	58 882 05	3499	52	57 514 49	3336
13	58 847 06	3495	53	57 481 13	3333
14	58 812 11	3491	54	57 447 80	3329
15	58 777 20	3486	55	57 414 51	3325
16	58 742 34	3483	56	57 381 26	3321
17	58 707 51	3478	57	57 348 05	3317
18	58 672 73	3474	58	57 314 88	3313
19	58 637 99	3470	59	57 281 75	3309
19,20	1,058 603 29	3465	19,60	1,057 248 66	3306
21	58 568 64	3462	61	57 215 60	3301
22	58 534 02	3457	62	57 182 59	3298
23	58 499 45	3453	63	57 149 61	3294
24	58 464 92	3449	64	57 116 67	3290
25	58 430 43	3445	65	57 083 77	3286
26	58 395 98	3441	66	57 050 91	3283
27	58 361 57	3437	67	57 018 08	3278
28	58 327 20	3433	68	56 985 30	3275
29	58 292 87	3428	69	56 952 55	3271
19,30	1,058 258 59	3425	19,70	1,056 919 84	3267
31	58 224 34	3420	71	56 887 17	3264
32	58 190 14	3417	72	56 854 53	3259
33	58 155 97	3412	73	56 821 94	3256
34	58 121 85	3408	74	56 789 38	3252
35	58 087 77	3404	75	56 756 86	3248
36	58 053 73	3400	76	56 724 38	3245
37	58 019 73	3397	77	56 691 93	3241
38	57 985 76	3392	78	56 659 52	3237
39	57 951 84	3388	79	56 627 15	3233
19,40	1,057 917 96		19,80	1,056 594 82	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
19,80	1,056 594 82		20,20	1,055 331 41	
81	56 562 52	3230	21	55 300 55	3086
82	56 530 26	3226	22	55 269 73	3082
83	56 498 04	3222	23	55 238 95	3078
84	56 465 86	3218	24	55 208 19	3076
85	56 433 71	3215	25	55 177 48	3071
86	56 401 60	3211	26	55 146 80	3068
87	56 369 53	3207	27	55 116 15	3065
88	56 337 49	3204	28	55 085 53	3062
89	56 305 49	3200	29	55 054 95	3058
		3196			3054
19,90	1,056 273 53		20,30	1,055 024 41	
91	56 241 60	3193	31	54 993 90	3051
92	56 209 71	3189	32	54 963 42	3048
93	56 177 86	3185	33	54 932 98	3044
94	56 146 04	3182	34	54 902 57	3041
95	56 114 26	3178	35	54 872 20	3037
96	56 082 52	3174	36	54 841 86	3034
97	56 050 81	3171	37	54 811 55	3031
98	56 019 14	3167	38	54 781 28	3027
99	55 987 50	3164	39	54 751 04	3024
		3159			3020
20,00	1,055 955 91		20,40	1,054 720 84	
01	55 924 34	3157	41	54 690 66	3018
02	55 892 82	3152	42	54 660 53	3013
03	55 861 32	3150	43	54 630 42	3011
04	55 829 87	3145	44	54 600 35	3007
05	55 798 45	3142	45	54 570 31	3004
06	55 767 07	3138	46	54 540 31	3000
07	55 735 72	3135	47	54 510 34	2997
08	55 704 40	3132	48	54 480 40	2994
09	55 673 13	3127	49	54 450 50	2990
		3124			2988
20,10	1,055 641 89		20,50	1,054 420 62	
11	55 610 68	3121	51	54 390 79	2983
12	55 579 51	3117	52	54 360 98	2981
13	55 548 37	3114	53	54 331 21	2977
14	55 517 27	3110	54	54 301 47	2974
15	55 486 21	3106	55	54 271 76	2971
16	55 455 18	3103	56	54 242 09	2967
17	55 424 18	3100	57	54 212 45	2964
18	55 393 22	3096	58	54 182 84	2961
19	55 362 30	3092	59	54 153 26	2958
		3089			2954
20,20	1,055 331 41		20,60	1,054 123 72	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
20,60	1,054 123 72		21,00	1,052 968 11	
61	54 094 21	2951	01	52 939 86	2825
62	54 064 73	2948	02	52 911 64	2822
63	54 035 29	2944	03	52 883 45	2819
64	54 005 88	2941	04	52 855 28	2817
65	53 976 49	2939	05	52 827 15	2813
66	53 947 15	2934	06	52 799 05	2810
67	53 917 83	2932	07	52 770 98	2807
68	53 888 55	2928	08	52 742 94	2804
69	53 859 29	2926	09	52 714 93	2801
		2922			2798
20,70	1,053 830 07		21,10	1,052 686 95	
71	53 800 88	2919	11	52 659 00	2795
72	53 771 73	2915	12	52 631 08	2792
73	53 742 60	2913	13	52 603 19	2789
74	53 713 51	2909	14	52 575 32	2787
75	53 684 45	2906	15	52 547 49	2783
76	53 655 42	2903	16	52 519 69	2780
77	53 626 43	2899	17	52 491 92	2777
78	53 597 46	2897	18	52 464 18	2774
79	53 568 53	2893	19	52 436 46	2772
		2891			2768
20,80	1,053 539 62		21,20	1,052 408 78	
81	53 510 75	2887	21	52 381 13	2765
82	53 481 91	2884	22	52 353 50	2763
83	53 453 10	2881	23	52 325 91	2759
84	53 424 33	2877	24	52 298 34	2757
85	53 395 58	2875	25	52 270 81	2753
86	53 366 87	2871	26	52 243 30	2751
87	53 338 18	2869	27	52 215 82	2748
88	53 309 53	2865	28	52 188 37	2745
89	53 280 91	2862	29	52 160 95	2742
		2859			2739
20,90	1,053 252 32		21,30	1,052 133 56	
91	53 223 76	2856	31	52 106 20	2736
92	53 195 23	2853	32	52 078 87	2733
93	53 166 73	2850	33	52 051 56	2731
94	53 138 27	2846	34	52 024 29	2727
95	53 109 83	2844	35	51 997 04	2725
96	53 081 43	2840	36	51 969 82	2722
97	53 053 05	2838	37	51 942 64	2718
98	53 024 71	2834	38	51 915 48	2716
99	52 996 39	2832	39	51 888 34	2714
		2828			2710
21,00	1,052 968 11		21,40	1,051 861 24	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
21,40	1,051 861 24		21,80	1,050 800 06	
41	51 834 17	2707	81	50 774 09	2597
42	51 807 12	2705	82	50 748 15	2594
43	51 780 10	2702	83	50 722 23	2592
44	51 753 12	2698	84	50 696 35	2588
45	51 726 16	2696	85	50 670 48	2587
46	51 699 22	2694	86	50 644 65	2583
47	51 672 32	2690	87	50 618 84	2581
48	51 645 44	2688	88	50 593 06	2578
49	51 618 60	2684	89	50 567 30	2576
		2682			2573
21,50	1,051 591 78		21,90	1,050 541 57	
51	51 564 99	2679	91	50 515 87	2570
52	51 538 22	2677	92	50 490 19	2568
53	51 511 49	2673	93	50 464 54	2565
54	51 484 78	2671	94	50 438 92	2562
55	51 458 10	2668	95	50 413 32	2560
56	51 431 45	2665	96	50 387 75	2557
57	51 404 82	2663	97	50 362 20	2555
58	51 378 23	2659	98	50 336 68	2552
59	51 351 66	2657	99	50 311 19	2549
		2654			2547
21,60	1,051 325 12		22,00	1,050 285 72	
61	51 298 61	2651	01	50 260 28	2544
62	51 272 12	2649	02	50 234 86	2542
63	51 245 66	2646	03	50 209 47	2539
64	51 219 23	2643	04	50 184 11	2536
65	51 192 83	2640	05	50 158 77	2534
66	51 166 46	2637	06	50 133 46	2531
67	51 140 11	2635	07	50 108 17	2529
68	51 113 79	2632	08	50 082 91	2526
69	51 087 50	2629	09	50 057 68	2523
		2627			2521
21,70	1,051 061 23		22,10	1,050 032 47	
71	51 034 99	2624	11	50 007 28	2519
72	51 008 78	2621	12	49 982 12	2516
73	50 982 60	2618	13	49 956 99	2513
74	50 956 44	2616	14	49 931 88	2511
75	50 930 31	2613	15	49 906 80	2508
76	50 904 20	2611	16	49 881 74	2506
77	50 878 13	2607	17	49 856 71	2503
78	50 852 08	2605	18	49 831 71	2500
79	50 826 06	2602	19	49 806 73	2498
		2600			2496
21,80	1,050 800 06		22,20	1,049 781 77	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
22,20	1,049 781 77		22,60	1,048 803 80	
21	49 756 84	2493	61	48 779 84	2396
22	49 731 93	2491	62	48 755 91	2393
23	49 707 05	2488	63	48 732 01	2390
24	49 682 20	2485	64	48 708 12	2389
25	49 657 37	2483	65	48 684 26	2386
26	49 632 56	2481	66	48 660 43	2383
27	49 607 78	2478	67	48 636 62	2381
28	49 583 03	2475	68	48 612 83	2379
29	49 558 30	2473	69	48 589 06	2377
		2471			2374
22,30	1,049 533 59		22,70	1,048 565 32	
31	49 508 91	2468	71	48 541 60	2372
32	49 484 26	2465	72	48 517 91	2369
33	49 459 62	2464	73	48 494 24	2367
34	49 435 02	2460	74	48 470 59	2365
35	49 410 44	2458	75	48 446 96	2363
36	49 385 88	2456	76	48 423 36	2360
37	49 361 35	2453	77	48 399 78	2358
38	49 336 84	2451	78	48 376 22	2356
39	49 312 36	2448	79	48 352 69	2353
		2446			2351
22,40	1,049 287 90		22,80	1,048 329 18	
41	49 263 46	2444	81	48 305 69	2349
42	49 239 05	2441	82	48 282 23	2346
34	49 214 67	2438	83	48 258 79	2344
44	49 190 30	2437	84	48 235 37	2342
45	49 165 97	2433	85	48 211 98	2339
46	49 141 65	2432	86	48 188 60	2338
47	49 117 36	2429	87	48 165 26	2334
48	49 093 10	2426	88	48 141 93	2333
49	49 068 86	2424	89	48 118 62	2331
		2422			2328
22,50	1,049 044 64		22,90	1,048 095 34	
51	49 020 45	2419	91	48 072 08	2326
52	48 996 28	2417	92	48 048 85	2323
53	48 972 14	2414	93	48 025 64	2321
54	48 948 02	2412	94	48 002 45	2319
55	48 923 92	2410	95	47 979 28	2317
56	48 899 85	2407	96	47 956 13	2315
57	48 875 80	2405	97	47 933 01	2312
58	48 851 78	2402	98	47 909 91	2310
59	48 827 77	2401	99	47 886 83	2308
		2397			2306
22,60	1,048 803 80		23,00	1,047 863 77	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
23,00	1,047 863 77		23,40	1,046 959 51	
01	47 840 74	2303	41	46 937 35	2216
02	47 817 73	2301	42	46 915 20	2215
03	47 794 74	2299	43	46 893 08	2212
04	47 771 77	2297	44	46 870 98	2210
05	47 748 83	2294	45	46 848 89	2209
06	47 725 91	2292	46	46 826 83	2206
07	47 703 01	2290	47	46 804 79	2204
08	47 680 13	2288	48	46 782 77	2202
09	47 657 27	2286	49	46 760 78	2199
		2283			2198
23,10	1,047 634 44		23,50	1,046 738 80	
11	47 611 62	2282	51	46 716 84	2196
12	47 588 83	2279	52	46 694 91	2193
13	47 566 07	2276	53	46 672 99	2192
14	47 543 32	2275	54	46 651 10	2189
15	47 520 60	2272	55	46 629 22	2188
16	47 497 89	2271	56	46 607 37	2185
17	47 475 21	2268	57	46 585 54	2183
18	47 452 56	2265	58	46 563 72	2182
19	47 429 92	2264	59	46 541 93	2179
		2262			2177
23,20	1,047 407 30		23,60	1,046 520 16	
21	47 384 71	2259	61	46 498 41	2175
22	47 362 14	2257	62	46 476 68	2173
23	47 339 59	2255	63	46 454 97	2171
24	47 317 06	2253	64	46 433 28	2169
25	47 294 55	2251	65	46 411 61	2167
26	47 272 07	2248	66	46 389 96	2165
27	47 249 60	2247	67	46 368 33	2163
28	47 227 16	2244	68	46 346 73	2160
29	47 204 74	2242	69	46 325 14	2159
		2240			2157
23,30	1,047 182 34		23,70	1,046 303 57	
31	47 159 96	2238	71	46 282 02	2155
32	47 137 60	2236	72	46 260 50	2152
33	47 115 27	2233	73	46 238 99	2151
34	47 092 95	2232	74	46 217 50	2149
35	47 070 66	2229	75	46 196 04	2146
36	47 048 39	2227	76	46 174 59	2145
37	47 026 14	2225	77	46 153 16	2143
38	47 003 91	2223	78	46 131 76	2140
39	46 981 70	2221	79	46 110 37	2139
		2219			2137
23,40	1,046 959 51		23,80	1,046 089 00	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
23,80	1,046 089 00		24,20	1,045 250 37	
81	46 067 66	2134	21	45 229 80	2057
82	46 046 33	2133	22	45 209 24	2056
83	46 025 02	2131	23	45 188 71	2053
84	46 003 73	2129	24	45 168 19	2052
85	45 982 47	2126	25	45 147 69	2050
86	45 961 22	2125	26	45 127 21	2048
87	45 939 99	2123	27	45 106 75	2046
88	45 918 78	2121	28	45 086 31	2044
89	45 897 59	2119	29	45 065 89	2042
		2116			2040
23,90	1,045 876 43		24,30	1,045 045 49	
91	45 855 28	2115	31	45 025 10	2039
92	45 834 15	2113	32	45 004 73	2037
93	45 813 04	2111	33	44 984 38	2035
94	45 791 95	2109	34	44 964 05	2033
95	45 770 87	2108	35	44 943 74	2031
96	45 749 82	2105	36	44 923 45	2029
97	45 728 79	2103	37	44 903 17	2028
98	45 707 78	2101	38	44 882 92	2025
99	45 686 79	2099	39	44 862 68	2024
		2098			2022
24,00	1,045 665 81		24,40	1,044 842 46	
01	45 644 86	2095	41	44 822 26	2020
02	45 623 92	2094	42	44 802 08	2018
03	45 603 01	2091	43	44 781 91	2017
04	45 582 11	2090	44	44 761 77	2014
05	45 561 23	2088	45	44 741 64	2013
06	45 540 38	2085	46	44 721 53	2011
07	45 519 54	2084	47	44 701 43	2010
08	45 498 72	2082	48	44 681 36	2007
09	45 477 92	2080	49	44 661 31	2005
		2078			2004
24,10	1,045 457 14		24,50	1,044 641 27	
11	45 436 37	2077	51	44 621 25	2002
12	45 415 63	2074	52	44 601 25	2000
13	45 394 91	2072	53	44 581 26	1999
14	45 374 20	2071	54	44 561 30	1996
15	45 353 52	2068	55	44 541 35	1995
16	45 332 85	2067	56	44 521 42	1993
17	45 312 20	2065	57	44 501 51	1991
18	45 291 57	2063	58	44 481 62	1989
19	45 270 96	2061	59	44 461 74	1988
		2059			1986
24,20	1,045 250 37		24,60	1,044 441 88	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
24,60	1,044 441 88		25,00	1,043 661 94	
61	44 422 04	1984	01	43 642 79	1915
62	44 402 22	1982	02	43 623 66	1913
63	44 382 42	1980	03	43 604 55	1911
64	44 362 63	1979	04	43 585 45	1910
65	44 342 86	1977	05	43 566 37	1908
66	44 323 11	1975	06	43 547 31	1906
67	44 303 38	1973	07	43 528 27	1904
68	44 283 66	1972	08	43 509 24	1903
69	44 263 96	1970	09	43 490 23	1901
		1968			1900
24,70	1,044 244 28		25,10	1,043 471 23	
71	44 224 62	1966	11	43 452 25	1898
72	44 204 97	1965	12	43 433 29	1896
73	44 185 34	1963	13	43 414 35	1894
74	44 165 73	1961	14	43 395 42	1893
75	44 146 14	1959	15	43 376 51	1891
76	44 126 57	1957	16	43 357 61	1890
77	44 107 01	1956	17	43 338 73	1888
78	44 087 47	1954	18	43 319 87	1886
79	44 067 94	1953	19	43 301 02	1885
		1950			1883
24,80	1,044 048 44		25,20	1,043 282 19	
81	44 028 95	1949	21	43 263 38	1881
82	44 009 48	1947	22	43 244 59	1879
83	43 990 02	1946	23	43 225 81	1878
84	43 970 59	1943	24	43 207 04	1877
85	43 951 17	1942	25	43 188 29	1875
86	43 931 77	1940	26	43 169 56	1873
87	43 912 38	1939	27	43 150 85	1871
88	43 893 01	1937	28	43 132 15	1870
89	43 873 66	1935	29	43 113 47	1868
		1933			1867
24,90	1,043 854 33		25,30	1,043 094 80	
91	43 835 01	1932	31	43 076 15	1865
92	43 815 72	1929	32	43 057 52	1863
93	43 796 43	1929	33	43 038 90	1862
94	43 777 17	1926	34	43 020 30	1860
95	43 757 92	1925	35	43 001 72	1858
96	43 738 69	1923	36	42 983 15	1857
97	43 719 48	1921	37	42 964 60	1855
98	43 700 28	1920	38	42 946 06	1854
99	43 681 10	1918	39	42 927 54	1852
		1916			1850
25,00	1,043 661 94		25,40	1,042 909 04	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
25,40	1,042 909 04		25,80	1,042 181 79	
41	42 890 55	1849	81	42 163 93	1786
42	42 872 07	1848	82	42 146 08	1785
43	42 853 62	1845	83	42 128 24	1784
44	42 835 18	1844	84	42 110 42	1782
45	42 816 75	1843	85	42 092 62	1780
46	42 798 35	1840	86	42 074 83	1779
47	42 779 95	1840	87	42 057 06	1777
48	42 761 58	1837	88	42 039 30	1776
49	42 743 22	1836	89	42 021 56	1774
		1835			1773
25,50	1,042 724 87		25,90	1,042 003 83	
51	42 706 54	1833	91	41 986 12	1771
52	42 688 23	1831	92	41 968 42	1770
53	42 669 93	1830	93	41 950 74	1768
54	42 651 65	1828	94	41 933 07	1767
55	42 633 38	1827	95	41 915 42	1765
56	42 615 13	1825	96	41 897 78	1764
57	42 596 90	1823	97	41 880 16	1762
58	42 578 68	1822	98	41 862 55	1761
59	42 560 48	1820	99	41 844 96	1759
		1819			1758
25,60	1,042 542 29		26,00	1,041 827 38	
61	42 524 12	1817	01	41 809 81	1757
62	42 505 96	1816	02	41 792 27	1754
63	42 487 82	1814	03	41 774 73	1754
64	42 469 69	1813	04	41 757 21	1752
65	42 451 58	1811	05	41 739 71	1750
66	42 433 49	1809	06	41 722 22	1749
67	42 415 41	1808	07	41 704 74	1748
68	42 397 35	1806	08	41 687 28	1746
69	42 379 30	1805	09	41 669 84	1744
		1803			1743
25,70	1,042 361 27		26,10	1,041 652 41	
71	42 343 25	1802	11	41 634 99	1742
72	42 325 25	1800	12	41 617 59	1740
73	42 307 26	1799	13	41 600 20	1739
74	42 289 29	1797	14	41 582 83	1737
75	42 271 34	1795	15	41 565 47	1736
76	42 253 40	1794	16	41 548 13	1734
77	42 235 47	1793	17	41 530 80	1733
78	42 217 56	1791	18	41 513 49	1731
79	42 199 67	1789	19	41 496 19	1730
		1788			1729
25,80	1,042 181 79		26,20	1,041 478 90	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
26,20	1,041 478 90		26,60	1,040 799 16	
21	41 461 63	1727	61	40 782 45	1671
22	41 444 37	1726	62	40 765 76	1669
23	41 427 13	1724	63	40 749 08	1668
24	41 409 90	1723	64	40 732 42	1666
25	41 392 69	1721	65	40 715 76	1666
26	41 375 49	1720	66	40 699 13	1663
27	41 358 31	1718	67	40 682 50	1663
28	41 341 14	1717	68	40 665 89	1661
29	41 323 98	1716	69	40 649 29	1660
		1714			1658
26,30	1,041 306 84		26,70	1,040 632 71	
31	41 289 71	1713	71	40 616 14	1657
32	41 272 60	1711	72	40 599 58	1656
33	41 255 50	1710	73	40 583 04	1654
34	41 238 42	1708	74	40 566 51	1653
35	41 221 35	1707	75	40 549 99	1652
36	41 204 29	1706	76	40 533 49	1650
37	41 187 25	1704	77	40 517 00	1649
38	41 170 22	1703	78	40 500 53	1647
39	41 153 21	1701	79	40 484 06	1647
		1700			1644
26,40	1,041 136 21		26,80	1,040 467 62	
41	41 119 22	1699	81	40 451 18	1644
42	41 102 25	1697	82	40 434 76	1642
43	41 085 30	1695	83	40 418 35	1641
44	41 068 35	1695	84	40 401 95	1640
45	41 051 42	1693	85	40 385 57	1638
46	41 034 51	1691	86	40 369 20	1637
47	41 017 61	1690	87	40 352 85	1635
48	41 000 72	1689	88	40 336 51	1634
49	40 983 85	1687	89	40 320 18	1633
		1686			1632
26,50	1,040 966 99		26,90	1,040 303 86	
51	40 950 14	1685	91	40 287 56	1630
52	40 933 31	1683	92	40 271 27	1629
53	40 916 50	1681	93	40 255 00	1627
54	40 899 69	1681	94	40 238 74	1626
55	40 882 90	1679	95	40 222 49	1625
56	40 866 13	1677	96	40 206 25	1624
57	40 849 36	1677	97	40 190 03	1622
58	40 832 62	1674	98	40 173 82	1621
59	40 815 88	1674	99	40 157 62	1620
		1672			1618
26,60	1,040 799 16		27,00	1,040 141 44	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
27,00	1,040 141 44	1617	27,40	1,039 504 68	1567
01	40 125 27	1616	41	39 489 01	1564
02	40 109 11	1614	42	39 473 37	1564
03	40 092 97	1613	43	39 457 73	1562
04	40 076 84	1612	44	39 442 11	1561
05	40 060 72	1611	45	39 426 50	1559
06	40 044 61	1609	46	39 410 91	1559
07	40 028 52	1608	47	39 395 32	1557
08	40 012 44	1606	48	39 379 75	1556
09	39 996 38	1606	49	39 364 19	1555
27,10	1,039 980 32	1604	27,50	1,039 348 64	1553
11	39 964 28	1603	51	39 333 11	1553
12	39 948 25	1601	52	39 317 58	1551
13	39 932 24	1600	53	39 302 07	1550
14	39 916 24	1599	54	39 286 57	1548
15	39 900 25	1598	55	39 271 09	1548
16	39 884 27	1596	56	39 255 61	1546
17	39 868 31	1595	57	39 240 15	1545
18	39 852 36	1594	58	39 224 70	1543
19	39 836 42	1592	59	39 209 27	1543
27,20	1,039 820 50	1591	27,60	1,039 193 84	1541
21	39 804 59	1590	61	39 178 43	1540
22	39 788 69	1589	62	39 163 03	1539
23	39 772 80	1587	63	39 147 64	1538
24	39 756 93	1586	64	39 132 26	1536
25	39 741 07	1585	65	39 116 90	1535
26	39 725 22	1583	66	39 101 55	1534
27	39 709 39	1581	67	39 086 21	1533
28	39 693 56	1579	68	39 070 88	1532
29	39 677 75	1579	69	39 055 56	1530
27,30	1,039 661 96	1579	27,70	1,039 040 26	1529
31	39 646 17	1577	71	39 024 97	1528
32	39 630 40	1576	72	39 009 69	1527
33	39 614 64	1575	73	38 994 42	1526
34	39 598 89	1573	74	38 979 16	1524
35	39 583 16	1572	75	38 963 92	1523
36	39 567 44	1571	76	38 948 69	1522
37	39 551 73	1570	77	38 933 47	1521
38	39 536 03	1568	78	38 918 26	1520
39	39 520 35	1567	79	38 903 06	1518
27,40	1,039 504 68		27,80	1,038 887 88	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
27,80	1,038 887 88	1517	28,20	1,038 290 13	1471
81	38 872 71	1516	21	38 275 42	1470
82	38 857 55	1515	22	38 260 72	1468
83	38 842 40	1514	23	38 246 04	1468
84	38 827 26	1512	24	38 231 36	1466
85	38 812 14	1511	25	38 216 70	1465
86	38 797 03	1511	26	38 202 05	1464
87	38 781 92	1509	27	38 187 41	1463
88	38 766 83	1507	28	38 172 78	1462
89	38 751 76	1507	29	38 158 16	1460
27,90	1,038 736 69	1505	28,30	1,038 143 56	1460
91	38 721 64	1504	31	38 128 96	1458
92	38 706 60	1504	32	38 114 38	1457
93	38 691 56	1501	33	38 099 81	1456
94	38 676 55	1501	34	38 085 25	1455
95	38 661 54	1500	35	38 070 70	1454
96	38 646 54	1498	36	38 056 16	1453
97	38 631 56	1497	37	38 041 63	1452
98	38 616 59	1496	38	38 027 11	1450
99	38 601 63	1495	39	38 012 61	1450
28,00	1,038 586 68	1494	28,40	1,037 998 11	1448
01	38 571 74	1492	41	37 983 63	1447
02	38 556 82	1492	42	37 969 16	1446
03	38 541 90	1490	43	37 954 70	1445
04	38 527 00	1489	44	37 940 25	1444
05	38 512 11	1488	45	37 925 81	1443
06	38 497 23	1487	46	37 911 38	1442
07	38 482 36	1485	47	37 896 96	1440
08	38 467 51	1485	48	37 882 56	1440
09	38 452 66	1483	49	37 868 16	1438
28,10	1,038 437 83	1482	28,50	1,037 853 78	1438
11	38 423 01	1481	51	37 839 40	1436
12	38 408 20	1480	52	37 825 04	1435
13	38 393 40	1479	53	37 810 69	1434
14	38 378 61	1478	54	37 796 35	1433
15	38 363 83	1476	55	37 782 02	1432
16	38 349 07	1475	56	37 767 70	1431
17	38 334 32	1475	57	37 753 39	1429
18	38 319 57	1473	58	37 739 10	1429
19	38 304 84	1471	59	37 724 81	1427
28,20	1,038 290 13		28,60	1,037 710 54	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
28,60	1,037 710 54		29,00	1,037 148 30	
61	37 696 27	1427	01	37 134 46	1384
62	37 682 02	1425	02	37 120 63	1383
63	37 667 78	1424	03	37 106 81	1382
64	37 653 55	1423	04	37 093 00	1381
65	37 639 33	1422	05	37 079 20	1380
66	37 625 12	1421	06	37 065 41	1379
67	37 610 92	1420	07	37 051 63	1378
68	37 596 73	1419	08	37 037 86	1377
69	37 582 55	1418	09	37 024 11	1375
		1417			
28,70	1,037 568 38		29,10	1,037 010 36	
71	37 554 23	1415	11	36 996 62	1374
72	37 540 08	1415	12	36 982 89	1373
73	37 525 95	1413	13	36 969 18	1371
74	37 511 82	1413	14	36 955 47	1371
75	37 497 71	1411	15	36 941 77	1370
76	37 483 60	1411	16	36 928 09	1368
77	37 469 51	1409	17	36 914 41	1368
78	37 455 43	1408	18	36 900 74	1367
79	37 441 36	1407	19	36 887 09	1365
		1406			
28,80	1,037 427 30		29,20	1,036 873 44	
81	37 413 25	1405	21	36 859 81	1363
82	37 399 21	1404	22	36 846 18	1363
83	37 385 18	1403	23	36 832 57	1361
84	37 371 16	1402	24	36 818 96	1361
85	37 357 16	1400	25	36 805 36	1360
86	37 343 16	1400	26	36 791 78	1358
87	37 329 17	1399	27	36 778 20	1358
88	37 315 20	1397	28	36 764 64	1356
89	37 301 23	1397	29	36 751 08	1356
		1396			
28,90	1,037 287 27		29,30	1,036 737 54	
91	37 273 33	1394	31	36 724 00	1354
92	37 259 40	1393	32	36 710 48	1352
93	37 245 47	1393	33	36 696 96	1352
94	37 231 56	1391	34	36 683 46	1350
95	37 217 66	1390	35	36 669 96	1350
96	37 203 76	1390	36	36 656 48	1348
97	37 189 88	1388	37	36 643 00	1348
98	37 176 01	1387	38	36 629 54	1346
99	37 162 15	1386	39	36 616 08	3346
		1385			1344
29,00	1,037 148 30		29,40	1,036 602 64	



$x$	$y$	$\Delta y$	$x$	$y$	$\Delta y$
29,40	1,036 602 64	1344	29,70	1,036 203 83	1314
41	36 589 20	1342	71	36 190 69	1313
42	36 575 78	1342	72	36 177 56	1313
43	36 562 36	1341	73	36 164 43	1311
44	36 548 95	1339	74	36 151 32	1311
45	36 535 56	1339	75	36 138 21	1309
46	36 522 17	1337	76	36 125 12	1309
47	36 508 80	1337	77	36 112 03	1308
48	36 495 43	1335	78	36 098 95	1306
49	36 482 08	1335	79	36 085 89	1306
29,50	1,036 468 73	1334	29,80	1,036 072 83	1305
51	36 455 39	1333	81	36 059 78	1304
52	36 442 06	1332	82	36 046 74	1303
53	36 428 74	1330	83	36 033 71	1302
54	36 415 44	1330	84	36 020 69	1301
55	36 402 14	1329	85	36 007 68	1300
56	36 388 85	1328	86	35 994 68	1299
57	36 375 57	1327	87	35 981 69	1298
58	36 362 30	1326	88	35 968 71	1297
59	36 349 04	1325	89	35 955 74	1297
29,60	1,036 335 79	1323	29,90	1,035 942 77	1295
61	36 322 56	1323	91	35 929 82	1295
62	36 309 33	1322	92	35 916 87	1293
63	36 296 11	1322	93	35 903 94	1293
64	36 282 89	1320	94	35 891 01	1291
65	36 269 69	1319	95	35 878 10	1291
66	36 256 50	1318	96	35 865 19	1290
67	36 243 32	1317	97	35 852 29	1289
68	36 230 15	1316	98	35 839 40	1288
69	36 216 99	1316	99	35 826 52	1287
29,70	1,036 203 83		30,00	1,035 813 65	



# A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET OSZTÁLYAINAK SZEMINÁRIUMAIBAN 1955-BEN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK KIVONATAI

## Mechanikai és szilárdságtani osztály

RÓZSA PÁL : *Egy nevezetes sztochasztikus matrixról.* (A valószínűségszámítási osztállyal közös szemináriumi ülés.) (Január 17.)

J. J. SYLVESTER bizonyítás nélkül közölte azt az állítást, hogy a

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & n & 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & n-1 & & & & \\ 0 & 2 & 0 & & n-2 & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & & & n & 0 \end{bmatrix}$$

matrix sajátértékei a 0-ra szimmetrikusan elhelyezkedő olyan számtani sort alkotnak, melynek különbsége 2. Az előadó bebizonyította, hogy a  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}/n$  sztochasztikus matrix teljes spektrálfelbontása

$$\mathbf{P} = [\mathbf{a}_{ik}] \left\langle \frac{\lambda_i}{n} \right\rangle [\mathbf{a}_{ik}]$$

ahol

$$\frac{\lambda_i}{n} = 1 - \frac{2i}{n} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

és

$$a_{ik} = (-1)^k \sqrt{2^n} P_k^{(i-k, n-i-k)}(0),$$

$P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$  az  $\alpha, \beta$  paraméterekhez tartozó  $k$ -adrendű Jacobi-polinomot jelenti. A bizonyítás — amely magában foglalja SYLVESTER állításának bizonyítását is — úgy történik, hogy a sajátvektorokat definiáló matrixegyenletet változó együtthatójú lineáris differenciaegyenletként írjuk fel és azt generátorfüggvény alkalmazásával megoldjuk.

RÓZSA PÁL : *Módosított matrixok reciprokának meghatározásáról.* (Június 30.)

SHERMAN és MORRISON eljárást adtak olyan matrix reciprokának egyszerű meghatározására, amely egy ismert reciprokkal bíró matrix egyetlen elemének a módosításával keletkezett. Az előadó ezt az eljárást általánosította arra az esetre, amikor az ismert reciprokkal bíró matrix *akárhány* elemének a megváltoztatásával nyert matrix inverzét kell meghatározni. Legyen  $\mathbf{A}$  az eredeti,  $\mathbf{B}$  a módosított ( $n$ -edrendű kvadratikuss) matrix,  $\mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1}$ , továbbá

$$\mathbf{K} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\nu} e_{\alpha_i} k_{\alpha_i \beta_j} e_{\beta_j}^*$$



[itt  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ) és  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, \nu$ ) azok a sor-, illetve oszlopindexek, melyekre  $k_{\alpha\beta_j} \neq 0$ ] és  $\mathbf{K}_{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu}^{\beta_1, \dots, \beta_\nu} = \mathbf{K}' (\mu \times \nu$ -edrendű minormatrix), akkor — feltéve, hogy  $\mathbf{E}_\mu + \mathbf{K}' \mathbf{R}_{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu}^{\beta_1, \dots, \beta_\nu} \neq 0$  — érvényes a

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu}^{\beta_1, \dots, \beta_\nu} \{\mathbf{E}_\mu + \mathbf{K}' \mathbf{R}_{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu}^{\beta_1, \dots, \beta_\nu}\}^{-1} \mathbf{K}' \mathbf{R}_{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu}^{\beta_1, \dots, \beta_\nu}$$

összefüggés.

RÓZSA PÁL ismertette EGERVÁRI JENŐ „A Hunyadi–Scholtz-féle matrixok alkalmazása a rácsos szerkezetek elméletében” című dolgozatát. (Október 11.)

Lásd: *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 289–300.

### Valószínűségszámítási és Matematikai-statisztikai osztályok

RÉNYI ALFRÉD: Beszámoló az 1954. decemberben Wroclawban tartott „Sztoczasztikus folyamatok” konferenciáról. (Január 6.)

VINCZE ISTVÁN ismertette Г. И. ЕГУДИН „On an effective method of calculation of the mathematical expectations of central sample moments” [Доклады Академии Наук СССР 53 (1946) 487–490] című dolgozatát. (Január 12.)

MEDGYESSY PÁL: Ismertetés a következő cikkekről: Ю. В. ПРОХОРОВ „Некоторые уточнения теоремы Ляпунова” [Известия Академии Наук СССР Сер. мат. 16 (1952) 281–292]; W. Z. SMITH „A frequency-function form of the central limit theorem” [Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 49 (1953) 462–472] és М. Н. МАРУШИНЬ „Доказательство обобщенной основной леммы С. Н. Берштейна для сумм почти независимых величин, удовлетворяющих условию Линдеберга” [Доклады Академии Наук СССР 90 (1953) 21–24]. (Január 12.)

LIPTÁK TAMÁS ismertette A. WALD „Statistical decision functions” (Wiley, New York, 1950) című könyvének egyes részeit. (Január 13. és március 14.)

RÓZSA PÁL: Egy nevezetes sztochasztikus matrixról (lásd a Mechanikai és szilárd-ságtani osztály szemináriumi előadásai között). (Január 17.)

RÉNYI ALFRÉD: Független és nem független események és valószínűségi változók. (Február 3., február 17. és február 21.)

Az előadó HINCSEIN és DÜNKIN egyes tételeinek általánosításával foglalkozott.

RÉNYI ALFRÉD: Ismertette E. TORNIER—H. DOMIZLAFF „Theorie der Versuchsvorschriften der Wahrscheinlichkeitsrechnung” (W. Kohlhammer Verlag, Stuttgart, 1952) című könyvét. (Február 7.)

PRÉKOPÁ ANDRÁS a következő problémát vetette fel: Mi annak a feltétele, hogy egy korlátlanul osztható eloszlás karakterisztikus függvényének logaritmusát előállítható legyen a következő alakban:

$$\sum_{k=1}^r c_k t^k + \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{itx} - 1 - \sum_{k=1}^{r-1} a_k x^k \right) \frac{1}{|x|^r} dK(x)$$

(Február 10.).

RÉNYI ALFRÉD: A nagy számok erős törvényéről. (Február 10.)

SZÉKELY ZOLTÁN: A termésbecslésről. (Február 10.)

PRÉKOPÁ ANDRÁS: Ismertette Б. В. ГНЕДЕНКО „Курс теории вероятностей” című könyv második kiadását (Гостехиздат, Москва, 1955). (Február 17. és február 24.)

BÉKÉSSY ANDRÁS: H. E. DANIELS „Saddlepoint approximations in statistics” [Annals of Mathematical Statistics 25 (1954) 631–651] című dolgozatának kritikai ismertetése. (Február 21. és február 28.)

SÁRKADI KÁROLY: О. В. САРМАНОВ „О функциональных моментах симметричной корреляции” [Доклады Академии Наук СССР 84 (1952) 887–890] című dolgozatának kritikája és egy ellenpélda megmutatása. (Február 21.)



RÉNYI ALFRÉD : *A matematikai kutatómunka módszereiről.* (Március 3.)

RÉNYI ALFRÉD és ZERGÉNYI ERZSÉBET : *A nagy számok erős törvényeiről.* (A Valós függvénytan oszttálya közös ülés.) (Március 7.)

Lásd az előadók hasonló című dolgozatát a *Czechoslovak Mathematical Journal*-ban (sajtó alatt).

ZERGÉNYI ERZSÉBET : J. L. DOOB „Stochastic processes” című könyve egy tételének ismertetése. (Március 10.)

RÉNYI ALFRÉD : K. L. CHUNG egy feladatáról. [*Mathematica Scandinavica* 2 (1954) 345, Problem 9.] (Március 10.)

RÉNYI ALFRÉD : *Egy Hajek-féle egyenlőtlenségről.* (Március 14.)

Lásd J. HAJEK—RÉNYI A. „Generalization of an inequality of Kolmogorov” [*Acta Mathematica* 6 (1955) 281—283] című dolgozatát.

MEDGYESSY PÁL : *Egy paramétértől függő stabilis eloszlások sűrűségfüggvényére vonatkozó parciális differenciálegyenletről.* (Március 14.)

PRÉKOPA ANDRÁS : *Sztocasztikus halmazfüggvények.* (Március 21. és március 28.) A szerző készülő kandidátusi disszertációjának ismertetése.

SARKADI KÁROLY ismertette U. GRAF und R. WARTMANN „Die Extremwertkarte bei der laufenden Fabrikationskontrolle, II.” [*Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik* (1954) 188—203] című dolgozatát. (Március 24.)

PÁL S. : *Szénszemcsés ellenállásokról.* (Lásd az Elektrotechnikai osztály szemináriumi beszámolóí közt). (Március 24.)

ARATÓ MÁTYÁS ismertette T. A. САРЫМСАКОВ „Основы теории процессов Маркова” [Государственное Издательство Техничко—Теоретической Литературы, Москва, 1954] című könyvét. (Április 7., április 25.)

BÉKÉSSY ANDRÁS—VINCZE ISTVÁN : K. L. CHUNG egy feladatáról. [*Mathematica Scandinavica* 2 (1954) 345]. (Április 11.)

TÓTH GÁBORNÉ ismertette B. B. ГНЕДЕНКО „О локальной предельной теореме для одинакового распределённых независимых слагаемых” [*Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin* (1953/1954) 287—293] című dolgozatát. (Április 14.)

FÉNYES IMRE : *A kvantummechanikáról.* (Április 18. és április 21.) Ismertető előadás.

VINCZE ISTVÁN ismertette G. ELFFVING „Convex sets in statistics” [Tolfta Skandinaviska Matematikerkongressen, Lund, 1953, pp. 34—39] című dolgozatát. (Május 30. és június 6.)

LAJOS SÁNDOR<sup>1)</sup> : *A valószínűségeloszlások félcsoporthjáról.* (Június 2.) Az előadó szakdolgozatát ismertette.

ZERGÉNYI ERZSÉBET : *A nagy számok erős törvényei.* (Június 2.) Az előadó szakdolgozatát ismertette.

TEKSE KÁLMÁN : *Integrálgeometria az euklidesi síkban, s kapcsolata a valószínűség-számítással.* (Június 6. és június 13.)

Az előadó szakdolgozatát ismertette.

TAKÁCS LAJOS : *Valószínűség-számítási módszerek alkalmazása bizonyos meteoropatológiai jelentések vizsgálatánál.* (Június 9.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát [e *Közlemények* 3 (1954) 301—320].

RÉNYI ALFRÉD : Az előadó a következő problémát vetette fel : Bizonyítandó, hogy ha az egységkörben reguláris

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (c_0 > 0, \quad c_n \geq 0)$$

függvény olyan, hogy  $|z| < 1$  esetén

<sup>1)</sup> Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet



$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(xz)}{\varphi(x)} dx = \frac{A}{1-z},$$

akkor  $\varphi(z) = e^{\frac{z}{A}}$  (június 9.).

BÉKÉSSY ANDRÁS: M. E. WISE „The incomplete beta function as a contour integral and a quickly converging series for its inverse” [*Biometrika* **37** (1950) 208—218], „A quickly convergent expansion for cumulative hypergeometric probabilities, direct and inverse” [*Biometrika* **41** (1954) 317—329] című dolgozatoknak és ezekkel kapcsolatos saját eredményeinek ismertetése. (Június 16.)

CZIPSZER JÁNOS: Megjegyzések RÉNYI ALFRÉD „A valószínűségi számítás új axiomatikus felépítése” [*A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **4** (1954) 369—428] című dolgozatához. (Október 3. és október 7.)

PALÁSTI ILONA ismertette B. EPSTEIN „Truncated life tests in the exponential case” [*Annals of Mathematical Statistics* **25** (1954) 555—564] című dolgozatát. (Október 7.)

SARKADI KÁROLY ismertette B. C. КОРОЛЮК „Асимптотические разложения для критерия согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова” [*Известия Академии Наук СССР Сер. мат.* **19** (1955) 103—124] című dolgozatát (október 7.).

RÉNYI ALFRÉD: Az előadó a következő problémát vetette fel:

Létezik-e valószínűségi változóknak olyan  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  soroza, hogy

$$M(\xi_k) = 0 \text{ és } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R(k) \log k}{k} < \infty$$

ahol  $R(k) = \sup_{1 \leq i < +\infty} |M(\xi_i \xi_{i+k})|$  és

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k}$$

nem konvergál 1 valószínűséggel? (Október 7.)

MEDGYESSY PÁL ismertette В. М. ЗОЛОТАРЕВ „Выражение плотности устойчивого распределения с показателем  $\alpha$ , большим единицы, через плотность с показателем  $1/\alpha$ ” [*Доклады Академии Наук СССР* **98** (1954) 735—738] című cikkét. (Október 10.)

CZIPSZER JÁNOS ismertette М. ЈІЋИНА „Условные вероятности на  $\sigma$ -алгебрах с счетным базисом” [*Чехословацкий Математический Журнал* **4** (1954) 372—380] című dolgozatát. (Október 10.)

RÉNYI ALFRÉD: Egy, az idegrendszer működésével kapcsolatos valószínűség-számítási problémáról. (Október 14.)

Lásd az előadónak dr. SZENTÁGOTHAJ JÁNossal együtt írt, hasonló című dolgozatát jelen kötet 83—92. oldalain.

CSÁSZÁR ÁKOS: Banach-terekről. (Október 17. és október 20.)

Ismertető előadás.

M. FRÉCHET<sup>2)</sup>: Éléments aléatoires de nature quelconque. (Tetszőleges természetű valószínűségi elemek.) (Október 20.)

Az előadás magyar nyelvű kivonatát alább közöljük.

A valószínűség-számítási munkák különféle természetű valószínűségi elemeket vizsgálnak: számokat, pontokat, függvényeket. Eddig még nem tanulmányozták rendszeresen sem a valószínűségi görbéket, sem a valószínűségi felületeket, amelyek állandóan fellépnek a természettudományi és műszaki vizsgálatokban, s amelyekre itt csak mint egy még általánosabb természetű valószínűségi elemekről alkotott fogalom példáira hivatkozunk. Nem is állt még rendelkezésre megfelelő terminológia.

Az előadás célja az volt, hogy megmutassa, hogy mit tehetünk a tetszőleges természetű valószínűségi elemek tanulmányozása érdekében.

<sup>2)</sup> Paris, Sorbonne.



**Eloszlásfüggvény.** Legyen  $X$  a tetszőleges természetű elemekből álló  $E$  halmaz véletlentől függően kiválasztott eleme.  $X$  valószínűségi törvényét egy  $p(h)$  halmazfüggvény határozza meg, amely annak a valószínűségével egyenlő, hogy  $X$  az  $E$  elemeinek egy  $h$  halmazához tartozzék. [Gyakran  $p(h)$  csak  $E$  részhalmazainak egy olyan osztályán van értelmezve, amely  $h$ -val és  $k$ -val együtt  $h + k$ -t és  $h - k$ -t is tartalmazza.]

**Metrikus tér esete.** Legyen  $X, Y, Z$  három véletlenszerűen választott eleme egy olyan  $D$  térnek, amelyben távolság van értelmezve,  $a, b, c$  pedig ugyanezen tér három rögzített eleme.<sup>3)</sup>

Tetszőleges  $\lambda \geq 1$  számra

$$\sqrt[\lambda]{\mathbf{M}(X, Y)} \leq \sqrt[\lambda]{\mathbf{M}(X, Z)} + \sqrt[\lambda]{\mathbf{M}(Z, Y)}$$

és  $\lambda \leq 1$  esetén

$$\mathbf{M}(X, Y)^\lambda \leq \mathbf{M}(X, Z)^\lambda + \mathbf{M}(Z, Y)^\lambda$$

**Tipikus helyzetek. Szórás.**  $X$   $\lambda$ -adrendű várható eltérése  $\lambda > 0$  mellett a  $\sqrt[\lambda]{\mathbf{M}(X, a)}$  kifejezés alsó határa, ha  $a$  változik. Ha ez véges, akkor  $X$   $\lambda$ -adrendben várhatóan korlátos. Ha ez az alsó határ eléretik  $a$ -nak valamely  $\gamma_\lambda$  helyzetére, akkor  $\gamma_\lambda$   $X$ -nek  $\lambda$ -adrendű tipikus helyzete ( $\gamma_2$  nem más, mint  $X$  várható helyzete,  $\gamma_1$  nem más, mint  $X$  medián-helyzete).

**Általánosítás.** Akár  $\lambda$ -adrendben várhatóan korlátos  $X$ , akár nem, legyen  $X_n \equiv X$ , ha  $(X, b) \leq n$ , és  $X_n \equiv b$ , ha  $(X, b) > n$ ; legyen továbbá  $m_n$  a  $\mathbf{M}(X_n, a)^\lambda$  kifejezés alsó határa, ha  $a$  változik. Legyen  $h_b(a) = \liminf [\mathbf{M}(X_n, a)^\lambda - m_n]$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

Ha van  $a$ -nak olyan, a  $b$ -től független helyzete, hogy  $h_b(a) = 0$ , akkor ezt a helyzetet  $X$   $\lambda$ -adrendű tipikus helyzetének nevezzük.

**Példa:** Ha  $X$  és  $Y$  az euklidesi tér két pontja,  $(X, Y) = \sqrt{\sum [x^{(k)} - y^{(k)}]^2}$ , s ha  $X$  koordinátáinak a klasszikus értelemben van várható értékük, akkor bebizonyítható, hogy  $X$ -nek az előbbi értelemben várható helyzete az, amelynek koordinátái az  $x^{(k)}$  mennyiségek várható értékei.

**Centrális helyzet.**  $X$  sztochasztikusan korlátos, ha van  $a$ -nak olyan helyzete és olyan  $\varrho > 0$  szám, hogy  $\mathbf{P}[(X, a) \leq \varrho] = 1$ . Legyen  $\varrho_a$  a  $\varrho$  lehetséges értékeinek alsó határa és  $r$  a  $\varrho_a$  mennyiség alsó határa, ha  $a$  változik:  $r$  az  $X$  változási sugara. Ha van  $a$ -nak olyan  $\tilde{X}$  helyzete, melyre  $\varrho_a = r$ , akkor  $\tilde{X}$  az  $X$  centrális helyzete.

**Sztochasztikus konvergenciák.** Az  $Y_n$  valószínűségi elemek az  $Y$  valószínűségi elemhez való konvergenciáját éppen úgy definiáljuk az összes szokásos értelemben, mint abban az esetben, amikor  $Y_n$  és  $Y$  számokat jelentenek, csupán  $|Y_n - Y|$  helyett az  $(Y_n, Y)$  távolságot kell tekinteni. A szokásos tulajdonságokat néhány részlettől eltekintve hasonlóan lehet levezetni.

**A normált vektorterek esete.** Legyen  $E$  normált vektortér a BANACH—WIENER—HAHN-féle értelemben (Banach-tér), és pedig legyen  $E$  szeparábilis. Akkor minden  $\varepsilon > 0$ -hoz van  $E$ -nek legalább egy felbontása  $\varepsilon$ -nál kisebb átmérőjű diszjunkt  $e_1, e_2, \dots$  halmazokra (amelyek az  $F$  osztályhoz tartoznak). Ha ilyen felbontás  $e_k$  halmazában megválaszthatók a  $\xi_k$  elemek, úgy, hogy a  $\sum \|\xi_k\| p(e_k)$  sor (ahol  $\|\xi_k\| = (\xi_k, 0)$ ) konvergens legyen, akkor  $\varepsilon \rightarrow 0$  esetén az  $S = \sum \xi_k p(e_k)$  elem  $E$ -nek egyértelműen meghatározott  $\tilde{X}$  eleméhez tart, amelyet  $X$  várható helyzetének nevezünk.

Ez a konstruktív definíció egyenértékű a fent megadott deskriptív definícióval, legalábbis akkor, ha  $X$  egy euklidesi térnek, vagy egy Hilbert-térnek eleme. Ezekre a terekre a nagy számok törvénye kiterjeszthető.

**Megjegyzések:** Más definíciók is találhatók a szerző *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités* című könyvének 1950-ben megjelent második kiadásában [Gautier-Villars, Paris], a 299—313. lapokon; ezek között kettő (SH. Dosstól, illetőleg E. MOURIERTől eredő) igen értékes és érdekes.

ERDŐS PÁL: *Valószínűség-számítási módszerek additív számelméleti függvények értékészletének vizsgálatára.* (Október 24.)

<sup>3)</sup> Például legyen  $a$  és  $b$  két görbeiv:  $x_k = x_k(t)$ ,  $y_k = y_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $x_k(t)$  és  $y_k(t)$  folytonos  $[0, 1]$ -ben. Legyen  $h(t)$   $[0, 1]$ -ben folytonos és növekvő függvény, s jelentse  $d_h$  a  $\sqrt{[x_k(t) - y_k(h(t))]^2}$  kifejezés maximumát  $0 \leq t \leq 1$  mellett.  $a$  és  $b$   $(a, b)$  távolságán a  $d_h$  számok alsó határát értjük változó  $h$  függvényekre vonatkozólag.



MOGYORÓDI JÓZSEF<sup>4)</sup> ismertette A. Я. ХИНЧИН „Математические методы теории массового обслуживания” [Труды Математического Института имени В. А. Стеклова 49 (1955) Москва] című könyvét. (December 2., december 9. és december 16.)

K. URBANIK<sup>5)</sup>: Теория обобщенных стохастических процессов (Disztribúciók elmélete sztochasztikus folyamatoknál.) (December 5., december 12. és december 19.)

Az előadó részletesen ismertette idevonatkozó eredményeit.

PRÉKOPA ANDRÁS: Lineáris metilszilikon-olajok átrendeződésének matematikai tárgyalása. (December 12.)

Lásd az előadónak TÖRÖK FERENCCEL együtt írt hasonló című dolgozatát jelen kötet 67—81. oldalain.

### Elektrotechnikai osztály

VÁGÓ ISTVÁN<sup>6)</sup>: Felületi hullámvezetőkkel kapcsolatos kérdésekről. (Március 4. és március 11.)

Az előadó két előadásban ismertette a felületi hullámvezetők fajtáit, gyártási problémáit, majd a hullám terjedésének ismert matematikai formuláit írta fel az úgynevezett *H-G* vezetőkre és azokon vezetett be különböző egyszerűsítéseket, közelítéseket.

PÁL SÁNDOR: Szén szemcsés ellenállásokról. (A Valószínűség-számítási osztálya közös szemináriumi ülés.) (Március 24.)

Az előadó ismertette a Híradástechnikai Kutató Intézettől kapott problémában addig elért eredményeket. Abból a feltevésből indult ki, hogy a szén szemcsék eloszlása csak véletlen ingadozásokat mutat, de nagyjából állandó sűrűséggel tölti ki a rendelkezésre álló teret. A szén szemcséket gömböknél tekintve, megoldotta egy szemcse belsejében való stacionárius áramlás problémáját akárhány érintkező szemcse esetére. Ezután összefüggést vezetett le a szén szemcsék ellenállása, (nagybani) fajlagos vezetőképessége és a térfogategységben található úgynevezett hasznos szemcseérintkezések száma között. Az előadást vita követte.

SZILVAY GÉZÁNÉ: Önindukció és kölcsönös indukció számítása mágneseződő próbatest jelenlétében. (Május 27.)

Az előadó ismertette a Központi Fizikai Kutató Intézet Ferromágneses Osztálya számára végzett számítások eredményeit. Meghatározták koncentrikusan egymásba helyezett egyrétegű tekercsek mágneseződő próbatest behelyezésekor bekövetkező önindukciós és kölcsönös indukciós együttható változását. A használt számítási módszer egyidőben teszi lehetővé mindkét indukciós együttható numerikus meghatározását.

Az előadás után TARNÓCZY TAMÁS<sup>7)</sup> elmondta, hogy a számítási eredményeket mágneseződő anyagok vizsgálatánál eredménnyel alkalmazták, majd PÁL SÁNDOR ismertetett egy hasonló problémát, melynek megoldása — a Rákosi Mátyás Művek megbízásából — folyamatban van.

FÉNYES TAMÁS: Téglalapkeresztmetszetű túlfeszültségvezetések. (Május 31.)

Az előadó jelen kötet 201—215. oldalain található cikkének eredményeit ismertette.

PÁL SÁNDOR és BOGNÁR LÁSZLÓ: Egyrétegű toroidtekercsekkel kapcsolatos matematikai vizsgálatokról. (Június 22.)

Az előadás tárgya a Beloiannis Híradástechnikai Gyár megbízásából végzett számítások, és egyéb, a témával kapcsolatos eredmények ismertetése volt. A tekercs feszültség- és árameloszlását, impedanciáját számították ki a tekercs önkapacitásának figyelembevételével. Meghatározták a rezonancia frekvenciákat, majd az eredmények érvényességi hatását állapították meg.

FÉNYES TAMÁS ismertette SCHELKUNOFF „Advanced antenna theory” [Wiley, New-York, 1952.] című könyvét. (Október 31., november 22. és december 20.)

<sup>4)</sup> Alkalmazott matematika szakos egyetemi hallgató

<sup>5)</sup> Wrocław

<sup>6)</sup> Beloiannis Híradástechnikai Gyár.

<sup>7)</sup> Központi Fizikai Kutató Intézet.



GAÁL EGON<sup>8)</sup>: Szalagtápvonalakkal kapcsolatos matematikai problémákról, I. (November 14.)

Az előadó röviden ismertette a szalagtápvonalak alkalmazási területeit és a szalagtápvonalas áramköröket, azután rátért a terjedő tér egyenleteire. Homogén dielektrikumban megoldotta a hullámforma terjedését konform leképezés segítségével, majd kiszámította az árameloszlást integrálegyenlettel. Végül rátért az inhomogén dielektrikumban való terjedés leírására, közelítő feltevésekkel. A nyert eredményeket numerikusan összehasonlította a mérések eredményeivel.

PÁL SÁNDOR: Szalagtápvonalakkal kapcsolatos matematikai problémákról, II—III. (November 29. és december 6.)

Az előadó végtelen parallel dielektromos rétegre elhelyezett vékony parallel vezetőpár elektromágneses terének vizsgálatával foglalkozott. Az elektromos és mágneses tér Fourier-integrálokkal kiszámítható volt. Kiszámította az úgynevezett terjedési együtthatót. Azután aszimptotikát dolgozott ki a megoldásnak nagy távolságban való viselkedésére, nyeregpontmódszerrel. Megállapította, hogy minden szalagtápvonalnál van egyhatárhullámhossz, melynél kisebb hosszúságú hullámoknál már sugárzás áll fenn.

CZIPSZER JÁNOS: A térbeli Dirichlet-probléma megoldása egy körlemez külsejére. (December 13.)

Az előadás előtt PÁL SÁNDOR elmondta, milyen gyakorlati feladat során vetődött fel ez a tiszta matematikai probléma. Villamosgépek homloklapján folyó örvényáramok számításánál merült fel hasonló modell, de az elért eredmények a mikrohullámú technika diafragmáinál is esetleg eredményesen alkalmazhatók.

Az előadó egészen általános modellt állított fel; keres egy függvényt, mely a körön kívül harmonikus és a végtelenben eltűnik, a körhöz felülről, illetve alulról közelítve  $h_1(x, y)$ , illetve  $h_2(x, y)$  értékeket vesz fel. Ezek a függvények legyenek folytonosak és a kör szélén egyezzenek meg. Ilyen modellre megoldotta a Dirichlet-problémát, mégpedig először csak  $\sqrt{x^2 + y^2}$ -től függő  $h_1$  és  $h_2$  esetére, majd ennek segítségével az általános esetre.

#### Numerikus és grafikus módszerek osztálya

HORVÁTH FERENC: Lineáris egyenletrendszerek grafikus megoldása. (Febr. 23.)

BÉKÉSSY ANDRÁS: Az exponenciális-integrál függvény aszimptotikus sorának maradéktagjáról. (Júl. 25.)

Az előadó az

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$$

exponenciális-integrál ismert

$$\text{Ei}(x) = \frac{e^x}{x} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{x^k} + R_n \right] \quad (x > 0)$$

aszimptotikus sorának  $R_n$  maradéktagjára a következő becsléseket adta:

1. ha  $n \leq x$ , akkor  $s = x - n - 1$  jelöléssel:

$$|R_n| < \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} \left[ e^{-x} + \frac{\pi^4}{192} + \frac{\pi^2}{8} s \right].$$

2. ha  $x \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $|x - n|$  korlátos, akkor

$$R_n = \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} \left\{ \left( s - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{x} \left[ \frac{8}{270} + \frac{s(s-1)^2}{3} \right] + O\left( \frac{1+|s|^6}{x^2} \right) \right\}.$$

Az első becslés határozott korlátot ad ugyan, de nagyon durvát, míg a második képlet alapján a hibának csak a nagyságrendjét ismerjük ugyan, viszont nagyon jó

<sup>8)</sup> Finommechanikai Vállalat.



közelítéseket kaphatunk vele. A 2. becslés lényegében azonos TH. STIELTJES egyik becslésével.

Prof. VÁCLAV PLESKOT<sup>9)</sup>: „Kürze Skizze über die Entwicklung der Nomographie” (*A nomográfia fejlődésének rövid áttekintése.*) (Október 28.)

Az előadás magyar nyelvű kivonatát alább közöljük.

Olyan grafikus táblázatokkal, amelyeket nomogramoknak tekinthetünk elszórtan már a XVIII. században találkoztunk. Jól ismert POUCHET-nak a  $z = xy$  függvényről 1795-ben megjelent szorzótáblája. Nomografikus alapelemeket már régebben is használtak. Egyenletes skálát 1350-ben használt NICOLE ORESME, sinus-skálát 1557-ben a krakkói JOANNIS VENERI; a logaritmikus skálát 1624-ben az angol EDMUND GUNTER.

A nomogram-példák száma a XIX. század elején megnövekedett. Alapvető művet írt a nomográfiáról ebben az időben LÉON LALANNE [*Mémoire sur les tables graphiques et sur la géométrie anamorphique*, Annales des Ponts et Chaussées, 1846]. LALANNE e művében olyan transzformációt mutat be, amelynek segítségével POUCHET hiperbolákból álló szorzótáblája egyenessereges nomogramba vihető át (a  $z = xy$  függvényt milliméterpapír helyett logaritmikus papíron ábrázolja). A rácsos táblának (görbesoros nomogramnak) ezt a transzformációját (Descartes-féle koordináta-rendszerben) ő „geometriai anamorfózisnak” nevezte és felismerte a nomográfiai ábrázolással kapcsolatos különös jelentőségét is.

Amikor CAUCHY LALANNE „Anamorphosis”-áról írt munkáját a Francia Akadémia elé terjesztette, kimutatta, hogy az olyan

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0$$

függvény, amely

$$(2) \quad h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 = 0$$

alakra hozható, ábrázolható három egyenesseregből álló nomogrammal. (A (2) egyenlet alakját CAUCHY-féle alaknak nevezik.) Ehhez elegendő a Descartes-féle koordináta-tengelyekre  $x$  és  $y$  egyenletes skálája helyett a  $h_1(x)$  és  $h_2(y)$  függvénysskálákat felvinnünk.

J. MASSAU találta meg annak feltételét, hogy mikor hozható egy  $F(x, y, z) = 0$  függvény a CAUCHY-féle alakra [„Mémoires sur l'intégration graphique” *Annales de l'Association des Ingenieurs sortis des Écoles spéciales de Gand*, 3. köt. Genf, 1884].

Ha a nomogram három párhuzamos egyenesseregből áll, akkor az (1) függvénynek a SAINT-ROBERT differenciálegyenletet kell kielégítenie:

$$\frac{\partial^2 \log \left( \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} \right)}{\partial x \partial y} = 0$$

[*Memoire della R. Accademia di Torino*, 1871, S. 53.].

A „hexagonális táblák” elmélete [CH. LALLEMAND, 1885. „Note” *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 102 (1886) 816] és azon feltételeknek meghatározása, hogy mikor lehet az (1) alakú függvényt tetszőleges (nemcsak koordináta-tengelyekkel párhuzamos) egyenesseregekkel ábrázolni [MASSAU: „Mémoires sur l'intégration graphique” loc. cit.], zárják le a nomográfia fejlődésének első szakaszát, amelyet nevezhetnénk a görbesoros nomogramok „korának”.

A második szakasz a francia MAURICE D'OCAGNE professzor munkájával kezdődik [„Procédé nouveau de calcul graphique” *Annales des Ponts et Chaussées*, 1884, 531. old.], amelyben a szerző a pontsoros nomogramok elvét fejti ki. D'OCAGNE ezután a nomogramok általános elméletével foglalkozik, mindenekelőtt a pontsoros nomogramokéval. Eredményeit a *Traité de Nomographie* c. könyvben foglalta össze.

Az első világháborúig az elméletet és a gyakorlatot, különösen a pontsoros nomogramokét, nagyon alaposan kidolgozták és a nomográfia az alkalmazott matematika külön ágává fejlődött.

Ebben az időszakban a legjelentősebb nomográfiai kutatónak RALPH SOREAU francia mérnököt és a kairói egyetem professzorát, J. CLARK-ot tartjuk. SOREAU vezette be a nomografikus *rendszám* fogalmát és kimutatta, hogy minden harmadrendű kapcsolat a következő három úgynevezett *kanonikus alak* valamelyikére hozható:

<sup>9)</sup> Prágai Műegyetem



$$\begin{aligned}
 f_3 &= f_1 f_2 \\
 (5) \quad f_3 &= f_1 + f_2 \\
 f_1 f_2 f_3 &= f_1 + f_2 + f_3.
 \end{aligned}$$

SOREAU bebizonyította ezenkívül, hogy minden harmadrendű kapcsolatnál végtelen sok (algebrai vagy transzcendens) anamorfózis lehetséges; negyedrendűnél már csak egyetlen egy (algebrai), ötöd- vagy hatodrendű egyenletnél pedig általában anamorfózis nem lehetséges. Ha egy ilyen kapcsolatnál mégis lehetséges lenne egy anamorfózis, akkor csak egy van és ez algebrai.

Anamorfózison értjük az (1) egyenletnek

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

alakra való hozását. Az (1) összefüggés anamorfózisának általános feltételeit 1912-ben találta meg T. H. GRONWALL [„Sur les équations entre trois variables représentables, par des nomogrammes a points alignés”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (1912) 59—112]. E feltételek azonban bonyolultságuk miatt gyakorlatilag használhatatlanok. (Szükségessé tennék ugyanis két másodrendű parciális differenciálegyenlet közös integráljának a meghatározását.) Újabb időkben e feladatot lényegesen egyszerűbben és a gyakorlat számára használhatóbban oldotta meg S. V. SZMIRNOV szovjet matematikus [Доклады Академии Наук СССР 69 (1949) 297—300].

CLARK azt találta, hogy a negyedrendű kapcsolatok a következő két alapforma valamelyikére hozhatók:

$$\begin{aligned}
 (6) \quad h_1 f_3 + h_2 g_3 + h_3 &= 0 \\
 g_1 g_2 f_3 + (g_1 + g_2) g_3 + h_3 &= 0,
 \end{aligned}$$

Megmutatja továbbá, hogy a (6) alakú kapcsolatok ábrázolhatók olyan pontsoros nomogrammal, amelynél két változó skálája ugyanazon a kúpszeleten van, vagy mindhárom változóé egy és ugyanazon a harmadfokú görbén helyezkedik el. Ez a megállapítás az (5) alapforma egyenleteire is vonatkozik.

A nomográfia fejlődésének harmadik szakaszát, amelyet körülbelül az első világháborútól kezdve számítunk, egyrészt a nomogramok lehetséges transzformációinak és gyakorlati kihasználásának tanulmányozása, másrészt az a törekvés jellemzi, hogy egy olyan általános elméletet hozzanak létre, amely a nomográfia összes ágát egységes szempontból tárgyalja.

A legismertebb kutatók, akik a transzformációk gyakorlati értelmezésével foglalkoztak. N. A. GLAGOLJEV moszkvai professzor, aki egy nomográfiai szemináriumot is tart a moszkvai egyetemen (1935), H. SCHWERDT berlini professzor (*Lehrbuch der Nomographie*, 1924) és az ugyancsak moszkvai M. V. PENTKOVSKIJ (1937). Különösen figyelemre méltó eredményeket ért el PENTKOVSKIJ a „nomogram-hálók” és „nomogram-vázak” elméletében.

A nomográfia minden ágát összefogó egységes elmélet kidolgozására irányuló törekvések közül az első sikeres kísérlet a francia WLADIMIR MARGOULIS nevéhez fűződik („Les abaques a transparent orienté ou tournant”, 1931). B. A. NYEVSKIJ ezt az elméletet lényegesen megjavította és kiegészítette (1951). Ez az elmélet a kutatókat sok probléma elé állítja, amelyek egyrészt magukkal a megoldásokkal, másrészt az elméleti eredmények értékesítésével és a nomogramok gyakorlati alkalmazásával állanak összefüggésben. Foglalkoztak a nomográfiából származó elméleti kérdésekkel a Hamburgban BLASCHKE professzor vezetése alatt működő topológiai szemináriumon is. („Geometrie der Gewebe”, 1938).

Végül szeretnék néhány megjegyzést tenni a nomográfia helyzetéről Csehszlovákiában. Itt a grafikus számításoknak (nemcsak a nomográfiának) bizonyos hagyományai vannak. ŠOLÍN professzor grafikus módszere alapján egész elméletet — az úgynevezett „grafosztatikát” dolgozott ki. Nomográfiáról már 1904-ben ír a „Karlsuniversitát” néhai professzora, VÁCLAV LÁSKA, egy bevezető tanulmányt, FRANTISEK FIALA, a műegyetem professzora pedig egy gyakorlati kézikönyvet „Bevezetés a nomografiába” címmel („Uvod do nomografie”). 1923-ban V. LÁSKA és V. HRUSKA tankönyvet írtak



a grafikus és grafikus-mechanikus számolásról („*Pocet grafický a grafickomechanický*”, 2., bővített kiadás.) A. FISCHER, a prágai Skoda-művek matematikai osztályának munkatársa, néhány jelentősebb értekezést írt (ezeket a *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* közölte). Ennek az ismertetésnek a szerzője is írt két gyakorlati kézikönyvet („*Spojnicové nomogramy*”, „*Nomografie a grafický pocet v technické praxi*”, 1947) címmel. Vannak még többen fiatalok, akik nomográfiával foglalkoznak (J. SMAHEL, M. KRIZEK stb.). A nomográfia jelenleg Csehszlovákiában sok műszaki fakultáson kötelező tantárgy (a gépgyártó fakultáson már 1921 óta), és ezért a mérnökök a nomogramokat nemcsak használni tudják, hanem egyszerűbbeket konstruálni is tudnak.

### Valós függvénytani osztály

ALEXITS GYÖRGY: *A Lip (1, p) osztály egy konstruktív függvénytani jellemzése.* (Január 7.)

Lásd az előadó „*Sur la caractérisation de certaines classes de fonctions ausens de la théorie constructive des fonctions*” [*Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 6 (1955) 41–46] című dolgozatát.

KRÁLIK DEZSŐ<sup>10)</sup>: *Törtrendű integrálok és deriváltak approximációja Fourier-sorok Fejér-féle közepével.* (Február 10.)

Lásd az előadó „*Untersuchung der Integralen und Derivierten gebrochener Ordnung mit der Methoden der konstruktiven Funktionen theorie*” [*Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 7 (1956) (sajtó alatt)] című dolgozatát.

FREY TAMÁS<sup>11)</sup>: *A BERNSTEIN-féle fordított tételek élesítése és lokalizációja* (Március 10.)

Az előadó megemlíti, hogy a BERNSTEIN-féle fordított tételek alapján a legjobb approximáció nagyságrendjéből a tekintett függvény strukturális tulajdonságaira csak annyiban következtethetünk, amennyiben a függvény által kielégített Lipschitz-feltétel kitevőjét pontosan behatárolhatjuk. Az előadó egy ennél lényegesen élesebb tételt igazolt:

Legyen  $k$  az a legkisebb egész szám, amelyre valamely  $1 < \alpha < 2$  mellett

$$\limsup n^{k-\alpha} E_n^{(T)}(f) = 0, \quad \text{de} \quad \lim n^{k-\alpha+1} E_n^{(T)}(f) > 0,$$

Ekkor

$$f^{(k-2)} \in C_{2\pi},$$

és

$$\omega_2(1/n; f^{(k-2)}) \leq \sup \left\{ \frac{4^k}{N^2} \sum_{s=1}^{N-1} s^{k-1} E_s^{(T)}(f) + N^{k-2} E_N^{(T)}(f) \right\}.$$

Néhány példán illusztrálja e tétel élességét, majd bemutatja lokalizációját is.

FREY TAMÁS: *Erdős és Turán egy sejtésének igazolása.* (Március 25.)

Az előadó igazolja, hogy az  $x_k^{(n)} \in \mathbb{N}$  normális pontesoportra támaszkodó Lagrange-és Hermite—Fejér-féle interpoláció-sorozatokra  $(-1, 1)$  bármely belső zárt részintervallumán érvényesek mindazok a pozitív tételek, amelyeket a Csebisev-alappontokra támaszkodó interpoláció-sorozatokra igazoltak. Bebizonyítja ezzel kapcsolatban ERDŐS és TURÁN sejtését, amely szerint

$$|\omega_n(x)| \leq \frac{c(\varepsilon)}{2^n} \quad -1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$$

reláció normális pontesoportok esetén érvényes.

<sup>10)</sup> Budapesti Műszaki Egyetem, III. Matematikai Tanszék.

<sup>11)</sup> Budapesti Műszaki Egyetem, IV. Matematikai Tanszék.



FREY TAMÁS: *A Korovszkij-tétel lokalizációja.* (Április 7.)

„ERDŐS és TURÁN egy sejtésének igazolása” című előbbi előadásában elhangzott tételekre és módszerekre támaszkodva az előadó igazolja, hogy ha

$$0 < \gamma \leq W(x) \quad (-1 \leq x \leq 1, \quad \gamma \text{ konstans}),$$

$$W(x) \in L[-1, 1]$$

és  $W(x) \in \text{Lip } 1$  az  $[\alpha, \beta]$  intervallumban, ahol  $-1 < \alpha < \beta < 1$ , akkor a  $W(x)$  súlyfüggvényre támaszkodó ortonormált  $\{p_n(x)\}$  polinomsorozat  $[\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon]$ -ben egyenletesen korlátos. Igazolja ezzel kapcsolatban, hogy a polinomok  $x_k^{(n)} \in \mathbb{P}$  gyökessorozatára támaszkodó Lagrange- és Hermite-Fejér-féle interpolációs polinom-sorozatokra  $[\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon]$ -ban mindazon pozitív tételek érvényesek, amelyeket Csebisev-alapponatok esetén bizonyítani tudunk.

CSIBI SÁNDOR<sup>12)</sup>: *Megjegyzések Bernstein és Zygmund approximációs tételéhez.* (Október 31.)

Lásd az előadó „Notes on Bernstein's, de la Vallée Poussin's and Zygmund's approximation theorems” [*Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt)] című dolgozatát.

CSÁSZÁR ÁKOS: „*A halmazelméleti topológia alapvonalai*” címmel heti kétórás előadásokból álló előadássorozatot tartott (November 14.-től).

### Differenciálegyenletek osztálya

RÓZSA PÁL: *Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletrendszer megoldása operátorszámítás segítségével.* (Január 3. és január 10.)

E. MOHR hasonló című cikkének [*Mathematische Nachrichten* **10** (1953) 1–49] ismertetése.

CZIPSZER JÁNOS:  $A \frac{\partial z}{\partial x} = f\left(y, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$  differenciálegyenlet megoldhatóságáról. (Január 17.)

E. BAIADA: „Considerazioni sull' esistenza della soluzione per un' equazione alle derivate parziali con i dati iniziali nel campo reale” [*Annali di Matematica Pura ed Applicata* (Bologna) **34** (1953) 1–25] című cikkének ismertetése.

RÉVAI KATALIN<sup>13)</sup>: *A Legendre-transzformáció alkalmazása a potenciálmélet kerületérték feladataira.* (Január 24.)

R. V. CHURCHILL: „The operational calculus of Legendre transforms” [*Journal of Mathematical Physics* **33** (1954) 165–178] című cikkének ismertetése.

FREUD GÉZA: *A Mathieu-féle differenciálegyenletről. II.* (Január 31.)

MEIXNER-SCHAEFKE: „*Mathieusche und Sphäroidfunktionen*” című könyvének ismertetése.

CSUKÁS ANDRÁS: *A van der Graaf-generátor elektrosztatikus terének számítása.* (Február 1.)

Külső megbízás kapcsán végzett számítások ismertetése.

BIHARI IMRE<sup>14)</sup>: *Egy másodrendű nemlineáris differenciálegyenletekre vonatkozó oszcillációs tétel.* (Február 21. és március 7.)

Az előadás tárgya MILNE egy oszcillációs tételének következő általánosítása volt: ha az  $y'' + \varphi(x)f(y)h(y') = 0$  egyenletben a  $\varphi(x)$  függvény  $x > a$  esetén pozitív, növekedő, folytonos és korlátos,  $f(y)$  páratlan, növekedő, folytonos és  $|y| \leq b$  ( $b > 0$ ) esetén eleget tesz egy Lipschitz-feltételnek,  $h(u)$  pedig  $u < 0$ -ra növekedő,  $u > 0$ -ra csökkenő pozitív folytonos függvény és minden  $u$ -ra eleget tesz egy I kitevőjű Lipschitz-feltételnek, akkor a fenti egyenletnek mindig van egy és csak egy,  $x \geq a$  esetén értel-

<sup>12)</sup> Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának ötöd éves alkalmazott matematikus szakos hallgatója.

<sup>13)</sup> Közlekedési Műszaki Egyetem, Szolnok, Matematikai Tanszék.

<sup>14)</sup> Budapesti Műszaki Egyetem, I. Matematikai tanszék.



mezett  $y(a) = \eta$ ,  $y'(a) = 0$  ( $|\eta| \leq b$ ) kezdeti feltételeket kielégítő megoldása. Ez a megoldás végtelen sokszor oszcillál, amplitúdói csökkennek, de nem tartanak zérushoz. Ha  $\varphi(x) = \text{const.}$ , akkor a megoldás periodikus. A

$$\varrho(x) = \int_0^{y(x)} \frac{t}{k(t)} dt + \varphi(x) \int_0^{y(x)} f(t) dt$$

függvény növekedő, a  $\frac{\varrho(x)}{\varphi(x)}$  függvény csökkenő.

Ha  $h(u)$  páros, továbbá  $f(y)/y$   $y < 0$ -ra növekedő,  $y > 0$ -ra csökkenő, és az  $y = 0$  hely környezetében korlátos, akkor a megoldás „félhullámai” és „negyedhullámai” területre nézve csökkennek és mindegyik a következő fölé, illetve alá forgatható bizonyos módon. A szomszédos zérushelyek távolsága, illetve a zérushelyeknek a szomszédos extrémum-helyektől való távolsága csökken, de egy pozitív korlát felett marad. A tétel alkalmas módon kiterjeszthető általánosabb másodrendű differenciálegyenletekre is.

Végül az előadó ismertette STURM tételének következő általánosítását: Ha a

$$y'' + \varphi(x) f(y) h(y') = 0 \quad \eta'' + \psi(x) f(\eta) h(\eta') = 0$$

egyenletekben  $\varphi(x) \geq \psi(x)$ , de egyetlen intervallumban sem  $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ , akkor az  $\eta(a) = y(a) = 0$ ,  $\eta'(a) \geq y'(a) > 0$  kezdeti feltételeket kielégítő megoldásokra fennáll  $\eta'(x) > y'(x)$  legalábbis  $\eta(x)$  következő maximumáig és  $\eta(x) > y(x)$  az  $y(x)$  függvény következő zérushelyéig.

FENYŐ ISTVÁN: A forgási felületekre vonatkozó Dirichlet-feladatról. (Február 28. és március 14.)

A két előadás lényegében az  $1/R$  függvény sajátértékeinek és sajátfüggvényeinek meghatározásával foglalkozik, forgásfelület esetén, ahol  $R$  jelenti a forgásfelület két tetszőleges pontjának egymástól való távolságát. Ha a két pont hengerkoordinátái  $d, \varphi, z$ , illetve  $d_1, \varphi_1, z_1$  és a szóban forgó forgásfelület egyenlete  $d = d(z)$ , akkor nyilván az  $[R(z, \varphi; z_1, \varphi_1)]^{-1}$  alakú mag sajátértékeinek és sajátfüggvényeinek meghatározásáról van szó.

Bizonyítást nyert, hogy a sajátfüggvények  $A_k(z) \begin{smallmatrix} \cos k\varphi \\ \sin k\varphi \end{smallmatrix}$  alakúak és az  $A_k(z)$  együtthatófüggvény egy

$$A_k(z) = \lambda \int T_k(z, z_1) A_k(z_1) ds_1$$

alakú sajátértékproblémának tesz eleget ( $s_1$  a görbén mért ívhosszúság). A  $T_k$  mag (egy állandó tényezőtől eltekintve) azonos a

$$\frac{Q_{2k-1}}{2} \left( \frac{r(2)^2 + r(z_1)^2 + (z - z_1)^2}{2 r(2) r(z_1)} \right),$$

függvénnyel, ahol  $Q_{(2k-1)/2}$  a másodfajú Legendre-függvény. Az előadó bebizonyította, hogy ha forgásfelületet származtató  $r = r(z)$  görbétől néhány egyszerű tulajdonságot kívánunk meg, akkor ez a mag hasonlóan viselkedik, mint a logaritmikus potenciál magja. Ennek a  $T_k$  magnak a  $\lambda_k^{(n)}$  sajátértékeiről könnyű bebizonyítani, hogy pozitívak. Ami a sajátértékek és sajátfüggvények numerikus meghatározását illeti, mindig lehetséges olyan alkalmas koordinátát bevezetni (ez természetesen az  $r = r(z)$  görbe alakjától függ), hogy az új koordináta-rendszerben a sajátfüggvény egy egyszerűen kezelhető önadjungált másodrendű differenciálegyenletnek tegyen eleget (megfelelő peremfeltételek mellett). A módszer (bizonyos módosítással) végtelenbe tartó görbékre is alkalmazható.

Az előadó a szóban forgó sajátérték- és sajátfüggvény-probléma megoldását arra használja, hogy választ adjon arra a kérdésre: milyennek kell lennie valamely forgásfelületen adott függvénynek, hogy a forgásfelületre vonatkozó Dirichlet-probléma mint egyszeres réteg potenciálja legyen megoldható az adott függvény mellett.



BIHARI IMRE: *A Belmann-lemma általánosítása és alkalmazása differenciálegyenletek unicitásproblémájára.* (Március 21.)

A kérdéses lemma a következő: Ha  $Y(x)$  és  $F(x)$  folytonos az  $x_0 < x < X_0$  intervallumban és  $k \geq 0$ ,  $M \geq 0$ , akkor az

$$Y(x) \leq k + M \int_a^x F(t) Y(t) dt \quad (x_0 < a \leq x < X)$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$Y(x) \leq k e^{M \int_a^x F(t) dt}.$$

Az állítás így hangzik:

Legyenek  $Y(x)$ ,  $F(x)$  pozitív folytonos függvények,  $x_0 < x < X_0$  és  $k \geq 0$ ,  $M \geq 0$ , továbbá  $\omega(u)$  nemnegatív, nemcsökkenő, folytonos függvény  $u \geq 0$  esetén. Ekkor az

$$Y(x) \leq k + M \int_a^x F(t) \omega(Y(t)) dt \quad (x_0 < a \leq x < X < X_0)$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$Y(x) \leq \Omega^{-1} \left( \Omega(k) + M \int_a^x F(t) dt \right) \quad (x_0 < a \leq x < X_0' < X_0),$$

ahol

$$\Omega(u) = \int_{u_0}^u \frac{dt}{\omega(t)} \quad (u_0 > 0, u \geq 0)$$

és  $\Omega^{-1}(u)$  az  $\Omega(u)$  függvény inverzét jelenti, az  $X_0'$  pedig egy alkalmas érték, melyre

$\Omega(h) + M \int_a^x F(t) dt$  az  $\Omega^{-1}(u)$  függvény értelmezési tartományában marad.

Az előadó ennek segítségével bebizonyította — némi megszorítással — az OSGOOD-, sőt a BOMPIANI—PERRON-féle unicitási tételt és korlátot adott meg az  $y' = f(x, y)$  egyenlet azonos vagy különböző kezdeti feltétellel induló megoldásai eltéréseinek az abszolút értékére  $0 < a < 1$  kitevőjű Lipschitz-feltétel (vagy más feltételek) teljesülése esetén. Megmutatta még, hogy a NAGUMOV-féle unicitási tétel az eredeti lemma felhasználásával bebizonyítható.

Az általánosított lemma — mint az eredeti is — stabilitási vizsgálatokban is igen hasznos.

BIHARI IMRE, MAKAI ENDRE<sup>15)</sup> és SZILVAY GÉZÁNÉ: *Belmann „Stability theory of differential equations” című könyvének ismertetése.* (Március 28., április 11., október 5., október 12., október 19., november 16., november 30. és december 7.)

Az ismertetés során BIHARI IMRE a következő kiegészítő megállapításokat tette: Ha a  $\frac{dy}{dt} = \mathbf{A}y$  ( $y$  vektor,  $\mathbf{A}$  matrix) egyenlet minden megoldása  $t \rightarrow +\infty$  esetén

0-hoz tart, akkor ugyanez igaz a  $\frac{dz}{dt} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}(t))z$  egyenlet minden megoldására,

feltéve, hogy  $c \int_0^t \|\mathbf{B}(t_1)\| dt_1 - at = f(t) \rightarrow -\infty$ , vagyis pl.  $\int_0^t \|\mathbf{B}(t_1)\| dt_1$  korlátos. Ha pedig

$f(t)$  korlátos  $t \rightarrow +\infty$  esetén, akkor  $\|z\|$  is az. Itt  $c > 0$  és  $a > 0$  olyan konstansokat jelentenek, hogy a  $ce^{-at}$  függvény  $\frac{dy}{dt} = \mathbf{A}y$  minden megoldásának normáját majorálja.

<sup>15)</sup> Budapesti Műszaki Egyetem, I. Matematikai Tanszék.



Hasonló megállapítás tehető a  $\frac{dy}{dt} = A(t)y$  egyenletre is, ha az  $A(t)$  matrix periodikus.

FREUD GÉZA: *Elektromos vezetők melegedéséről.* (Április 18.)

Lásd az előadó cikkét: „Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel, I.” [A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei 3 (1954) 369–394.]

BIHARI IMRE: *Spaeth egy tételének általánosításáról.* (Április 25.)

SPAETH tétele a következő: Ha  $Q(x) = O\left(\frac{1}{x^{k+2}}\right)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $h > 0$ , akkor az  $y'' + Q(x)y = 0$  egyenletnek van olyan  $y_1, y_2$  alapszeme, amelyre

$$y_1 - 1 = O\left(\frac{1}{x^k}\right), \quad y_2 - x = \begin{cases} O\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right), & \text{ha } k \neq 1, \\ O(\log x), & \text{ha } k = 1. \end{cases}$$

Az előadó bebizonyította, hogy ha  $Q(x) = O\left(\frac{1}{x^{k+2}}\right)$  és  $P''(x)$  folytonos, akkor az  $y'' + Q(x)y = P''(x)$  egyenletnek van olyan  $y_1$  és  $y_2$  megoldása, amelyre

$$y_1 - (P(x) + 1) = O\left(\frac{1}{x^k}\right), \quad y_2 - (P(x) + x) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right), & \text{ha } k \neq 1, \\ O(\log x), & \text{ha } k = 1. \end{cases}$$

FREUD GÉZA: *A Dirichlet-elvről.* (Április 25., május 9. és május 16.)

R. COURANT „Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces” című könyvének ismertetése.

FREUD GÉZA: *A Poisson-egyenlet integrálásáról.* (Május 23.)

L. MYRBERG: „Über die Integration der Poissonschen Gleichung in einem Kreis” [Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A. I. 167 (1954)] című cikkének ismertetése.

CZIPSZER JÁNOS: *Valós függvénytan vizsgálatok a hővezetés differenciálegyenletének köréből.* (Május 30., június 6., június 13. és november 23.)

Lásd az előadó cikkét: „Hővezetés végtelen rúdiban, I—II.” [A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei 3 (1954) 395–408. és jelen kötet 187–192. oldalain.]

TURÁN PÁL: *Differenciálegyenlet-rendszerek megoldásának labilitásáról.* (Június 27.) Tekintsük a stabilitáselmélet szokásos normálalakjában a

$$(1) \quad \frac{dX_v(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{vj} X_j(t) + w_v(X_1, \dots, X_n, t) \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

rendszert, melynél

$$w_v(0, \dots, 0, t) \equiv 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

úgy, hogy  $X_v(t) \equiv 0$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) az (1) rendszer megoldása. E megoldást PERRON teljesen instabilisnak nevezi, ha van olyan  $c > 0$ , hogy (1) minden olyan megoldására, melyre

$$0 < \sum_{v=1}^n |X_v(0)|^2 \leq c,$$

a megoldás vagy nem létezik minden  $t > 0$ -ra, vagy megfelelő  $t_0 > 0$ -ra



$$\sum_{\nu=1}^n |X_{\nu}(t_0)|^2 > c.$$

PERRON idevágó elégséges feltételének általánosításaképpen előadó a következő két tételt találta:

Legyen a

$$\Phi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & \dots, & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}, & \dots, & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  gyökeire

$$\min_{\nu=1, 2, \dots, n} \operatorname{Re} \lambda_{\nu} = L > 0$$

és

$$|a_{\nu j}| \leq C$$

Ekkor fennáll az

**I. tétel:** Ha valamely pozitív  $a$ -ra a

$$(2) \quad t \geq 0, \quad |y_1| \leq a, \dots, |y_n| \leq a$$

tartományban a  $w_{\nu}(y_1, \dots, y_n, t)$  függvények folytonosak, továbbá a

$$D = \max \left( 1, \frac{n \log(4C) + \log 16n}{2L} \right),$$

jelöléssel (2)-ben

$$\frac{\sum_{k=1}^n |w_k(y_2, \dots, y_n, t)|^2}{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} \leq \frac{1}{30nD^2} e^{-4nCD},$$

akkor az  $X_{\nu} \equiv 0$  megoldás teljesen instabilis.

A II. tételhez legyen  $\Delta$  olyan nagy, hogy  $\Delta > 1$  és

$$e^{2L\Delta} \geq 3n(2e(\Delta + 1))^{2n}.$$

Ekkor fennáll a

**II. tétel:** Ha a

$$t \geq 0, \quad y_1, y_2, \dots, y_n \text{ tetszőleges komplex számok}$$

feltételek által adott tartományban a  $w_k(y_1, \dots, y_n, t)$  függvények ( $k = 1, \dots, n$ ) folytonosak, és itt

$$(3) \quad \frac{\sum_{k=1}^n |w_k(y_1, \dots, y_n, t)|^2}{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} \leq \frac{1}{n^2 \{4(\Delta^2 + \Delta)\}^2} \frac{e^{-2nc(\Delta^2 + \Delta)}}{(2e(\Delta + 1))^{2n}},$$

akkor a  $t \geq 0$ -ban fekvő minden  $\Delta^2 + \Delta$  hosszú közben van olyan  $t^*$ , hogy

$$\sum_{\nu=1}^n |X_{\nu}(t^*)|^2 \geq e^{2Lt^* \left(1 - \frac{2}{\Delta+1}\right)} \sum_{\nu=1}^n |X_{\nu}(0)|^2.$$



Az utóbbi tételben a jobboldali kitevőben  $2L$  nem helyettesíthető  $(2 + \eta)L$ -el egy univerzális  $\eta > 0$ -val, és mint a  $\frac{dy}{dt} = y - y^2$ ,  $0 < y(0) < \infty$  egyenlet példája mutatja, ahol  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y = 1$ , a (3) feltétel sem enyhíthető lényegesen. (Lásd az előadó az dolgozatát: *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 257—270.)

Az előadó végül röviden rámutat a II. tétel egy érdekes algebrai konzekvenciájára.

FREUD GÉZA: *Tyihonov tételének egy kiterjesztéséről.* (Szeptember 21.)

Lásd az előadó cikkét: „Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel, I.” [*A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 369—394].

BÉKÉSSY ANDRÁS: *Airey konvergenciafaktor-módszeréről.* (Szeptember 28.)

Az előadó ismertette az exponenciális integrál aszimptotikus sorának maradéktagjára vonatkozó vizsgálatait. AIREY a maradéktagot szummációs eljárással határozta meg, de a számítás közben végzett átrendezések jogos voltát nem igazolta.

FENYŐ ISTVÁN: *A disztribúcióelmélet alkalmazása differenciálegyenletek megoldására.* (Október 26., november 2.)

Lásd az előadó cikkét jelen kötet 193—200. oldalain.

FELDMANN LÁSZLÓ<sup>16)</sup>: *A klasszikus polinomok egy jellemzéséről.* (November 9.)

Legyen  $p_0, p_1, \dots, p_n$  az  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = \lambda y$  differenciálegyenletnek rendre pontosan nullad., első-, illetve  $n$ -edfokú polinom-megoldása a  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ , illetve  $\lambda_n$  paraméterérték mellett. Ha a  $\{p_n\}$  rendszer minden elemének zérushelyei különbözők, valósak és egymást elválasztják, akkor a  $p_n(x)$  polinomok lineáris transzformációtól eltekintve vagy a Jacobi- vagy a Laguerre- vagy az Hermite-polinomok. Ebből következik, hogy az ortogonális polinom-rendszerek közül csak a Jacobi-, Laguerre- és Hermite-félék jellemezhetők másodrendű lineáris differenciálegyenlettel a szokott módon.

PÁL SÁNDOR: *A poliharmonikus differenciálegyenletekre vonatkozó Liouville-típusú tételekről.* (December 14.)

A  $\Delta_u^n(x, y, z) = 0$  ( $\Delta$  a Laplace-operátor,  $n$  természetesszám) differenciálegyenletnek minden olyan megoldása, amelyre  $|u(x, y, z)| \leq (x^2 + y^2 + z^2)^{N/2}$  ( $N \geq 0$ ) az egész térben, legfeljebb  $N$ -edfokú polinom (az  $x, y, z$  változóknban). Hasonlóan a  $(\Delta - \mathcal{I})u(x, y, z) = 0$  differenciálegyenlet ( $\mathcal{I}$  az azonosság operátora) minden megoldása, amelyre  $|u(x, y, z)| \leq (x^2 + y^2 + z^2)^{N/2}$ , legfeljebb  $N$ -edfokú polinom.

Ha  $\Delta u(x, y, z) = 0$  az egész térben teljesül és  $|u(x, y, z)| < f(z)$ , ahol

$$f(z) = \begin{cases} \frac{A}{|z|^n} & 0 < |z| \leq z_0 \\ B & |z| > z_0 \end{cases}$$

akkor  $u(x, y, z) = \text{konst.}$  Ebből következik, hogy ha az  $u(x, y, z)$  függvény a  $z > 0$  féltérben kielégíti a  $\Delta u = 0$  differenciálegyenletet, a  $z = 0$  síkon pedig a  $P \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) u = 0$  peremfeltételt ( $P$  megadott háromváltozós polinom), akkor minden  $z > 0$  helyen  $Pu = 0$ .

BOGNÁR JÁNOS: *A hullám-egyenletekre vonatkozó karakterisztikus kezdeti értékfeladat megoldása a Riemann—Martin-módszerrel.* (December 21.)

M. H. PROTTER „The characteristic initial value problem for the wave equation” [*American Mathematical Monthly* **61** (1954) 702—705] című cikkének ismertetése.

<sup>16)</sup> Budapesti Műszaki Egyetem, IV. Matematikai Tanszék.



**AZ INTÉZET MUNKATÁRSAINAK AZ INTÉZET  
MUNKÁJÁNAK EREDMÉNYEIT TARTALMAZÓ, 1955. JANUÁR 1. ÓTA  
MÁSUTT MEGJELENT VAGY SAJTÓ ALATT LEVŐ  
DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE**

**Matrix-elmélet és alkalmazásai**

- [1] EGERVÁRY J.: „A matrix-elmélet alkalmazása láncidák számítására.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **5** (1955) 301—313.
- [2] EGERVÁRY J.: „Über die iterative Auflösung von linearen homogenen diophantischen Gleichungen mit Hilfe der Matrixenrechnung.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* (sajtó alatt).
- [3] EGERVÁRY J.: „On rank-diminishing operations and solution of linear equations by finite iteration.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* (sajtó alatt).
- [4] EGERVÁRY J.—LOVASS-NAGY V.: „Tanulmány a matrix-elméletnek láncidák számításánál való alkalmazásáról.” *A Közlekedés- és Postaiügyi Minisztérium felkérésére készült és általa kiadott tanulmány.*
- [5] LOVASS-NAGY V. (SZENDY K.-lyal együtt): „Transzformátorok alapegyenleteinek felírása a matrix-számítás segítségével.” Az *Acta Technica*-hoz benyújtott angol nyelvű dolgozat magyar nyelven közlésre kerülő változata.
- [6] LOVASS-NAGY V. (BÉRES E.-vel és SZABÓ J.-sal együtt): „Ciklikus szimmetriával bíró térbeli rácsos tartók rúderöinek meghatározása hipermatrixok alkalmazásával.” Az *Acta Technica*-ban közlésre kerülő angol nyelvű dolgozat magyar nyelvű változata.
- [7] LOVASS-NAGY V.: „Investigation, by means of the matrix calculus, of the stability of a beam suspended at two points.” *Acta Technica* **13** (1956)
- [8] LOVASS-NAGY V.: „On an application of EGERVÁRY's hypermatrix-algorithm to the mathematical investigation of polyphase transformers.” *Acta Technica* (sajtó alatt).
- [9] LOVASS-NAGY V. (SZENDY K.-lyal együtt): „On the construction of the ground equations of polyphase transformers by means of the matrix calculus.” *Acta Technica* (sajtó alatt).

**Valószínűségszámítás és matematikai statisztika**

- [10] FISCHER J. (INKE G.-ral együtt): „Magvolumen mérések metodikája.” *Acta Morphologica* (sajtó alatt).
- [11] JUVAN CZ I.: „A matematikai statisztika alkalmazása.” Fejezet BÁLINT—HEGEDŰS „*Klinikai laboratóriumi diagnosztika*” [II. kiadás, Budapest, Művelt Nép, 1955.] című könyvben.
- [12] PRÉKOPA A. — RÉNYI A. (K. URBANIK-kal együtt): „Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlása bikompakt kommutatív topologikus csoportokban.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **7** (1956) 11—16.
- [13] PRÉKOPA A.: „On the convergence of sums of independent random variables.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* (sajtó alatt).
- [14] PRÉKOPA A. (LENGYEL B.-val és TÖRÖK F.-cel együtt): „Über Kinetik und Gleichgewicht der Equilibrierungsreaktion von linearen Methylpolysiloxanen.” *Zeitschrift für Physik und Chemie* (sajtó alatt).



- [15] PRÉKOPA A.: „Stochastic set functions, I.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [16] PRÉKOPA A.: „Extension of multiplicative set functions with values in a Banach algebra.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [17] PRÉKOPA A.: „Független valószínűségi változók végtelen sorainak konvergenciájáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **6** (1956) 191—198.
- [18] PRÉKOPA A.: „Banach algebrából vett értékű multiplikatív halmazfüggvények kiterjesztése.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* (sajtó alatt).
- [19] PRÉKOPA A.: „Sztocasztikus halmazfüggvények.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* (sajtó alatt).
- [20] RÉNYI A.: „On a new axiomatic theory of probability.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 285—335.
- [21] RÉNYI A. (J. HAJEKkel együtt): „Generalization of an inequality of Kolmogoroff.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 281—283.
- [22] RÉNYI A.—ZERGÉNYI E.: „On an inequality concerning uncorrelated random variables.” *Czechoslovak Mathematical Journal* (sajtó alatt).
- [23] RÉNYI A.: „Egy kombinatorikai probléma, amely lucerna nemesítésével kapcsolatban merült fel.” *Matematikai Lapok* **6** (1955) 151—165.
- [24] RÉNYI A.: *A sztochasztikus folyamatok elméletének műszaki alkalmazásáról.* Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1956.
- [25] RÉNYI A.: „A new deduction of Maxwell's law of velocity distribution.” *K. Popoff emlékkönyve*, Szófia (sajtó alatt).
- [26] RÉNYI A.: „Magyar valószínűségszámítási kutatások.” *Az 1955. évi Csehszlovák Matematikai Kongresszus Közleményei* (sajtó alatt).
- [27] RÉNYI A. (ERDŐS P.-al együtt): „On some combinatorical problems.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* (sajtó alatt).
- [28] RÉNYI A.: „On the density of certain sequences of integers.” *Publications de l'Institut Mathématique de Belgrade* **8** (1955) 157—162.
- [29] RÉNYI A.: „On conditional probability spaces generated by a dimensionally ordered set of measures.” *Теория Вероятностей и её Применения* (sajtó alatt).
- [30] RÉNYI A.: „Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung.” *Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik.* Berlin, 1956, 7—15.
- [31] RÉNYI A. (BALOGH T.-ral együtt): „Some remarks in connection with a problem proposed by H. STEINHAUS.” *Colloquium Mathematicum* (sajtó alatt).
- [32] TAKÁCS L.: „Az általános valószínűségi tételről.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **5** (1955) 467—476.
- [33] TAKÁCS L.: „Elektroncsövek anódáram ingadozásainak valószínűségszámítási tárgyalása.” *A Távközlési Kutató Intézet Közleményei* **1** (1955) 14—29.
- [34] TAKÁCS L.: *A valószínűségszámítás néhány híradástechnikai alkalmazása.* Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1955. (2850. számú jegyzet.)
- [35] TAKÁCS L.: „Rekurrens folyamatok által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatokról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **5** (1955) 187—197.
- [36] TAKÁCS L.: „On processes of happenings generated by means of a Poisson-process.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 81—99.
- [37] TAKÁCS L.: „Investigation of waiting time problems by reduction to Markov-processes.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 101—129.
- [38] TAKÁCS L.: „On a probability problem arising in the theory of counters.” *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **52** (1956) 488—498.
- [39] TAKÁCS L.: „On stochastic processes connected with certain physical recording apparatuses.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 363—380.
- [40] TAKÁCS L.: „On the sequence of events selected by a counter from a recurrent process of events.” *Теория Вероятностей и её Применения* (sajtó alatt).
- [41] TAKÁCS L. (OROSZ G.-ral együtt): „Über die Kodensysteme mit zufallsartig gewählten superponierten Kodern.” *Dokumentation* **3** (1956) 9—22.



- [42] TAKÁCS L.: „Elektronesövek anódáram ingadozásának valószínűségszámítási tárgyalásáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **6** (1956) 27—51.
- [43] TAKÁCS L.: „Valószínűségszámítási módszer a szekundér elektronemisszió vizsgálatára.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **6** (1956) 199—211.
- [44] TAKÁCS L.: „Részecskeszámlálók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatokról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* (sajtó alatt).
- [45] TAKÁCS L.: „Über die wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung der Anodentranschwankungen von Elektronenröhren.” *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [46] TAKÁCS L.: „On the general probability theorem and its applications in the theory of the stochastic processes.” *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (sajtó alatt).
- [47] TAKÁCS L.: „On secondary stochastic processes generated by recurrent processes.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **7** (1956) 17—29.
- [48] TAKÁCS L.: „On a stochastic process concerning some waiting time problem.” *Теория Вероятностей и её Применения* (sajtó alatt).
- [49] TAKÁCS L.: „On the generalization of Erlang's formula.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [50] TAKÁCS L.—ZIERMANN M.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1955. (2919. sz. szakköri füzet.)

#### Valós függvénytan

- [51] ALEXITS GY.: „Über die Konvergenz der Orthogonalpolynomentwicklungen.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 1—4.
- [52] ALEXITS GY.: „Sur la caractérisation de certaines classes de fonctions au sens de la théorie constructive des fonctions.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 41—46.
- [53] ALEXITS GY.: „Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **16** (1955) 127—130.
- [54] CSÁSZÁR Á.: „Sur une généralisation de la notion de dérivée.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **16** (1955) 137—159.
- [55] CSÁSZÁR Á.: „Sur les fonctions localement monotones au sens généralisé.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (1955) (sajtó alatt).
- [56] CSÁSZÁR Á.: „Sur la structure des espaces de probabilité conditionnelle.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 337—362.
- [57] CZIPSZER J. (GEHÉR L.-val együtt): „Extension of functions satisfying a Lipschitz condition.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 213—220.
- [58] CZIPSZER J.—RÉNYI A.: „Bizonyos trigonometrikus rendszerek teljességéről.” *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **5** (1955) 391—410.
- [59] FREUD G.: „Об односторонние  $L_1$ -приближения и их применения к теоремам тауберовского типа.” *Доклады Академии Наук СССР* **192** (1955) 689—691.
- [60] FREUD G.: „Über das gliedweise Differenzieren einer orthogonalen Polynomreihe.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 221—226.
- [61] FREUD G.: „Über differenzierte Folgen der Lagrangeschen Interpolation.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).

#### Funkcionálanalízis

- [62] PUKÁNSZKY L.: „Some examples of factors.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* (sajtó alatt).
- [63] KORÁNYI Á.: „Note on the theory of monotone operator functions.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **16** (1955) 241—245.



## Differenciál- és integrálegyenletek, függvényegyenletek

- [64] FENYŐ I.: „Beitrag zur Theorie der linearen partiellen Integralgleichungen.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **4** (1955) 98—104.  
 [65] FENYŐ I.: „A disztribúcióelmélet alapjai.” *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **6** (1956) 231—248.  
 [66] FREUD G.: *A hidrodinamika matematikai módszerei*. Mérnöki Továbbképző Intézet rendezésében 1955. május 6., 13., 21.-én megtartott előadások alapján készült jegyzet (sajtó alatt).

## Az elektrotechnika differenciálegyenletei

- [67] SZILVAY G.-né: „Tekercsek indukció- és önindukció-változásának számítása mágneseződő próbatest jelenlétében.” *A Központi Fizikai Kutató Intézet Közleményei* (sajtó alatt).

## Egyéb

- [68] RÉNYI A.: „A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle előállításában.” *Matematikai Lapok* **7** (1956) 77—100.  
 [69] SERES I.: „I. Schur egy sejtésének igazolása.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **6** (1956) 219—228.  
 [70] SZÜSZ P.: „Bemerkungen zur Approximation einer reellen Zahl durch Brüche.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 203—213.  
 [71] SZÜSZ P.: „Lösung eines Problems von Herrn Hartman.” *Studia Mathematica* **15** (1955) 43—55.  
 [72] SZÜSZ P.: „Megjegyzés valós számok Cantor-féle előállításához.” *Matematikai Lapok* (sajtó alatt).  
 [73] SZÜSZ P.: „A soreslmélet egy problémájáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* (sajtó alatt).  
 [74] SZÜSZ P.: „Über ein Problem der Reihenlehre.” (sajtó alatt).  
 [75] TAKÁCS L.: „Megjegyzés Turán Pál „A kínai matematika történetének egy problémájáról” című dolgozatához.” *Matematikai Lapok* **6** (1955) 27—29.



## INDEX

A. RÉNYI : Introduction .....	7
J. BALATONI—A. RÉNYI : Remarks on entropy .....	9
L. PÁL : Some problems concerning the slowing down of neutrons .....	41
L. TAKÁCS : On some probabilistic problems in the theory of nuclear reactors .....	55
A. PRÉKOPA—F. TÖRÖK : Mathematical treatment of the rearrangement of linear methylsilicone oils, I.....	67
A. RÉNYI—J. SZENTÁGOTHAÏ : The probability of synaptic transmission in simple models of interneuronal synapses with convergent coupling .....	83
L. TAKÁCS : On some probabilistic problems concerning the counting of particles — A note on a paper of A. Békéssy.....	93
L. TAKÁCS : On a probabilistic problem arising in some traffic investigations ...	99
J. EGERVÁRY : Old and new methods for solving linear equations .....	109
V. LOVASS-NAGY : On an application of J. Egerváry's hypermatrix algorism to the mathematical investigation of polyphase transformers.....	125
G. FREUD : Über die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips für den Kreis .....	151
GY. ADLER—G. FREUD : Sur le principe du maximum de l'équation de la chaleur, I. ....	157
GY. ADLER : Problèmes de conduction de la chaleur et de diffusion avec conditions aux limites composées, II. ....	167
J. CZIPSZER : Sur la propagation de la chaleur dans une barre infinie, II.....	185
I. FENYŐ : Bemerkungen über eine formelle Lösungsmethode von Systemen von Differentialgleichungen .....	193
T. FÉNYES : Sur un problème mathématique concernant la protection des lignes à haute tension contre la foudre.....	201
M. ARATÓ : A note on the „retardation function” .....	217
S. PÁL : Eine numerische und graphische Methode zur Konstruktion von Fluchten- tafeln und binären Leitertafeln — Mit einem Anhang von J. Czipser... ..	223
A. BÉKÉSSY—K. TÓTH : Tafel der $\overline{Ei}(x)$ Funktion .....	273
ABSTRACTS DES CONFÉRENCES TENUES AUX SÉMINAIRES DES SECTIONS DE L'INSTITUT .....	295
LISTE DES TRAVAUX DES MEMBRES DE L'INSTITUT, PUBLIÉS AILLEURS OU SOUS PRESSE .....	311



## СОДЕРЖАНИЕ

А. РЕНЬИ: Предисловие.....	5
Я. БАЛАТОНЬИ—А. РЕНЬИ: Замечания об энтропии.....	9
Л. ПАЛ: О некоторых вопросах замедления нейтронов .....	41
Л. ТАКАЧ: О некоторых теоретико-вероятностных проблемах, связанных с теорией атомных реакторов .....	55
А. ПРЕКОПА—Ф. ТЭРЭК: Математическое исследование перегруппировки линейных метилсиликоновых масел, I. ....	67
А. РЕНЬИ—Я. СЕНТАГОТАИ: Вероятность переноса раздражения в случае простой модели интернейронного синапсиса со сходящейся связью .....	83
Л. ТАКАЧ: Об одной проблеме теории вероятностей, связанной с регистрацией частиц — Замечание к работе А. Бекешши: .....	93
Л. ТАКАЧ: Об одной проблеме теории вероятностей связанной с транспортом ..	99
Е. ЭГЕРВАРИ: Старые и новые методы решения систем линейных уравнений ....	109
В. ЛОВАШ-НАДЬ: Применение гиперматричного алгоритма Е. Эгервари к математическому исследованию многофазисных трансформаторов .....	125
Г. ФРЕЙД: О применимости принципа Дирихле для круга .....	151
Дь. АДЛЕР—Г. ФРЕЙД: О принципе максимума для дифференциального уравнения теплопроводности, I. ....	157
Дь. АДЛЕР: Смешанные краевые задачи для уравнений теплопроводности и диффузии, II. ....	167
Я. ЦИПСЭР: Теплопроводность в бесконечном стержне, II. ....	185
И. ФЕНЕ: Замечания об одном формальном методе решения систем дифференциальных уравнений .....	193
Т. ФЕНЕШ: О математических проблемах, связанных с защитой трансформаторных станций от молнии .....	201
М. АРАТО: Некоторые замечания о „функции опоздания“ .....	217
Ш. ПАЛ: Графический-численный метод планирования номограмм из выравненных точек и номограмм из выравненных точек, с бинарными полями — С приложением Я. Ципсэра .....	223
А. БЕКЕШШИ—К. ТОТ: Таблицы интегральной показательной функции .....	273
Резюме докладов произнесенных на семинарах отделений Института .....	295
СПИСОК РАБОТ СОТРУДНИКОВ Института, опубликованных в других журналах или находящихся в печати .....	311



307.801

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI  
KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

I. ÉVFOLYAM, 3. FÜZET  
1956

★

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ I., ВЫПУСК 3.  
1956

★

PUBLICATIONS  
OF THE  
MATHEMATICAL INSTITUTE  
OF THE  
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME I., FASC. 3.  
1956



1956



## TARTALOMJEGYZÉK

EGERVÁRY J.: Az inverz matrix általánosítása .....	315
BRÓDY A. — RÉNYI A.: Az árrendezés problémájáról .....	325
MOGYORÓDI J. — NÉMETH G.: Atommagreaktorokban végbemenő neutronlassítás- folyamattal kapcsolatos valószínűségszámítási problémákról .....	337
PRÉKOPA A. — RÉVÉSZ P.: Lineáris metilszilikon-olajok átrendeződésének mate- matikai tárgyalása, II. ....	349
OROSZ G. — TAKÁCS L.: Szuperponált véletlen jelzeteket alkalmazó dokumentá- ciós rendszerek matematikai kérdéseiről .....	357
HEPPES A. — RÉVÉSZ P.: A latin négyzet és az ortogonális latin négyzet-pár fogal- mának egy új általánosítása és ennek felhasználása kísérletek tervezésére .....	379
ÉLTETŐ Ö.: A minta-terjedelem és csonkított minta-terjedelem alapján történő szórásbecslésről .....	391
FONTÁNYI Á. — SARKADI K. — VAS É.: Kiegészítés a „A rendezett minták elméle- tének alkalmazása a statisztikai minőségellenőrzésben” című dolgozathoz .....	399
KARDOS G.: Tömör félgömbben fellépő örvényáramvesztesség meghatározásáról .....	405
FENYŐ I.: Lineáris integrálegyenletek sajátérték nélküli magjairól .....	423
ADLER GY.: A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elvéről, II. ....	429
FREUD G.: A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elvéről, III. ....	437
KÓVÁRI T.: Kvázi-Zsukovszkij profilsorok áramlástani vizsgálata .....	447
HORVÁTH F.: Új készülék síkbeli projektív transzformáció végrehajtására .....	457



A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI  
KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

I. ÉVFOLYAM, 3. FÜZET  
1956

★

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ I., ВЫПУСК 3.  
1956

★

PUBLICATIONS  
OF THE  
MATHEMATICAL INSTITUTE  
OF THE  
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME I., FASC. 3.  
1956



1956



# A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»  
CÍMŰ KIADVÁNYSOROZAT FOLYTATÁSA

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐ: LIPTÁK TAMÁS

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET  
BUDAPEST, VI., MAGYAR IFJÚSÁG ÚTJA 31. I.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb, főként a matematika gyakorlati alkalmazásaival kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden évfolyama 4 füzetből áll, és kb. 30 nyomdai ív terjedelmű. A dolgozatok vagy magyarul jelennek meg két világnyelven frott részesletos kivonattal, vagy valamelyik világnyelven, magyar és még egy világnyelven írt kivonattal. Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük a szerkesztőséghez fordulni.

A folyóirat «A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei» című kiadványsorozat folytatása, melynek 3 kötete jelent meg [I. kötet (1952); II. kötet (1953); III. kötet (1954)].

## ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ИЗДАНИИ

«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»  
(ТРУДЫ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ)

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

ТЕХНИЧЕСКИЙ РЕДАКТОР: TAMÁS LIPTÁK

АДРЕС РЕДАКЦИИ: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
BUDAPEST, VI., MAGYAR IFJÚSÁG ÚTJA 31. I.

В ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие статьи по преимуществу связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала выходит в 4 выпусках, в 30 печатных листах приблизительно. Статьи опубликованы или на венгерском языке с подробным резюме на двух мировых языках, или на каком-то мировом языке с резюме на венгерском и каком-то другом языке. Заказы принимаются по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21.).

Текущий счет № 45-790-057-50-032. По поводу отношения обмена просим обращаться непосредственно к редакции.

Журнал является продолжением издания «A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei» от которого вышли в свет 3 тома [том I. (1952); том II. (1953); том III. (1954)].

## PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

CONTINUING THE SERIES

«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»  
(PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DE L'ACADÉMIE  
DES SCIENCES DE HONGRIE)

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITOR: TAMÁS LIPTÁK

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE  
BUDAPEST, VI. MAGYAR IFJÚSÁG ÚTJA 21

THE PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of the scientific work of the Institute and other papers, especially on the practical applications of mathematics. The journal is published quarterly, 4 issues are forming one volume, consisting of about 30 printed lists. The papers appear in Hungarian with abstracts in two world-languages or in a world-language with abstracts in Hungarian and in an other world-language. For subscription please write to the trade organization «Kultúra» (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21.). Cheque No. 45-790-057-50-032. For establishing exchange relations please write to the editor.

The journal continues the series «A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei» of which 3 volumes were published [Vol. I. (1952); Vol. II. (1953); Vol. III. (1954)].



## AZ INVERZ MATRIX ÁLTALÁNOSÍTÁSA<sup>1)</sup>

EGERVÁRY JENŐ

### Jelölések

$a, b, \dots$  oszlopvektorok

$a^*, b^*, \dots$  sorvektorok

$A, B, \dots$   $n$  sort és  $m$  oszlopot tartalmazó, „álló” téglalapalakú matrixok ( $n \geq m$ )

$A^*, B^*, \dots$   $n$  sort és  $m$  oszlopot tartalmazó, „fekvő” téglalap alakú matrixok ( $n \leq m$ )

$\overset{r}{A}, \overset{r}{B}, \dots$   $n \times m$ -edrendű és  $r$ -edrangu matrixok

$\varrho(A)$  ..... az  $A$  matrix rangja

$|A|$  ..... az  $A$  matrix determinánsa

$E$  ..... egységmatrix

Tudvalevő, hogy általában csak kvadratikus, nonszinguláris matrixok inverzéről szokás beszélni. (A matrix elemei valós vagy komplex számok.) Az  $A$  matrix inverzét az

$$AX = XA = E$$

egyenletek definiálják, s mint ismeretes, az inverz matrix létezésének szükséges és elégséges feltétele:  $|A| \neq 0$ . Felvetődik mármost a kérdés, miképpen lehet az inverz matrix fogalmát kiterjeszteni tetszőleges (téglalapalakú) matrixokra. Jelen dolgozat célja, hogy egyrészt röviden ismertesse az erre vonatkozó már ismert eredményeket, másrészt egy, az invertálandó matrix bázisfaktorokra való bontásán alapuló eljárást adjon az általánosított inverz kizárólag racionális műveletek segítségével történő explicit előállítására.

<sup>1)</sup> Jelen dolgozat a szerzőnek a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetében 1956. június 26-án elhangzott előadását tartalmazza. A dolgozat anyagának sajtó alá rendezésénél jelentős segítséget nyújtott Rózsa PÁL, melyért a szerző e helyen is köszönetet mond.



Az inverz matrix fogalmának téglalapalakú matrixokra való általánosításával kapcsolatban meg kell különböztetnünk egymástól a „fekvő”, illetve „álló” téglalapalakú matrixokat. Az előbbit jelölje  $\mathbf{B}^*$ , az utóbbit  $\mathbf{C}$ .

Ha  $\varrho(\mathbf{B}^*) = r$ , illetve  $\varrho(\mathbf{C}) = r$ , vagyis  $\mathbf{B}^*$  sorvektorai, illetve  $\mathbf{C}$  oszlopvektorai lineárisan függetlenek, akkor beszélhetünk  $\mathbf{B}^*$  *jobboldali*, illetve  $\mathbf{C}$  *baloldali* inverzéről. Ezekén olyan  $\mathbf{X}$ , illetve  $\mathbf{Y}^*$  típusú matrixokat értünk, amelyek eleget tesznek az alábbi összefüggéseknek:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{B}^* \\ r, n \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{X} \\ n, r \end{array}} & = \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{E} \\ r, r \end{array}} \\ \\ \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{Y}^* \\ r, n \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{C} \\ n, r \end{array}} & = \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{E} \\ r, r \end{array}} \end{array}$$

Az ily módon értelmezett inverz azonban — a kvadratikus matrix inverzével ellentétben — nem egyértelmű. Az irodalomban találhatók törekvések arra vonatkozóan, hogy az egyoldali inverzet valami módon egyértelművé tegyék. A. BJERHAMMAR [1] azt a módszert ajánlja, hogy az invertálandó  $\mathbf{B}^*$  matrixot egy megfelelően választott  $\mathbf{C}^*$  matrixszal egészítsük ki  $n$ -edrendű nem-szinguláris kvadratikus matrixszá. Legyen egyik ilyen kiegészítő matrix  $\mathbf{C}_1^*$ . Az ily módon kiegészített matrix reciprokát az alábbi azonosság definiálja:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^* \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix}.$$

Az itt szereplő  $\mathbf{X}$  matrix valóban eleget tesz a

$$\mathbf{B}^* \mathbf{X} = \mathbf{E}$$

összefüggésnek. A következőkben megvizsgáljuk,<sup>2)</sup> hogyan változik  $\mathbf{B}^*$  inverze, ha az őt kiegészítő  $\mathbf{C}_1^*$  matrixot egy alkalmas  $\mathbf{C}_2^*$  matrixszal helyettesítjük. Tekintsük most a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^* \\ \mathbf{C}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^* \\ \mathbf{C}_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{C}_2^* - \mathbf{C}_1^* \end{bmatrix}$$

<sup>2)</sup> A  $\mathbf{B}^*$  inverze és a kiegészítő  $\mathbf{C}^*$  közti összefüggés megállapítása RÓZSA PÁLTÓL származik.



matrix reciprokát. Könnyen belátható, hogy az, a már ismertnek tekintett  $[X \ Y]$  inverz blokkjainak a segítségével a következő patricionált alakban írható:

$$\begin{bmatrix} B^* \\ C_2^* \end{bmatrix}^{-1} = [X - Y(C_2^* Y)^{-1}(C_2^* X) \quad Y(C_2^* Y)^{-1}]$$

Innen kiolvasható, hogy ha a  $C_1^*$  és  $C_2^*$  matrixok bázisa közös, vagyis sorvektoraik ugyanazt a lineáris teret feszítik fel, akkor hozzájuk a  $B^*$  matrixnak ugyanaz az  $X$  inverze tartozik, különböző bázisúakhoz azonban különböző inverzek.

Az egyoldali inverzre kínálkozik egy geometriai megfontoláson alapuló megszerkesztési mód is. Ha az invertálandó  $B^*$  matrix  $r$ -edrangú, akkor minden, erre nem perpendikuláris  $r$ -dimenziós  $r, n$  térben egy és csakis egy olyan vektorrendszer van, amelynek a matrixa  $B^*$  jobboldali inverze.

Induljunk ki ugyanis egy tetszőleges  $M$  matrixból, amely csupán a  $|B^* M| \neq 0$  összefüggésnek tesz eleget, vagyis  $M$  oszlopvektor-tere nem perpendikuláris  $B^*$  sorvektor-terére (vagy másképpen: az  $M$  matrix oszlopvektorai által meghatározott hipersík nem merőleges a  $B^*$  sorvektorai által jellemzett hipersíkra). Bebizonyítjuk a következő tételt.

**1. tétel:** Az  $r$ -edrangú  $B^*$  matrixnak minden olyan  $r$ -dimenziós hipersíkban, amely a  $B$  sorvektorai által felfesztett hipersíkra nem perpendikuláris, egy és csakis egy jobboldali inverze van. Ha ezt a hipersíkot az  $M$  matrix oszlopvektorai feszítik fel, akkor az ezen hipersík által egyértelműen meghatározott jobboldali inverz

$$(2) \quad X = M (B^* M)^{-1}$$

alakban állítható elő.

Az, hogy (2) jobboldali inverz, triviálisan következik a

$$B^* \{ M (B^* M)^{-1} \} = E$$

azonosságból. Továbbá az, hogy több inverz az  $M$  hipersíkban nincs, következik onnan, hogy  $M$  valamennyi többi oszlopvektora  $M T$  alakban állítható elő, ahol  $|T| \neq 0$ , és

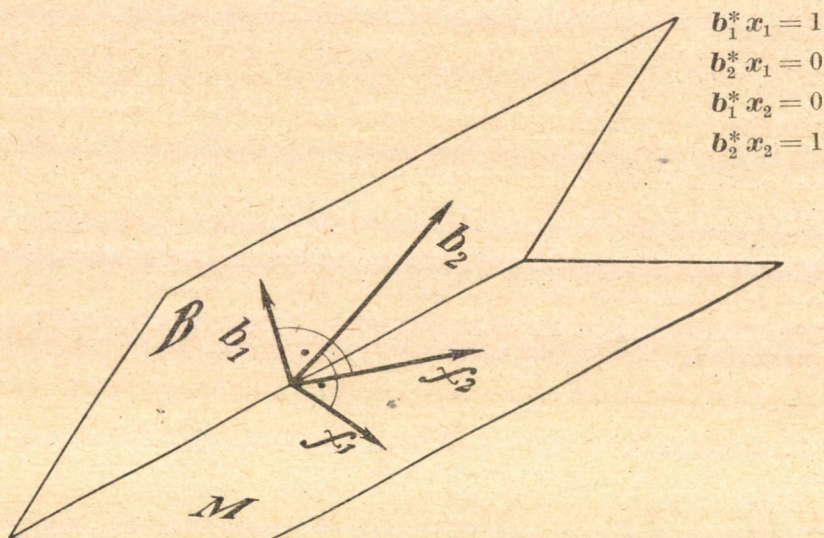
$$X = M T (B^* M T)^{-1} = M (B^* M)^{-1}$$

nem függ a  $T$  matrixtól.

A kapott eredmény geometriailag a következőképpen interpretálható:  $B^*$  lineárisan független  $b_1^*, b_2^*, \dots, b_r^*$  sorvektorai kifeszítenek egy  $r$ -dimenziós hipersíkot. Egy erre nem perpendikuláris, de egyébként tetszőleges



— az  $\mathbf{M}$  matrix oszlopai által meghatározott  $r$ -dimenziós hipersíkban keresünk olyan  $x_1, x_2, \dots, x_r$  vektorokat, amelyek eleget tesznek a  $b_i^* x_j = \delta_{ij}$  összefüggésnek. Az így nyert  $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_r]$  matrix az adott  $\mathbf{B}^*$  jobb-  
oldali inverze. A mondottak illusztrálására szolgáljon az 1. ábra, amely a  $b_1^*$  és  $b_2^*$  vektorok által kifeszített  $\mathbf{B}^*$  síkra nem merőleges  $\mathbf{M}$  síkban szemlélteti a fenti követelményeket kielégítő  $x_1$  és  $x_2$  vektorokat:



Az eddigiekben feltételeztük, hogy az invertálandó  $\mathbf{B}^*$  matrix sorai lineárisan függetlenek, azaz  $\mathbf{B}^*$  rangja  $r$ . Ekkor, mint láttuk, létezik jobb-  
oldali inverz. Ennek megfelelően a  $\mathbf{C}$  matrixnak baloldali inverze létezik.

Ezeket az (1) összefüggések definiálták. A nonsinguláris  $n$ -edrendű  $\mathbf{A}$  matrix invertálása olyan inverzet szolgáltatott, amellyel bármelyik oldalról szorozva az  $\mathbf{A}$  matrixot, az  $n$ -edrendű  $\mathbf{E}$  egységmatrixot kaptuk. A következőkben azt vizsgáljuk meg, miként lehet az inverz matrix fogalmát tetszőleges matrixokra általánosítani. Mivel az  $\mathbf{E}$  egységmatrix a  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$  egyenlet egyetlen nonsinguláris megoldása, és mivel szinguláris matrixtól nem is várható, hogy az inverzével szorozva nonsinguláris matrixot adjon, tehát az általánosított invertálás vizsgálatánál az egységmatrixnak, mint az egyetlen  $n$ -edrangú nonsinguláris projektornak a szerepét az  $n$ -dimenziós térben reáruházzuk az  $n$ -edrendű, de tetszőleges  $r$ -edrangú szinguláris projektorokra, és az általánosított invertálás esetében azt kívánjuk, hogy az adott matrix az ő inverzével bármelyik oldalról szorozva egy vele megegyező rangú projektort eredményezzen. Ez a követelmény a fenti invertálásnál automatikusan ki van elégítve. A (2) összefüggés felhasználásával ugyanis

$$\mathbf{M}(\mathbf{B}^* \mathbf{M})^{-1} \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{M}(\mathbf{B}^* \mathbf{M})^{-1} \mathbf{B}^* = \mathbf{M}(\mathbf{B}^* \mathbf{M})^{-1} \mathbf{B}^*,$$



azaz

$$(\mathbf{XB}^*)^2 = \mathbf{XB}^*$$

adódik, ahol  $\mathbf{X}$  jelenti az adott  $\mathbf{B}^*$  matrix jobboldali inverzét.

Mielőtt tetszőleges matrix inverzének a mondottak alapján történő előállítására rátérnénk, röviden rá kívánunk mutatni a projektor-matrixok néhány fontos tulajdonságára és ezek szerepére bizonyos egyenletrendszerek megoldásánál. Tekintsük a

$$(3) \quad \underset{n, n}{\overset{r}{\mathbf{P}}} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

inhomogén lineáris egyenletrendszert, amelynek együttható-matrixa  $r$ -edragu projektor. A (3) egyenletrendszer általános megoldását, mint ismeretes, a homogén egyenlet általános  $\mathbf{x}_1$  megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris  $\mathbf{x}_2$  megoldásának összege szolgáltatja. Az előbbi a projektor-matrixok

$$\underset{n, n}{\overset{r}{\mathbf{P}}} (\mathbf{E} - \mathbf{P}) = \mathbf{0}$$

definiáló egyenletének alapján

$$\mathbf{x}_1 = (\mathbf{E} - \mathbf{P}) \mathbf{t}$$

alakban kapjuk, ahol  $\mathbf{t}$  tetszőleges elemekkel bíró paramétervektor,  $\mathbf{E} - \mathbf{P}$  pedig  $(n - r)$ -edrangú projektor-matrix. Ugyanis, mivel összeg rangja nem nagyobb az egyes tagok rangjainak összegénél,

$$\varrho(\mathbf{E}) = n \leq \varrho(\mathbf{P}) + \varrho(\mathbf{E} - \mathbf{P}),$$

továbbá mivel két matrix szorzata csak akkor lehet 0, ha rangjaik összege nem nagyobb a közös rendszámánál, azaz

$$\varrho(\mathbf{P}) + \varrho(\mathbf{E} - \mathbf{P}) \leq n,$$

tehát

$$\varrho(\mathbf{E} - \mathbf{P}) = n - r.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását pedig, mivel  $\mathbf{PPx} = \mathbf{Px}$ , továbbá  $\mathbf{Px} = \mathbf{b}$  miatt

$$(4) \quad \mathbf{Pb} = \mathbf{b},$$

$\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$  szolgáltatja, a (4) egyenlet pedig egyúttal az egyenletrendszer megoldhatóságát biztosító kompatibilitási feltétel. A (3) egyenlet megoldását tehát — a (4) összefüggés teljesülése esetén —

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{P}) \mathbf{t} + \mathbf{b}$$

alakban nyerjük.



Térjünk most vissza eredeti feladatunkhoz: meghatározzuk tetszőleges  $r$ -edrangu matrix inverzét, annak a követelménynek a kihasználásával, hogy ha az adott matrixot bármelyik oldalról megszorozzuk az inverzével,  $r$ -edrangu (szinguláris) projektort kapunk. Az inverz matrixnak racionális műveletekkel való explicit előállítás az adott matrix bázisfaktorokra való bontása ([2], [3]) által válik lehetővé. Bármely matrix ugyanis — lényegében — egyértelműen felbontható olyan két tényező szorzatára, amelyek közül a baloldali balról, a jobboldali pedig jobbról invertálható. Az általánosított inverz matrix előállítására érvényes a következő tétel:

**2. tétel:** Ha az adott  $r$ -edrangu  $\overset{r}{\underset{n,m}{A}}$  matrix bázisfaktorokra bontott alakja:

$$(5) \quad \overset{r}{\underset{n,m}{A}} = \overset{r}{\underset{n,m}{A_1}} \overset{r}{\underset{n,r}{A_2^*}}$$

akkor az

$$(6) \quad \left( \overset{r}{\underset{n,m}{A}} \overset{r}{\underset{m,n}{X}} \right)^2 = \overset{r}{\underset{n,m}{A}} \overset{r}{\underset{m,n}{X}},$$

illetve

$$(6') \quad \left( \overset{r}{\underset{m,n}{X}} \overset{r}{\underset{n,m}{A}} \right)^2 = \overset{r}{\underset{m,n}{X}} \overset{r}{\underset{n,m}{A}}$$

összefüggéssel definiált  $r$ -edrangu  $\overset{r}{\underset{m,n}{X}}$  inverz matrix

$$(7) \quad \overset{r}{\underset{m,n}{X}} = \overset{r}{\underset{m,n}{Q}} \left( \overset{r}{\underset{m,r}{A_2^*}} \overset{r}{\underset{r,m}{Q}} \right)^{-1} \left( \overset{r}{\underset{r,n}{P^*}} \overset{r}{\underset{n,r}{A_1}} \right)^{-1} \overset{r}{\underset{r,n}{P^*}} = \overset{r}{\underset{m,n}{Q}} \left( \overset{r}{\underset{m,r}{P^*}} \overset{r}{\underset{r,n}{A}} \overset{r}{\underset{n,m}{Q}} \right)^{-1} \overset{r}{\underset{r,n}{P^*}}$$

alakban állítható elő, ahol  $\overset{r}{\underset{m,n}{Q}}$  és  $\overset{r}{\underset{r,n}{P^*}}$  tetszőleges, csupán az  $|\overset{r}{\underset{m,r}{A_2^*}} \overset{r}{\underset{r,m}{Q}}| \neq 0$ ,  $|\overset{r}{\underset{r,n}{P^*}} \overset{r}{\underset{n,r}{A_1}}| \neq 0$  feltételeket kielégítő matrix.

### Bizonyítás:

Legyen a keresett  $\overset{r}{\underset{m,n}{X}}$  inverz matrix bázisfaktorokra bontott alakja

$$(8) \quad \overset{r}{\underset{m,n}{X}} = \overset{r}{\underset{m,r}{X_1}} \overset{r}{\underset{r,n}{X_2^*}}.$$

Ekkor az (5) és (8) összefüggéseket behelyettesítve (6)-ba, azt kapjuk, hogy

$$\overset{r}{\underset{n,m}{A_1}} \overset{r}{\underset{m,r}{A_2^*}} \overset{r}{\underset{m,r}{X_1}} \overset{r}{\underset{r,n}{X_2^*}} \overset{r}{\underset{n,m}{A_1}} \overset{r}{\underset{m,r}{A_2^*}} \overset{r}{\underset{m,r}{X_1}} \overset{r}{\underset{r,n}{X_2^*}} = \overset{r}{\underset{n,m}{A_1}} \overset{r}{\underset{m,r}{A_2^*}} \overset{r}{\underset{m,r}{X_1}} \overset{r}{\underset{r,n}{X_2^*}}.$$

Tekintettel arra, hogy  $\overset{r}{\underset{n,r}{X_1}}$  oszlopai és  $\overset{r}{\underset{r,n}{X_2^*}}$  sorai lineárisan független vektorok,

tehát  $\overset{r}{\underset{n,r}{A_1}}$  balról,  $\overset{r}{\underset{r,n}{X_2^*}}$  pedig jobbról invertálható,

$$(9) \quad (\overset{r}{\underset{m,r}{A_2^*}} \overset{r}{\underset{m,r}{X_1}}) (\overset{r}{\underset{r,n}{X_2^*}} \overset{r}{\underset{n,m}{A_1}}) (\overset{r}{\underset{m,r}{A_2^*}} \overset{r}{\underset{m,r}{X_1}}) = \overset{r}{\underset{m,r}{A_2^*}} \overset{r}{\underset{m,r}{X_1}}$$

adódik. Hasonlóképpen, ha a (6') definiáló egyenletből indulunk ki, az

$$(9') \quad (\overset{r}{\underset{m,n}{X_2^*}} \overset{r}{\underset{n,m}{A_1}}) (\overset{r}{\underset{m,r}{A_2^*}} \overset{r}{\underset{m,r}{X_1}}) (\overset{r}{\underset{m,n}{X_2^*}} \overset{r}{\underset{n,m}{A_1}}) = \overset{r}{\underset{m,n}{X_2^*}} \overset{r}{\underset{n,m}{A_1}}$$



összefüggésre jutunk. Mivel továbbá  $A_2^* X_1$ , valamint  $X_2^* A_1$   $r$ -edrendű nonszinguláris kvadratikus matrixok, tehát a (9) és (9') összefüggésekből

$$\begin{pmatrix} X_2^* & A_1 \\ r, n & n, r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2^* & X_1 \\ r, m & m, r \end{pmatrix} = E_{r, r}$$

adódik.

Legyen

$$\begin{pmatrix} X_2^* & A_1 \\ r, n & n, r \end{pmatrix} = T_{r, r} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} A_2^* & X_1 \\ r, m & m, r \end{pmatrix} = T_{r, r}^{-1},$$

azaz

$$X_2^* (A_1 T^{-1}) = E, \quad \text{illetve} \quad (T A_2^*) X_1 = E,$$

ahol  $T$  egyelőre ismeretlen  $r$ -edrendű nem-szinguláris kvadratikus matrix. Itt  $X_2^*$  mint  $A_1 T^{-1}$  baloldali, illetve  $X_1$  mint  $T A_2^*$  jobboldali inverze, az 1. tétel alapján

$$X_2^* = (P^* A_1 T^{-1})^{-1} P^*,$$

illetve

$$X_1 = Q (T A_2^*)^{-1}$$

alakban írható fel, ahol  $P^*$  és  $Q$  tetszőleges, csupán a  $|P^* A_1| \neq 0$ , illetve  $|A_2^* Q| \neq 0$  feltételeknek eleget tevő matrixok. Ezzel a keresett inverz matrixra a (7) kifejezést kapjuk, s mint látjuk, az inverz a  $T$  matrix választásától független. Legyen  $T = E$ , ekkor  $X_2^*$  nem más, mint  $A_1$  baloldali,  $X_1$  pedig  $A_2$  jobboldali inverze.

A fenti előállítás az általánosított inverzre még távolról sem ad egyértelmű megoldást, mégpedig azért nem, mert maga az egyoldali inverz — az 1. tétel értelmében — csak annyiban egyértelmű, hogy minden olyan  $M$  hipersíkban, amely nem perpendikuláris az adott  $B^*$  matrix sorvektorai által kifeszített  $r$ -dimenziós hipersíkra, egy és csakis egy inverz létezik. Az egyoldali inverz fogalmát — és ezzel most már az általánosított inverz fogalmát is — teljesen egyértelművé tudjuk tenni, ha a fent említett  $M$  hipersíkot egybeejtjük az adott  $B$  hipersíkkal, vagyis az inverz matrixot az invertálandó matrix sajátvektor-terében keressük. Ebben az esetben az általánosított inverzre a (7) összefüggésből — mivel most  $Q = A_2$  és  $P^* = A_1^*$  — a következő kifejezést nyerjük:

$$(10) \quad X = A_2 (A_2^* A_2)^{-1} (A_1^* A_1)^{-1} A_1^* = A_2 (A_1^* A A_2)^{-1} A_1^*.$$

Az általánosított inverz matrixnak ily módon adódó speciális esete azonos azzal az R. PENROSE dolgozatában [4] szereplő inverzzel, amelyhez a szerző a következő négy feltételből kiindulva jut el:

$$\begin{aligned} AXA &= A, & (AX)^* &= AX, \\ XAX &= X, & (XA)^* &= XA. \end{aligned}$$

Az idézett dolgozatban azonban az inverz matrix megszerkesztéséhez az invertálandó matrix spektrálfelbontásának az ismerete szükséges, szem-



ben az általunk javasolt és az adott matrix bázisfaktorokra való bontásán alapuló eljárással, ami kizárólag racionális műveletek elvégzését teszi szükségessé.

Végül megmutatjuk, hogyan használható fel az általánosított inverzfogalom lineáris egyenletrendszerek megoldására. Legyen  $\overset{r}{A}x = \overset{r}{b}$  az adott egyenletrendszer. Tekintsük először az

$$\overset{r}{A}_{n,m} x_1 = 0$$

homogén egyenletet. Az inverz matrix (10) alakú előállításából közvetlenül adódik, hogy

$$\overset{r}{A}_{n,m} \overset{r}{X}_{m,n} \overset{r}{A}_{n,m} = \overset{r}{A}_{n,m}$$

(Ez az összefüggés egyébként megegyezik R. PENROSE [4] dolgozatában szereplő első feltétellel.) Ugyanezt

$$\overset{r}{A}_{n,m} \left( \overset{m-r}{E} - \overset{r}{X}_{m,n} \overset{r}{A}_{n,m} \right)$$

alakban is felírhatjuk, és mivel  $\overset{r}{X}A$   $r$ -edrangú projektor,  $E - \overset{r}{X}A$  pedig  $(m - r)$ -edrangú projektor, a (11) egyenlet általános megoldása

$$x_1 = (E - \overset{r}{X}A)t,$$

ahol  $t$  tetszőleges paramétervektor.

Az adott inhomogén egyenlet egy partikuláris  $x_2$  megoldását pedig, mivel  $\overset{r}{A} \overset{r}{X} \overset{r}{A} = \overset{r}{A}$ , és  $\overset{r}{A}x = \overset{r}{b}$  miatt

$$(12) \quad \overset{r}{A} \overset{r}{X} \overset{r}{b} = \overset{r}{b},$$

$x_2 = \overset{r}{X} \overset{r}{b}$  szolgáltatja. A (12) egyenlet egyúttal az adott egyenletrendszer megoldhatóságát biztosító kompatibilitási feltétel.

Ezzel bebizonyítottuk a tetszőleges együttható-matrixszal bíró lineáris egyenletrendszerek általános megoldásának explicit előállítására vonatkozó következő tételt:

**3. tétel:** Ha  $\overset{r}{A} = \overset{r}{A}_1 \overset{r}{A}_2^*$  az együtthatómatrix bázistényezőkre bontott alakja, akkor az általánosított inverze (a PENROSE-féle értelemben)

$$\overset{(-1)}{A}_n = \overset{r}{A}_2 \left( \overset{r}{A}_1^* \overset{r}{A} \overset{r}{A}_2 \right)^{-1} \overset{r}{A}_1^*.$$

Ha továbbá teljesül az

$$\overset{r}{A} \overset{(-1)}{A} \overset{r}{b} = \overset{r}{b}$$



kompatibilitási feltétel, akkor az

$$\underset{n, m}{\overset{r}{A}} x = b$$

inhomogén lineáris egyenletrendszer általános megoldását

$$x = (E - A^{(-1)} A) t + A^{(-1)} b$$

kifejezés szolgáltatja, ahol  $t$  tetszőleges elemű paramétervektor.

#### IRODALOM

- [1] A. BJERHAMMAR: „Rectangular reciprocal matrices, with special reference to geodetic calculations.” *Bulletin International Geodésique* (1951) 188—220.
- [2] EGERVÁRY J.: „Matrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldására.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 11—32.
- [3] E. EGERVÁRY: „Über die Faktorisierung von Matrizen und ihre Anwendung auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen.” *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 35 (1955) 111—118.
- [4] R. PENROSE: „A generalized inverse for matrices.” *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 51 (1955) 406—413.

#### ОБОБЩЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

J. EGERVÁRY

#### Резюме

Основная цель автора в настоящей работе дать такой способ нахождения обобщенной обратной матрицы, основанный на разложении данной матрицы на базисные множители ([2] [3]) который требует лишь рациональные действия. Из результата автора в качестве специального случая получается фигурирующая в работе [4] Пенрозе обобщенная обратная матрица. Работа исходит из обратимых с одной стороны матриц, для их обратных матриц дает и геометрическую интерпретацию, затем постепенно переходит к определению обобщенной обратной матрицы любой матрицы. С помощью обобщенной обратной матрицы может быть дано явное представление условия разрешимости неоднородной линейной системы уравнений и ее общего решения. К этому относится теорема 3 работы:

Если  $A = A_1 A_2^*$  есть разложенная на базисные множители форма матрицы коэффициентов, то ее обратная (в смысле Пенрозе) матрица

$$A^{(-1)} = A_2 (A_1^* A A_2)^{-1} A_1^*.$$

Если, далее, выполняется условие разрешимости

$$A A^{(-1)} b = b$$

то общее решение неоднородной линейной системы уравнений

$$A x = b$$

дается выражением

$$x = (E - A^{(-1)} A) t + A^{(-1)} b,$$

где  $t$  любой вектор параметров.



## ON A GENERALIZED INVERSE FOR MATRICES

J. EGERVÁRY

## Summary

The main purpose of the author is to give a method in this paper, founded on the basic factorisation of the given matrix, ([2], [3]), for the explicit calculation of the generalized inverse, which involves only rational operations. The result of the author contains the generalized inverse, occurring in the paper of R. PENROSE [4], as a special case. The author proceeds from matrices, invertible from one side, and gives a geometrical interpretation of the right or left inverse matrix, then he examines the generalized inverse of any matrix. By the aid of the generalized inverse, the condition of compatibility of a system of inhomogeneous linear equations, further its general solution may be given in explicit form. These are expressed in Theorem 3:

If  $A = A_1 A_2^*$  is a basic factorisation of the given matrix, then its generalized inverse (in the sense of PENROSE, and denoted by  $A^{(-1)}$ ) may be expressed explicitly

$$A^{(-1)} = A_2 (A_1^* A A_2)^{(-1)} A_1^* .$$

The system of inhomogeneous linear equations

$$Ax = b$$

is compatible if and only if

$$AA^{(-1)}b = b$$

and in this case the general solution is given by

$$x = (E - A^{(-1)}A)t + A^{(-1)}b$$

where  $t$  is a parameter-vector with arbitrary elements.



## AZ ÁRRENDEZÉS PROBLÉMÁJÁRÓL

BRÓDY ANDRÁS<sup>1)</sup> és RÉNYI ALFRÉD

### Bevezetés

Árrendszerünk különféle okok miatt (a technikai színvonal megváltozása és eltolódása, hosszantartó árrögzítés, illetőleg egyes területeken időnként végrehajtott parciális rendezés, különféle egyéb árpolitikai intézkedések stb.) nem tükrözi helyesen a népgazdaság tényleges ráfordításainak arányait. Ez, többek között, rendkívül megnehezíti a számbavétel, tervezés, gazdaságossági vizsgálat, általában a gazdasági élet felmérésének és tudatos irányításának kibontakozását is. Különösen akadályozza azonban ez a helyzet az egzakt matematikai módszerek gyakorlati alkalmazását, mivel ezek az árak reális voltát kívánják meg. Többízben felmerült már, hogy „helyesebb”, „jobb” árakat kellene kialakítani, és ezen általában azt értették, hogy az árak arányosak legyenek a vállalati önköltséggel.

Kérdés azonban, hogy ha az árak egyszer már eltorzultak, eltávolodtak a tényleges önköltségtől, akkor hogyan állítható helyre az árrendszer „egyensúlya”. Mert hiába térünk úgy át újabb árakra, hogy az új árak kiszámításának alapja a régi árak alkotta önköltség: mivel minden termék ára szerepet játszik egy sor másik termék önköltségében, az így kialakult árak ismét eltérnek majd az önköltségtől. (Itt ismét eltekintünk attól, hogy az árak megváltoztatása időben lejátszódó jelenség, és ebben az időben esetleg változik a technikai színvonal, a gyártott választék is stb., és csak egy adott pillanat helyzetét rögzítve vetjük fel a problémát.)

Kérdés az, hogy ez az eltérés (az új árak eltérése az önköltségtől) kisebb-e vagy nagyobb az árrendezés előtti eltéréstől, azaz, hogy ismételt árrendezésekkel eljutunk-e az önköltséget helyesen tükröző árakhoz — vagy pedig még jobban eltávolodunk tőlük.

A kérdés tárgyalásánál több egyszerűsítéssel, illetőleg absztrakcióval kell élnünk, ezek azonban a probléma lényegét nem érintik.

1°. Egy termék önköltségén *átlagos* önköltségét értjük. (Tehát ha több gyárban állítják elő és különböző önköltséggel, akkor az összes önköltség és a termék mennyiségének hányadosát; ugyanígy valamilyen *időszak*

<sup>1)</sup> A Magyar Tudományos Akadémia Közgazdaságtudományi Intézetének munkatársa.



átlagos önköltségét tételezzük fel. Más összefüggésekben érdekes lehet az önköltséget valószínűségi változónak tekinteni, de jelen probléma szempontjából ez nem szükséges.)

2°. Feltételezzük, hogy a termék szigorúan megadott, tehát közömbös minőségű.

3°. Elhanyagoljuk a kereslet és kínálat hatását az árakra, azaz feltételezzük, hogy kereslet és kínálat egyensúlyban van.

4°. Az objektív értékelméletből indulunk ki, azaz feltételezzük, hogy valamely áru értéke az újratermeléséhez szükséges munkával egyenlő, tehát az előállításához felhasznált holt és eleven munka összegével.

5°. A beruházások, felújítások, karbantartás, rezsi stb. megtérülését mint árszabályozó tényezőt szintén figyelemben vesszük, oly módon, hogy feltételezzük, hogy meg van adva, hogy valamely beruházásnak mennyi idő alatt kell megtérülnie.

Formailag a kérdés alábbi tárgyalása a W. LEONTIEF (lásd pl. [1] és [2]) által bevezetett, az ekonometriai irodalomban „input-output analízis” néven ismeretes és általánosan elfogadott tárgyalásmóddal azonos, és így matematikai szempontból újszerűsége nem tarthat igényt. Arra törekedtünk azonban, hogy ezt az ismert matematikai tárgyalásmódot az árrendezés bizonyos problémáira alkalmazzuk. Ezen kívül eltérünk a szokásos tárgyalásmódtól abban, hogy feltesszük, hogy az érték munkaórában fejezhető ki.<sup>2)</sup>

A 2. §-ban röviden kitérünk a tervezés bizonyos problémáira is.

### 1. §. A szukcesszív árrendezés

Legyen  $A_1, A_2, \dots, A_N$  termékeknek egy olyan összessége, amely teljes rendszert alkot, abban az értelemben, hogy bármely  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) termék előállításához szükséges összes más termék is szerepel az  $A_1, A_2, \dots, A_N$  termékek között. Minden terméknek definiáljuk (többé-kevésbé önkényesen) az egységnyi mennyiségét, amit a rövidség kedvéért „darab”-nak nevezünk. (1 „darab” nyersolaj lehet például 1 liter, 1 hektoliter; 1 „darab” rádiócső lehet például egy 100 csőből álló sorozat, de lehet 13,4 cső is.) Tegyük fel, hogy ismeretes, hogy egy „darab”  $A_i$  előállításához  $l_{ik}$  „darab”  $A_k$ -ra van szükség. Jelölje  $a_i$  az  $A_i$  termék „darab”-jának előállításához szükséges (bruttó) munkaórák számát, vagyis azt, hogy hány munkaóra fekszik egy darab  $A_i$  termékben, ha az előállításához szük-

<sup>2)</sup> Munkaórán különleges szakképzettséggel nem rendelkező munkás 1 órai munkája értendő (normál munkaóra). Magasabb szakképzettséget igénylő munka esetében 1 órai munka annyi normál munkaórának veendő, ahányszorosa az illető munkás órábéra a normál munkát végző munkás órábérének. Ez persze feltételezi a bérrendszer reális voltát.



séges egyéb termékeket (nyersanyag, áram, szén stb.) mind munkaórára számítjuk át. Jelölje  $b_i$  azt, hogy a szóbanforgó  $A_i$  termék egy egységére mennyi esik a szóbanforgó termék gyártásához szükséges beruházásból, illetve a gépi felszerelés karbantartásából, felújításokból, rezsiből stb.;  $b_i$  kiszámítását a következőképpen képzeljük el: Minden beruházásnál megállapítható, hogy mennyi idő alatt kell megtérülnie, ezután a beruházás átszámítandó munkaórákra, és elosztandó a megtérülési idő alatt terv szerint gyártandó termékekre. A felújítás, karbantartás, rezs stb. ugyanígy osztandó szét. Nyilvánvalóan fennállnak az

$$(1) \quad a_i = \sum_{k=1}^N l_{ik} a_k + m_i + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

egyenletek.<sup>3)</sup> Ha bevezetjük az  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ ,  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)$  és  $\mathbf{L} = [l_{ik}]$  jelöléseket (félkövér dűlt betű vektort, félkövér álló betű pedig matrixot jelöl), akkor (1) a következő alakra hozható:

$$(1') \quad \mathbf{a} = \mathbf{L}\mathbf{a} + \mathbf{m} + \mathbf{b}.$$

Az (1), illetve (1') egyenletrendszer megoldása útján megállapíthatók az  $a_i$  számok. Az  $a_i$  szám egy „darab”  $A_i$  termék valódi értékének tekinthető, és így egy darab  $A_i$  termék reális ára  $a_i$ -vel arányosnak volna veendő.

Az  $\mathbf{L}$  matrixról feltehető, hogy *irreducibilis*, vagyis a sorok és oszlopok átrendezésével nem hozható

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 & \mathbf{L}_3 \end{bmatrix}$$

alakra, ahol  $\mathbf{L}_1$  és  $\mathbf{L}_3$  kvadratikus matrixok, és  $\mathbf{0}$  csupa 0-ból álló matrix. Ha ugyanis  $\mathbf{L}$  ilyen alakra volna hozható, ahol  $\mathbf{L}_1$   $M$ -edrendű, ez azt jelentené, hogy az első  $M$  termék előállításához a többi termékre nincs szükség, tehát akkor az árrendezés céljából szorítkozhatnánk eleinte az első  $M$  termék ármeghatározására, és azután ezek reális árának (értékének) meghatározása után áttérhetnénk a többi  $N - M$  termék ármeghatározására.

A jelenlegi ára egy darab  $A_i$  terméknek legyen  $a_i^{(0)}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Ha  $a_i^{(0)} \neq ca_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), ahol  $c$  állandó, akkor az árrendszer irreális. Reálisabbá tételére kézenfekvő a következő *sukcesszív árrendezés*: Először is meghatározzuk a  $c$  állandónak azt az értékét, amely a

$$\sum_{i=1}^N \left( a_i^{(0)} - \sum_{k=1}^N l_{ik} a_k^{(0)} - c(m_i + b_i) \right)^2$$

kifejezést minimummá teszi. Ennek értéke nyilván:

$$(2) \quad c_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \left( a_i^{(0)} - \sum_{k=1}^N l_{ik} a_k^{(0)} \right) (m_i + b_i)}{\sum_{i=1}^N (m_i + b_i)^2}.$$

<sup>3)</sup> Az  $a_i$  és  $m_i$  számok természetesen mind pozitívak, az  $l_{ik}$  és  $b_i$  számok pedig nemnegatívak.



Legyen  $\mathbf{m}' = c_0 \mathbf{m}$  és  $\mathbf{b}' = c_0 \mathbf{b}$ , ahol  $c_0$  a (2) alatti állandó; legyen továbbá  $\mathbf{a}^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_N^{(0)})$ , és határozzuk meg az  $\mathbf{a}^{(1)}$  vektort az

$$\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{L} \mathbf{a}^{(0)} + \mathbf{m}' + \mathbf{b}'$$

összefüggésből, és általában az  $\mathbf{a}^{(n+1)} = (a_1^{(n+1)}, a_2^{(n+1)}, \dots, a_N^{(n+1)})$  vektort az

$$(3) \quad \mathbf{a}^{(n+1)} = \mathbf{L} \mathbf{a}^{(n)} + \mathbf{m}' + \mathbf{b}'$$

rekurzív összefüggés alapján. A szukcesszív árrendezés akkor eredményes, ha  $\mathbf{a}^{(n)}$  konvergál a  $c_0 \mathbf{a}$  vektorhoz, ahol  $\mathbf{a}$  az (1) megoldása,  $c_0$  pedig a (2) által definiált állandó. Ennek szükséges és elégséges feltétele, mint ismeretes (lásd például [3]-at vagy [4]-et), az, hogy az  $\mathbf{L}$  matrix összes sajátértékei abszolút értékben 1-nél kisebbek legyenek. Egy *elégséges*, de nem szükséges feltétel az iteráció konvergenciájához az, hogy teljesüljenek a

$$(4) \quad \sum_{k=1}^N l_{ik} < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

egyenlőtlenségek.

Bár a (4) feltétel nem szükséges, az egyes termékek egységének alkalmas megválasztásával mindig el lehet érni, hogy (4) teljesüljön, ha  $\mathbf{L}$  sajátértékei mind abszolút értékben 1-nél kisebbek. Ha ugyanis az  $A_i$  termék egységét módosítjuk és  $x_i$  ( $x_i > 0$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ ) régi egységet veszünk egy új egységnek, az (1) egyenletrendszer a következőképpen módosul:

$$(1'') \quad \alpha_i = \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} \alpha_k + \mu_i + \beta_i,$$

ahol  $\alpha_i = x_i a_i$ , azaz egy új „darab”  $A_i$  valódi értéke,  $\lambda_{ik} = l_{ik} x_i / x_k$ ,  $\mu_i = x_i m_i$ , azaz egy új „darab”  $A_i$  előállításához szükséges nettó munka és  $\beta_i = x_i b_i$ . A  $\mathbf{A} = [\lambda_{ik}]$  matrix sajátértékei természetesen ugyanazok, mint az  $\mathbf{L}$  matrix sajátértékei. Annak kimutatásához, hogy ha  $\mathbf{L}$  sajátértékei mind abszolút értékben 1-nél kisebbek, akkor az  $x_i$  számokat lehet úgy választani, hogy teljesüljenek a

$$\sum_{k=1}^N \lambda_{ik} < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

egyenlőtlenségek, szükségünk van FROBENIUS következő tételére (lásd: [5]): *Egy irreducibilis nemnegatív matrix legnagyobb abszolút értékű sajátértékei között van egy pozitív sajátérték, amelynek megfelelő sajátvektor koordinátái mind pozitívak.* A tételt a mi esetünkben alkalmazhatjuk, mivel az  $\mathbf{L}$  matrix irreducibilis és nemnegatív.

Ha ez a pozitív sajátérték  $q_1$ , és a hozzátartozó sajátvektor  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N)$ , akkor tehát

$$(5) \quad q_1 z_i = \sum_{k=1}^N l_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$



és így, ha  $x_k$ -nak az  $x_k = z_k$  értéket választjuk,

$$(6) \quad \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} = \varrho_1 \quad (i = 1, 2, \dots, N) .$$

Ha tehát  $\mathbf{L}$  sajátértékei mind abszolút értékben 1-nél kisebbek, az egyes termékek egységének alkalmas megválasztásával elérhetjük, hogy a módosított  $\mathbf{L}$ -matrix: a  $\mathbf{A}$  matrix sorösszegei mind 1-nél kisebbek legyenek (sőt, még azt is, hogy mind egyenlők legyenek egymással és a  $\varrho_1$  sajátértékkel).

A (4) *elégséges* feltétel tehát az egységek alkalmas megválasztása mellett *szükséges* is a szukcesszív árrendezés konvergenciájához.

Ha a termelési folyamat *rentábilis*, akkor nyilván az (1) egyenletrendszernek van csupa pozitív számból álló megoldása. Ki fogjuk mutatni, hogy ez esetben  $\varrho_1 < 1$ , vagyis a szukcesszív árrendezés mindig konvergál. E célból feltehetjük, hogy az egységeket már úgy választottuk meg, hogy (5) és (6) teljesül, vagyis egyenletrendszerünk

$$(1''') \quad \alpha_i = \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} \alpha_k + \mu_i + \beta_i$$

alakú, ahol

$$(6') \quad \sum_{k=1}^N \lambda_{ik} = \varrho_1 \quad (i = 1, 2, \dots, N) .$$

Legyen az  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  pozitív számok közül  $\alpha_{i_0}$  a minimális; nem jelenti az általánosság megszorítását, ha feltesszük, hogy  $i_0 = 1$ . Ez esetben (1''')-ból

$$\alpha_1 = \sum_{k=1}^N \lambda_{1k} \alpha_k + \mu_1 \beta_1 \geq \alpha_1 \sum_{k=1}^N \lambda_{1k} + \mu_1 \beta_1 = \alpha_1 \varrho_1 + \mu_1 \beta_1 ,$$

és így  $\alpha_1 (1 - \varrho_1) \geq \mu_1 \beta_1 > 0$ . Ez azonban csak úgy lehetséges, ha  $\varrho_1 < 1$ , mivel  $\alpha_1 > 0$ . Ezzel állításunkat bebizonyítottuk. A szukcesszív árrendezés tehát mindig konvergál.

Más kérdés persze, hogy milyen gyorsan konvergál. Minél kisebb  $\varrho_1$ , annál gyorsabb lesz a konvergencia. A konvergencia sebességét igen könnyen meg lehet becsülni. E célból be kell vezetni vektorok és matrixok normáját. Egy  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  vektor normáját többféleképpen lehet definiálni. Legcélszerűbb a következő normát választani:

$$\|\mathbf{y}\| = \max_{1 \leq k \leq N} |y_k| .$$

Ha a vektornormát így definiáljuk, akkor egy  $\mathbf{D} = [d_{ik}]$  matrix normáját a következőképpen definiáljuk:

$$\|\mathbf{D}\| = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{k=1}^N |d_{ik}| .$$



Vektorok és matrixok normájának ilyen definíciója mellett, ha újból  $\mathbf{a}^{(0)}$  jelöli a kezdőértékekből álló vektort,  $\mathbf{a}^{(n)}$  az iteráció  $n$ -edik lépésében nyert vektort,  $\mathbf{a}$  az (1') egyenletrendszernek eleget tevő vektort, továbbá  $\alpha^{(0)}$ ,  $\alpha^{(n)}$ , illetve  $\alpha$  a megfelelő vektorokat abban az esetben, ha az egyes termékek egységeit úgy definiáltuk, hogy az (1'') és (6') relációk teljesüljenek, akkor mint könnyen belátható, fennáll az

$$(7) \quad \|\mathbf{a}^{(n)} - \mathbf{a}\| \leq \left( \|\alpha^{(0)}\| + \frac{\|\mathbf{m} + \mathbf{b}\|}{1 - \|\mathbf{L}\|} \right) \|\mathbf{L}\|^n$$

egyenlőtlenség (lásd például: [4], 122. oldal). Feltéve, hogy az egységeket úgy választottuk meg, hogy az (1'') és (6') összefüggések teljesüljenek,  $\|\mathbf{L}\| = \varrho_1$ , tehát (7)-ből az

$$(7') \quad \|\alpha^{(n)} - \alpha\| \leq \left( \|\alpha^{(0)}\| + \frac{\|\mu + \beta\|}{1 - \varrho_1} \right) \varrho_1^n$$

egyenlőtlenséget nyerjük.

Visszatérve az  $\mathbf{a}^{(n)}$  és  $\mathbf{a}$  vektorokra, azt kapjuk, hogy

$$(8) \quad \|\mathbf{a}^{(n)} - \mathbf{a}\| \leq C \varrho_1^n,$$

ahol a  $C$  állandó értéke a következő:

$$C = \left( \|\mathbf{a}^{(0)}\| + \frac{\|\mathbf{m} + \mathbf{b}\|}{1 - \varrho_1} \right) \frac{A}{B},$$

ahol

$$A = \max_{1 \leq k \leq N} z_k \quad \text{és} \quad B = \min_{1 \leq k \leq N} z_k.$$

Itt  $z_1, z_2, \dots, z_N$  a (4) egyenletrendszer megoldását jelöli.

Látjuk tehát, hogy az iteráció konvergenciájának sebességét  $\varrho_1$  értékétől függően tudjuk megbecsülni; ha  $\varrho_1$  kicsiny, a konvergencia igen gyors.

Rendkívül érdekes a termelési folyamat hatásfokának a fentiekből adódó megfogalmazása is, mivel rámutat a hatásfok valódi — áráktól független — mélyebb értelmezésére, és megdönti azt a nézetet, hogy minden termelési folyamat rentábilisnak tekinthető megfelelő árak mellett. A fentiek alapján könnyű ellenpéldát konstruálni: tegyük fel, hogy  $x$  KWó áram előállításához két tonna szén kell, egy tonna szén kibányászásához pedig  $x$  KWó áram. Ez a termelési folyamat semmilyen ár mellett sem rentábilis, mert akárhogy határozzuk meg az egyik termék árát, a másik termék ára mindig ennek duplája lesz — és a szukcesszív árrendezések esetén az árrendszer divergál. Ennek alapján állíthatjuk, hogy  $1/\varrho_1$ -gyel bizonyos fokig jellemezhetjük a zárt rendszer hatásfokát: minél nagyobb  $1/\varrho_1$ , annál jobb hatásfokú a vizsgált termelési rendszer.

## 2. §. A tervezés bizonyos problémáiról

A fentiekben tárgyalt matematikai eljárás más gazdasági problémák megoldásánál is felhasználható, például a tervezés problémájánál. (Lásd például: [6]). Jelölje  $q_i$  az  $A_i$  termékből az országban összesen termelt



mennyiséget egy adott időpontban (a választott egységben kifejezve). Ha  $f_i$  jelöli azt, hogy az  $A_i$  termékből mennyi kerül közvetlen felhasználásra („fogyasztásra”),  $e_i$  azt, hogy mennyit exportál az ország (az importot itt mint negatív exportot vesszük figyelembe), akkor nyilván fennállnak a következő egyenletek :

$$(9) \quad q_i = \sum_{k=1}^N l_{ki} q_k + f_i + e_i .$$

Ugyanis egy egységnyi  $A_k$  termék előállításához  $l_{ki}$  „darab”  $A_i$  termékre van szükség, vagyis a termelt  $A_i$ -termékekből

$$\sum_{k=1}^N l_{ki} q_k$$

mennyiség más termékek termelésénél kerül felhasználásra,  $f_i$  mennyiség fogyasztásra,  $e_i$  pedig exportálásra kerül. Bevezetve a  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ ,  $\mathbf{h}_i = f_i + e_i$ ,  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_N)$  jelöléseket, (9) a következő alakra hozható :

$$(9') \quad \mathbf{q} = \mathbf{L}^* \mathbf{q} + \mathbf{h} .$$

A (9') egyenletben szereplő  $\mathbf{L}^*$  matrix az (1')-ben szereplő  $\mathbf{L}$  matrix *transzponáltja*, amelynek sajátértékei természetesen azonosak  $\mathbf{L}$  sajátértékeivel. Ebből következik, hogy a (9') egyenletrendszer is meg lehet iterációval oldani. Ha tehát ki akarjuk például számítani a népgazdaság fejlesztési tervének kidolgozása céljából, hogy mennyivel kell növelni az egyes  $A_i$  termékek globális termelését ahhoz, hogy a fogyasztásra, illetve exportra kerülő termékek mennyisége előírt módon megnövekedjék, vagyis, ha a  $\mathbf{h}$  vektort egy  $\mathbf{h}'$  vektorral pótoljuk, akkor, bevezetve a  $\mathbf{q}^{(0)} = \mathbf{q}$  jelölést, a módosított termelési terv meghatározását a következő iterációs eljárással végezhetjük el : kiszámítjuk egymás után a

$$(10) \quad \mathbf{q}^{(n+1)} = \mathbf{L}^* \mathbf{q}^{(n)} + \mathbf{h}' \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

vektorokat ; ha  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{q}^{(n)}$  konvergál a keresett  $\mathbf{q}'$  vektorhoz.

Megjegyzendő, hogy a (9') egyenletrendszerből önmagában ((1') figyelembevétele nélkül) olyan módon, mint azt (1') esetében tettük, nem mindig lehet arra következtetni, hogy  $\mathbf{L}^*$  összes sajátértékei abszolút értékben 1-nél kisebbek ; ugyanis a fentebb alkalmazott meggondolás csak akkor alkalmazható, ha a  $\mathbf{h}$  vektor elemei pozitívak. Ha tehát van a vizsgált termékrendszerben olyan  $A_i$  termék, amelyre  $h_i < 0$ , vagyis amelyre  $f_i + e_i < 0$ , tehát amelyből többet importálunk, mint amennyi piacra kerül (vagyis az importból fedezzük a teljes belföldi fogyasztást, és ezenkívül az import egy része más termékek előállítására lesz felhasználva), akkor (9')-ből közvetlenül nem látható be, hogy  $\mathbf{L}^*$  sajátértékei abszolút értékben 1-nél kisebbek, és így az sem látható be ilyen módon, hogy a (10) iteráció konvergál. Mivel azonban az  $\mathbf{L}^*$  matrix (1')-nek is eleget tesz,



tehát az említett feltétel mindig teljesül, és így a (10) iteráció is mindig konvergál, még akkor is, ha a  $h_i$  számok között negatívak is előfordulnak.

Végül hasonlítsuk össze az általunk követett tárgyalásmódot a LEONTIEF-félével (lásd: [1]). Az alapvető eltérés abban áll, hogy mi munkaórákban, illetve termelt árumennyiségben számoltunk, míg LEONTIEF pénzre számolt át minden előforduló mennyiséget. Ennek megfelelően nála (9) helyett a

$$(IX) \quad Q_i = \sum_{k=1}^N L_{ki} Q_k + F_i + E_i$$

egyenletrendszer szerepel, ahol  $Q_i$  az  $A_i$  termékből összesen termelt mennyiség pénzértékét jelöli, ennek megfelelően  $F_i$ , illetve  $E_i$  az  $A_i$  termékből fogyasztásra, illetve exportra kerülő mennyiség pénzben kifejezett értékét jelölik; az  $L_{ik}$  együttható azt adja meg, hogy 1 pénzegység értékű  $A_k$  termékre van szükség. Az  $L_{ik}$  együtthatók az (1)-ben illetve (9)-ben szereplő  $l_{ik}$  együtthatókkal a következőképpen függnek össze:

$$(11) \quad L_{ik} = \frac{l_{ik} \alpha_k}{\alpha_i},$$

ahol  $\alpha_i$  az  $A_i$  termék egységének ára, pénzegységben kifejezve. Ugyanis 1 pénzegységnyi  $A_i$  termék  $1/\alpha_i$  egységet tartalmaz, ennek előállításához  $l_{ik}/\alpha_i$  egység kell az  $A_k$  termékből, és ennek pénzértéke  $l_{ik} \alpha_k / \alpha_i$ . Nyilvánvaló, hogy  $Q = q_i \alpha_i$ ,  $F_i = f_i \alpha_i$ ,  $E_i = e_i \alpha_i$  és  $L_{ki} = l_{ki} \alpha_i / \alpha_k$  helyettesítéssel (IX) átmegy (9)-be.

A különbség (9) és (IX) között tehát csak jelölésbeli. Az (1') egyenletrendszer LEONTIEF-nél az

$$(I) \quad \alpha_i = \sum_{k=1}^N l_{ik} \alpha_k + m_i o_i + \pi_i$$

alakban szerepel, ahol  $\alpha_i$  jelöli az  $A_i$  termék egy egységének pénzegységben kifejezett árát,  $m_i$  az  $A_i$  termék egy egységének előállításához szükséges (nettó) normál munkaórák számát,  $o_i$  egy normál munkaóra órabérét (a munka »árát«) az illető iparágban és  $\pi_i$  az egy egységnyi  $A_i$  termékre eső profitot. LEONTIEF az (I) egyenletrendszert természetesen más gyakorlati célból vizsgálja. Az (I) egyenletrendszer ugyanis lehetővé teszi a következő kérdések megválaszolását:

Vizsgáljuk a következő három adatsorozatot (vektort):

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \text{ (bérek), } o = (o_1, o_2, \dots, o_N) \text{ (árak)}$$

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N) \text{ (profitráták).}$$

Ha e három adatsor közül kettő adott, a harmadik (I) alapján meghatározható, és így az (I) egyenletrendszer módot ad ezen kapcsolt adatsorok összefüggéseinek vizsgálatára és megváltozásuk hatásának előrelátásra.

(Beérkezett: 1956. VII. 29.)



IRODALOM

- [1] W. LEONTIEF : „Structural matrices of national economy.“ *Econometrica* **17** (1949) 273—282.
- [2] W. LEONTIEF AND OTHERS : *Studies in the structure of the American economy*. Oxford University Press, New York, 1953.
- [3] W. SCHMEIDLER : *Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1949. (p. 86.)
- [4] В. Н. ФАДЕЕВА : *Вычислительные методы линейной алгебры*. Гостехиздат, Москва, 1950. (p. 121.)
- [5] Ф. Р. ГАНТМАХЕР : *Теория матриц*. Гостехиздат, Москва, 1953. (p. 323.)
- [6] F. BURCKHARDT : »Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik in der Wirtschaft.« *Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik (Berlin)* (1956) 65—72.

О ПРОБЛЕМЕ РЕГУЛИРОВАНИЯ ЦЕН

A. BRÓDY и A. RÉNYI

Резюме

Цель работы — применять известный метод „input—output model“ от LEONTIEF к некоторыми проблемами регулирования цен.

Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_N$  есть такая совокупность изделий, которая является *полной системой* в том смысле, что все изделия, нужные для изготовления изделия  $A_k$ , фигурируют среди изделий  $A_1, A_2, \dots, A_N$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Для каждого изделия определяется единичное количество. Предположим, что для изготовления единичного количества  $A_i$  нужно  $l_{ik}$  единиц изделий  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) и  $m_i$  рабочих часов фактической работы. Пусть  $b_i$  означает возвращение вложения (выраженная в рабочих часов) падающая на единицы изделия  $A_i$ . Пусть  $a_i$  обозначает всю работу, нужную для производства единичного количества изделия  $A_i$ , в том смысле, что все другие изделия, нужные для изготовления  $A_i$ , перечисляются на рабочие часы. Введя обозначения  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ ,  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)$  и  $\mathbf{L} = [l_{ik}]$ , очевидно, имеет место система уравнений

$$(1) \quad \mathbf{a} = \mathbf{L} \mathbf{a} + \mathbf{m} + \mathbf{b}.$$

Если другие точки зрения не принимаются во внимание, то, обозначая цену изделия  $A_i$  через  $a_i^{(0)}$  целесообразно, чтобы было  $a_i^{(0)} = c a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) где  $c > 0$  постоянно. Если это условие не выполняется, то естественно произвести последовательное регулирование цен следующим образом : определяем значение  $c = c_0$ , при котором выражение

$$\sum_{i=1}^N \left( a_i^{(0)} - \sum_{k=1}^N l_{ik} a_k^{(0)} - c(m_i + b_i) \right)^2$$

принимает свое наименьшее значение и с помощью рекурсивного соотношения

$$(3) \quad \mathbf{a}^{(n+1)} = \mathbf{L} \mathbf{a}^{(n)} + c_0 (\mathbf{m} + \mathbf{b}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$



вычисляем векторы  $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots$ . Спрашивается, стремится ли  $a^{(n)}$  к  $c_0 a$ , где  $a$  вектор, удовлетворяющий системе уравнений (1).

Как хорошо известно (см., например, [3], [4]), для этого необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы  $L$  были по абсолютной величине меньше чем 1. Авторы показывают, что предполагая неприводимость матрицы  $L$ , что не является уменьшением общности, так как означает, что из изделий  $A_1, A_2, \dots, A_N$  не может быть выбрана полная система изделий с меньшим числом элементов, из предположения, что  $m_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) и все компоненты вектора  $a$ , решающего систему уравнений (1), также положительны ( $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, N$ ), что также является естественным предположением, в силу одной теоремы Фробениуса (см., например, [5]), следует, что все собственные значения матрицы  $L$  по абсолютной величине меньше чем 1 и поэтому  $a^{(n)} \rightarrow c_0 a$ , при  $n \rightarrow \infty$ . Быстрота сходимости зависит от наибольшего по абсолютной величине положительного корня матрицы  $L$ ; его обратная величина характеризует эффективность исследуемой системы производства.

## ON THE REGULATION OF PRICES

A. BRÓDY and A. RÉNYI

### Summary

The paper aims at applying the well-known input-output model of LEONTIEF to some problems of price regulation.

Let  $A_1, A_2, \dots, A_N$  be a set of goods, forming a closed system in the following sense: every good, necessary for the production of any of the goods considered is also contained in the same set of goods. We define some unit of each of the goods. Let us suppose that for the production of a unit of  $A_i$   $l_{ik}$  units of  $A_k$  are necessary, further  $m_i$  hours of effective work are needed. Let  $b_i$  denote the return of investment falling on a unit of  $A_i$ , the investment being also converted into working hours. Let  $a_i$  denote the total amount of work (counted in hours of work of an unskilled worker hours of skilled workers being taken into account with corresponding weights) necessary for the production of one unit of  $A_i$  in the sense that every other good necessary for the production of one unit of  $A_i$  (including return of investment) is expressed in working hours. Putting  $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ ,  $m = (m_1, m_2, \dots, m_N)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)$  and  $L = [l_{ik}]$  we have clearly

$$a = La + m + b.$$

If other points of view are not taken into account, the price of one unit of  $A_i$  should be proportional to  $a_i$ . If the actual price of one unit of  $A_i$  is denoted by  $a_i^{(0)}$ , and  $a_i^{(0)} = ca_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) with a constant  $c$  does not hold, we may think to coming nearer to the mentioned ideal situation, by effecting the following successive regulation of prices. We determine the value  $c_0$  of  $c$  so as to minimize the expression

$$\sum_{i=1}^N \left( a_i^{(0)} - \sum_{k=1}^N l_{ik} a_k^{(0)} - c(m_i + b_i) \right)^2.$$

After this we determine the vectors  $a^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_N^{(n)})$ , by the following recursion:

$$(3) \quad a^{(n+1)} = La^{(n)} + c_0(m + b).$$

The question arises whether  $a^{(n)}$  converges to  $c_0 a$  or not. The necessary and sufficient condition thereof is — as well known — (see e. g. [3] or [4]) that all eigenvalues of the matrix  $L$  should lie in the interior of the unit circle. It is shown in the paper, by using a theorem of FROBENIUS (see e. g. [5]) that under some quite natural suppositions this condition is always satisfied. The suppositions are as follows: 1° The matrix  $L$  should be irreducible, which means simply, that the set  $A_1, A_2, \dots, A_N$  does not contain a closed subset in the sense defined above; 2° the numbers  $m_i$  and  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) should all be positive. Thus under natural suppositions  $a^{(n)} \rightarrow c_0 a$ . Of course the speed of convergence depends on the eigenvalue  $\varrho_1$ , of greatest absolute



value of the matrix  $\mathbf{L}$ . The number  $1/\varrho_1$ , may be considered in a certain sense as characterizing the effectiveness of the system of production considered.

In § 2 the input-output analysis of the same system of production is considered, leading to the system of equations

$$(4) \quad \mathbf{q} = \mathbf{L}^* \mathbf{q} + \mathbf{h} .$$

Here  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$  where  $q_k$  denotes the amount produced from the good  $A_k$ ,  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_N)$  where  $h_k$  denotes the amount from the good  $A_k$  consumed by individual consumers (the export is added, import subtracted from this amount) and  $\mathbf{L}^*$  is the transposed of the matrix  $\mathbf{L}$  figuring in § 1. It follows that all eigenvalues of the matrix  $\mathbf{L}^*$  (these being identical with the eigenvalues of the matrix  $\mathbf{L}$ ) are lying in the interior of the unit circle, which can be deduced from (1), more easily than from (4).







# ATOMMAGREAKTOROKBAN VÉGBEMENŐ NEUTRONLASSÍTÁS-FOLYAMATTAL KAPCSOLATOS VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁSI PROBLÉMÁKRÓL

MOGYORÓDI JÓZSEF és NÉMETH GÉZA<sup>1)</sup>

## Bevezetés

Az atommagreaktorok elméletének egyik legfontosabb kérdése a neutronlassítás törvényszerűségének megállapítása. Az atomreaktorokban több-millió eV energiájú neutronok keletkeznek, és azok a moderátor atommagjaival történő szakadatlan ütközés során lassulnak le néhány század eV energiájú termikus neutronokká. A neutronlassítással kapcsolatban több probléma merül fel. Így érdekességgel bír annak vizsgálata, hogy hány ütközéssel válik a keletkező neutron termikus neutronná. Ezt a kérdést PÁL L. [1] dolgozatában vizsgálja. Továbbá fontos kérdés a neutron energiájának időbeli változását vizsgálni, nevezetesen megállapítani, hogy mennyi idő alatt válik a neutron termikus neutronná. Ezt a kérdést TAKÁCS L. [2] dolgozatában vizsgálja. Jelen dolgozatunkban azt a további kérdést vizsgáljuk, hogy a neutron bizonyos idő alatt hány ütközést végez. Ennek ismeretére különösen szükség van a neutron térbeli mozgásának vizsgálatánál, nevezetesen az atomreaktor kritikus méretének megállapításánál. Dolgozatunkban megtartjuk TAKÁCS LAJOS [2] dolgozatának definícióit és jelöléseit. Egyben köszönetet mondunk TAKÁCS LAJOSnak, aki e munka megírásánál sok jó tanáccsal látott el bennünket.

## 1. §. A feladat kitűzése

Tekintsünk egy végtelen kiterjedésű homogén közeget, amely  $r$  különböző típusú atommagból áll. Tegyük fel, hogy a  $t = 0$  időpontban keletkezik egy  $E_0$  energiájú neutron. Jelölje a neutron energiáját a  $t$  időpontban  $E_t$ , és legyen a neutron „letargiája” a  $t$  időpontban  $\eta_t = \log E_0/E_t$ . Felteszünk, hogy a neutron a közeg atommagjaival történő ütközések során vagy szóródik, vagy abszorbeálódik. Jelölje az  $i$ -edik típusú atommagon történő ütközési sűrűséget  $\gamma_i(x)$ , a szóródási sűrűséget pedig  $\gamma_i^*(x)$ ; ezek a neutron  $x$  letargiájának függvényei. Az izotróp ütközés szokásos modelljének megfelelően feltesszük, hogy az  $i$ -edik típusú atommagon történő szóródás alkal-

<sup>1)</sup> Központi Fizikai Kutató Intézet.



mával a neutron letargiájának növekedése független az ütközés előtti értéktől, és a letargianövekedés eloszlásfüggvénye:

$$(1) \quad H_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ \frac{1 - e^{-x}}{1 - \alpha_i}, & \text{ha } 0 \leq x \leq \log 1/\alpha_i \\ 1, & \text{ha } x > \log 1/\alpha_i \end{cases}$$

ahol  $\alpha_i = [(A_i - 1)/(A_i + 1)]^2$  és  $A_i$  az  $i$ -edik típusú atommag tömegszáma. Bevezetjük továbbá a  $C(x) = \gamma_1(x) + \dots + \gamma_r(x)$  és  $C^*(x) = \gamma_1^*(x) + \dots + \gamma_r^*(x)$  rövidítéseket is. Végül legyen  $a = \sqrt{2E_0/m}$ . Ekkor egy  $x$  letargiájú neutron időbeli ütközési sűrűsége  $a\gamma_i(x) \exp(-x/2)$ , és időbeli szóródási sűrűsége az  $i$ -edik típusú atommagon  $a\gamma_i^*(x) \exp(-x/2)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Az  $\eta_i$  letargiaérték mellett vezessük be a  $v_i$  valószínűségi változót is, mely a neutron ütközéseinek számát jelöli a  $(0, t]$  időközben. Jelölje továbbá  $A_t$  azt az eseményt, hogy a  $(0, t]$  időközben nem történik abszorpció.

Meg fogjuk határozni a

$$(2) \quad \mathbf{P}\{v_i = n, \eta_i \leq x, A_t\} = F_n(t, x)$$

valószínűséget. Ennek ismeretében a  $v_i$  változóval kapcsolatos problémák megoldhatók. Így

$$(3) \quad \mathbf{P}\{v_i = n | A_t\} = \frac{F_n(t, \infty)}{\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t, \infty)}$$

annak a valószínűsége, hogy a  $(0, t]$  időközben  $n$  ütközés történik, feltéve, hogy addig nem történik abszorpció. Az ütközések várható száma pedig

$$(4) \quad \mathbf{M}\{v_i | A_t\} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n F_n(t, \infty)}{\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t, \infty)}$$

## 2. §. A $v_i$ változó eloszlása

**Tétel:** Az  $F_n(t, x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) eloszlásfüggvény-sorozat a következő integro-differenciálegyenlet rendszer segítségével határozható meg:

$$(5) \quad \frac{\partial F_n(t, x)}{\partial t} = -a \sum_{i=1}^r \left\{ \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i(y) dy F_n(t, y) - \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i^*(x) H_i(x-y) dy F_{n-1}(t, y) \right\}$$



az alábbi kezdeti értékből kiindulva :

$$(6) \quad F_0(t, x) = \begin{cases} e^{-aC(0)t}, & \text{ha } x \geq 0 \text{ és } t \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \text{ és } t \geq 0. \end{cases}$$

A megoldás kifejezhető a következő explicit alakban is :

$$(7) \quad F_n(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(at)^i}{i!} G_{n,i}(x),$$

ahol a  $G_{n,i}(x)$  függvények a

$$(8) \quad G_{0,i}(x) = \begin{cases} C^i(0), & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

és

$$(9) \quad G_{n,0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0, \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

kezdeti értékekből kiindulva sorjában a

$$(10) \quad G_{n,i}(x) = \sum_{i=1}^r \left\{ \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i(y) dG_{n,i-1}(y) - \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i^*(y) H_i(x-y) dG_{n-1,i-1}(y) \right\}$$

rekurzív képlet segítségével határozhatók meg.

### Bizonyítás :

(5) fennállása így látható be: a  $\{v_{t+\Delta t} = n, \eta_{t+\Delta t} \leq x, A_{t+\Delta t}\}$  esemény úgy jöhet létre, hogy vagy a  $\{v_t = n, \eta_t \leq x, A_t\}$  esemény teljesül, és a  $(t, t + \Delta t)$  időközben nem történik ütközés, vagy a  $\{v_t = n - 1, \eta_t = y, A_t\}$  esemény teljesül, és a  $(t, t + \Delta t)$  időközben szóródásra vezető ütközés történik, továbbá a neutron letargiájának növekedése  $(x - y)$ -nál kisebb, vagy pedig a  $\{v_t < n - 1, \eta_t \leq x, A_t\}$  esemény teljesül, azaz a  $(t, t + \Delta t)$  időközben 2 vagy 2-nél több szóródásra vezető ütközés történik, melynek valószínűsége azonban  $o(\Delta t)$ . Így a teljes valószínűség tétele értelmében azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_n(t + \Delta t, x) = & \int_0^x \left\{ 1 - ae^{-\frac{y}{2}} C(y) \Delta t \right\} d_y F_n(t, y) + \\ & + \sum_{i=1}^r a \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i^*(y) \Delta t H_i(x-y) d_y F_{n-1}(t, y) + o(\Delta t). \end{aligned}$$



Mindkét oldalból  $F_n(t, x)$ -et kivonva,  $\Delta t$ -vel osztva, majd  $\Delta t \rightarrow 0$  határátmenetet elvégezve, kapjuk az (5) integro-differenciálegyenletet. A (6) kezdeti érték könnyen adódik annak tekintetbevételével, hogy  $\exp\{-aC(0)t\}$  annak a valószínűsége, hogy a neutron a  $(0, t]$  időközben nem ütközik.

A (7) előállítás úgy nyerhető, hogy a megoldást

$$(11) \quad F_n(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j G_{n,j}(x)$$

alakban keressük. Így eljárva,  $t$  azonos kitevőjű hatványainak együtthatóit összevetve azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} (j+1)c_{j+1}G_{n,j+1}(x) = \\ = -a \sum_{i=1}^r \left\{ c_j \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i(y) dG_{n,i}(y) - \right. \\ \left. - c_j \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i^*(y) H_i(x-y) dG_{n-1,i}(y) \right\} \end{aligned}$$

Ha most a  $c_j$  együtthatókat úgy választjuk meg, hogy

$$(j+1)c_{j+1} = -ac_j$$

legyen, akkor azt nyerjük, hogy

$$c_j = \frac{(-a)^j c_0}{j!}.$$

Válasszuk  $c_0$ -t 1-nek. Ekkor

$$c_j = \frac{(-a)^j}{j!}.$$

$(j+1)c_{j+1}$ -gyel rövidítve látható, hogy a  $G_{n,j}(x)$  függvények kielégítik a (10) rekurzív képletet. A  $G_{n,0}(x)$  kezdeti értékek abból a feltételből határozhatók meg, hogy

$$F_n(0, x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0 \\ 0, & \text{ha } n > 0. \end{cases}$$

**Megjegyzés:** Az  $F(t, x) = \mathbf{P}\{\eta_t \leq x, A_t\}$  valószínűségre a

$$(12) \quad \mathbf{P}\{\eta_t \leq x, A_t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu_t = n, \eta_t \leq x, A_t\}$$



összefüggés tekintetbevételével felírható, hogy

$$(13) \quad F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(at)^j}{j!} G_j(x),$$

ahol

$$(14) \quad G_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n,j}(x).$$

A (13) eredmény megegyezik TAKÁCS L. [2] dolgozatában közölt eredményével. Az azonosság nyilvánvaló lesz, ha tekintetbe vesszük, hogy (9) szerint

$$G_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

és (10) szerint a  $G_j(x)$  függvényekre fennáll a

$$G_j(x) = \sum_{i=1}^r \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \{ \gamma_i(y) - \gamma_i^*(y) H_i(x-y) \} dG_{j-1}(y)$$

összefüggés.

Megjegyezzük még, hogy a (10) formulából, továbbá a (8) és (9) kezdeti értékekből teljes indukcióval könnyen belátható, hogy  $G_{n,j}(x) \equiv 0$ , ha csak  $n > j$ . A  $G_j(x)$  függvényt a (14) formula szerint tehát véges sok  $G_{n,j}(x)$  függvény segítségével állíthatjuk elő:

$$(14') \quad G_j(x) = \sum_{n=0}^j G_{n,j}(x).$$

### 3. §. A $v_t$ változó várható értéke

Vezessük be a következő függvényt:

$$(15) \quad M(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} n F_n(t, x).$$

Az  $M(t, x)$  függvény kielégíti a következő integro-differenciálegyenletet:

$$(16) \quad \frac{\partial M(t, x)}{\partial t} = \sum_{i=1}^r \left\{ \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \{ \gamma_i(y) - \gamma_i^*(y) H_i(x-y) \} d_y M(t, y) - \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \gamma_i^*(y) H_i(x-y) d_y F(t, y) \right\}.$$



Ez az egyenlet könnyen nyerhető (5) segítségével (13)-ra és (15)-re való tekintettel.

Az  $M(t, x)$  függvényt  $t$  szerinti hatványsor alakjában is megkaphatjuk, (7)-re való tekintettel. Írhatjuk ugyanis, hogy

$$(17) \quad M(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(at)^j}{j!} A_j(x),$$

ahol

$$(18) \quad A_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n G_{n,j}(x).$$

Az  $A_j(x)$  függvények rekurzív meghatározhatók az

$$(19) \quad A_j(x) = \sum_{i=1}^r \left\{ \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \{ \gamma_i(y) - \gamma_i^*(y) H_i(x-y) \} dA_{j-1}(y) - \int_0^x e^{-\frac{y}{0}} \gamma_i^*(y) H_i(x-y) dG_{j-1}(y) \right\}$$

képlet segítségével, ahol a  $G_j(x)$  függvényt (14) értelmezi. A kezdeti feltétel (9) szerint

$$(20) \quad A_0(x) \equiv 0.$$

A  $v_t$  ütközés-szám feltételes várható értéke azon feltétel mellett, hogy a  $t$  időpontban a letargia értékére  $\eta_t \leq x$  áll, és a  $t$  időpontig nem történt abszorpció:

$$(21) \quad \mathbf{M}\{v_t | \eta_t \leq x, A_t\} = \frac{M(t, x)}{F(t, x)},$$

ahol  $F(t, x)$  a (13)-mal értelmezett függvény. Továbbá

$$(22) \quad \mathbf{M}\{v_t | A_t\} = \frac{M(t, \infty)}{F(t, \infty)}.$$

#### 4. §. Példa

a) Tegyük fel, hogy  $\gamma_i^*(x) \equiv \gamma_i^*$  (állandó) és  $\gamma_i(x) \equiv \gamma_i$  (állandó). Ekkor  $C^*(x) \equiv C^*$  (állandó) és  $C(x) \equiv C$  (állandó). Legyen továbbá

$$(23) \quad H(x) = \frac{\gamma_1^* H(x) + \dots + \gamma_r^* H_r(x)}{\gamma_1^* + \dots + \gamma_r^*},$$



Az (5) integro-differenciálegyenlet ekkor a következő alakú:

$$(24) \quad \frac{\partial F_n(t, x)}{\partial t} = -a \left\{ \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} C d_y F_n(t, y) - \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} C^* H(x-y) d_y F_{n-1}(t, y) \right\}.$$

Ezen paragrafusban a  $G_{n,j}(x)$  függvények Laplace—Stieltjes-transzformáltjainak kifejezése céljából a megoldást ismét

$$(25) \quad F_n(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j G_{n,j}(x)$$

alakban keressük. (25)-öt (24)-be helyettesítve,  $t$  azonos kitevőjű hatványainak együtthatóit összevetve azt nyerjük, hogy

$$(26) \quad (j+1) c_{j+1} G_{n,j+1}(x) = -a C c_j \left\{ \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} dG_{n,j}(y) - \frac{C^*}{C} \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} H(x-y) dG_{n-1,j}(y) \right\}.$$

A  $c_j$  együtthatókat a

$$(j+1) c_{j+1} = -C c_j$$

egyenletből nyerhetjük. Belátható, hogy ennek megoldása:

$$c_j = \frac{(-aC)^j}{j!}$$

minden  $j$ -re, ha  $c_0$ -t ismét 1-nek választjuk. Legyen  $C^*/C = \varrho$ . (26)-ban  $(j+1) c_{j+1}$ -gyel rövidítve kapjuk, hogy

$$(27) \quad G_{n,j+1}(x) = \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} dG_{n,j}(y) - \varrho \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} H(x-y) dG_{n-1,j}(y).$$

Legyenek

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(x) \text{ és } \psi_{n,j}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dG_{n,j}(x)$$



a  $H(x)$  és  $G_{n,j}(x)$  függvények Laplace—Stieltjes transzformáltjai. Ezek között (27)-ből következőleg fennáll a

$$(28) \quad \psi_{n,j+1}(s) = \psi_{n,j}\left(s + \frac{1}{2}\right) - \varrho \varphi(s) \psi_{n-1,j}\left(s + \frac{1}{2}\right)$$

egyenlet. A  $\psi_{n,j}(s)$  függvények meghatározása céljából bevezetjük az

$$A_j(u, s) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \psi_{n,j}(s)$$

generátorfüggvényt. (28)-at  $u^n$ -nel megszorozva, majd összegezve minden  $n$ -re, kapjuk az

$$(29) \quad A_{j+1}(u, s) = A_j\left(u, s + \frac{1}{2}\right) \{1 - u \varrho \varphi(s)\}$$

egyenletet. Mivel most

$$G_{0,j}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

azért  $\psi_{0,j}(s) = 1$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ). Másrészt (14)-ből következik, hogy mivel

$$G_{0,0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

azért  $G_{n,0}(x) = 0$ , ha  $n > 0$ . Tehát  $\psi_{n,0}(s) = 0$ , ha  $n > 0$ . E kezdeti feltételekből  $A_0(u, s) \equiv 1$ . (29)-ből következik, hogy

$$A_1(u, s) = A_0\left(u, s + \frac{1}{2}\right) \{1 - u \varrho \varphi(s)\} = 1 - u \varrho \varphi(s)$$

$$A_2(u, s) = A_1\left(u, s + \frac{1}{2}\right) \{1 - u \varrho \varphi(s)\} = \{1 - u \varrho \varphi(s)\} \left\{1 - u \varrho \varphi\left(s + \frac{1}{2}\right)\right\},$$

és teljes indukcióval bebizonyítható, hogy

$$A_j(u, s) = \prod_{k=0}^{j-1} \{1 - u \varrho \varphi(s + k/2)\} \quad j = 1, 2, \dots.$$

Innen  $\psi_{n,j}(s)$ -et úgy kapjuk meg, hogy  $u^n$  együtthatóját megkeressük. Mindjárt látható innen is, hogy  $\psi_{n,j}(s) \equiv 0$ , ha  $n > j$  (lásd (14')-t). Ha pedig  $n \leq j$ ,  $u^n$  együtthatóját

$$(30) \quad (-1)^n \varrho^n \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_n \leq j-1} \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \dots \varphi_{i_n}$$



alakban kaphatjuk meg, ahol  $\varphi_k = \varphi(s + k/2)$ . Például  $j = 2, n = 1$  esetén

$$\psi_{1,2}(s) = -\varrho \left\{ \varphi(s) + \varphi\left(s + \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

**b)** A  $v_i$  feltételes várható értékének kiszámítására ebben a speciális esetben a generátorfüggvény módszerét és a Laplace—Stieltjes transzformációt alkalmazzuk.

Legyen

$$G(u, t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k F_k(t, x)$$

az  $F_k(t, x)$  függvények generátorfüggvénye. Jelölje az  $F_k(t, x)$  függvény  $x$  szerinti Laplace—Stieltjes transzformáltját  $\psi_k(t, s)$ :

$$\psi_k(t, s) = \int_0^x e^{-sx} d_x F_k(t, x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

(5) figyelembevételével  $G(u, t, x)$ -re a következő integro-differenciálegyenletet vezethetjük le:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{G(u, t, x) - e^{-aCt}\}}{\partial t} = & -aC \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} d_y \{G(u, t, y) - e^{-aCt}\} + \\ & + auC^* \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} H(x-y) d_y G(u, t, y). \end{aligned}$$

Ebből rendezéssel a következőt kapjuk:

$$(31) \quad \frac{\partial G(u, t, x)}{\partial t} = -w \int_0^x e^{-\frac{y}{2}} \{1 - u\varrho H(x-y)\} d_y G(u, t, y),$$

ahol  $w = aC$  és  $\varrho = C^*/C$ .

Ha  $\varphi(s)$  a  $H(x)$  függvény Laplace—Stieltjes transzformáltja, és

$$H(u, t, s) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k \psi_k(t, s),$$

akkor  $H(u, t, s)$  és  $\varphi(s)$  között (30)-ból következőleg az alábbi egyenlet áll fenn:

$$(32) \quad \frac{\partial H(u, t, s)}{\partial t} = -w \{1 - u\varrho\varphi(s)\} H(u, t, s + \frac{1}{2}).$$

Ha figyelembe vesszük, hogy

$$F_k(0, x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = 0, x \geq 0 \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$



azt nyerjük, hogy  $H(u, 0, s) \equiv 1$ . Tehát (31)-et 0-tól  $t$ -ig integrálva kapjuk:

$$(33) \quad H(u, t, s) = 1 - w \{1 - \varrho \varphi(s)\} \int_0^t H(u, \tau, s + \frac{1}{2}) d\tau.$$

Ennek a képletnek ismételt alkalmazásával  $H(u, t, s)$  sorra kifejezhető  $H(u, t, s + n/2)$  segítségével. Ha tekintetbe vesszük, hogy  $n \rightarrow \infty$  esetén  $H(u, t, s + n/2) \rightarrow 0$ , úgy végül  $H(u, t, s)$ -re a következő kifejezést kapjuk:

$$(34) \quad H(u, t, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-wt)^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \{1 - u \varrho \varphi(s + j/2)\}.$$

Az

$$M(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} n F_n(t, x)$$

függvénynek a Laplace—Stieltjes transzformáltja  $x$  szerint:

$$m(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} n \varphi_n(t, s) = \left[ \frac{\partial H(u, t, s)}{\partial u} \right]_{u=1}.$$

Ebből az  $M(t, x)$  függvényt inverz-transzformációval nyerjük. A  $v_t$  feltételevárható értékét (4) szerint a következő módon fejezhetjük ki  $m(t, s)$  segítségével:

$$(35) \quad \mathbf{M}\{v_t | A_t\} = \frac{M(t, \infty)}{F(t, \infty)} = \frac{m(t, 0)}{F(t, \infty)} = \frac{\left[ \frac{\partial H(u, t, 0)}{\partial u} \right]_{u=1}}{F(t, \infty)}.$$

Felhasználva a TAKÁCS LAJOS [2] által  $F(t, \infty)$ -re megadott formulát,  $\mathbf{M}\{v_t | A_t\}$  a következő explicit alakban fejezhető ki:

$$(36) \quad \mathbf{M}\{v_t | A_t\} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-wt)^k}{k!} \left[ \prod_{j=0}^{k-1} \{1 - \varrho \varphi(j/2)\} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\{ -\varrho \varphi(l/2) \}}{1 - \varrho \varphi(l/2)} \right]}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-wt)^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \{1 - \varrho \varphi(l/2)\}}.$$

(Beérkezett: 1956. VII. 31)

#### IRODALOM

- [1] PÁL L.: „A neutronok lelassításának néhány kérdéséről.” *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 1 (1956) 41–54.
- [2] TAKÁCS L.: „Atommagreaktorok elméletével kapcsolatos néhány valószínűség-számítási kérdésről.” *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 1 (1956) 55–66.



О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОБЛЕМАХ,  
СВЯЗАННЫХ С ПРОЦЕССОМ ЗАМЕДЛЕНИЯ НЕЙТРОНОВ,  
ПРОИСХОДЯЩИМ В АТОМНЫХ РЕАКТОРАХ

J. MOGYORÓDI и G. NÉMETH

## Резюме

Одним из самых важных вопросов теории атомных реакторов является исследование закона замедления нейтронов. Настоящая работа исследует тот вопрос, сколько столкновений происходит в течении некоторого времени. Рассмотрим нейтрон, обладающий в момент  $t = 0$  (фиксированной) начальной энергией  $E_0$ . Пусть в момент  $t$  случайные величины  $E_t$  и  $\eta_t = \log E_0/E_t$  обозначают соответственно энергию нейтрона и его летаргию. Предположим, что нейтрон движется в бесконечной однородной среде. Пусть эта среда состоит из атомных ядер  $r$  различных типов. Пусть  $\gamma_i(x)$  и  $\gamma_i^*(x)$  обозначают соответственно плотность столкновения и плотность рассеяния, происходящих на ядрах  $i$ -ого типа. Пусть далее  $C = \gamma_1 + \dots + \gamma_r$ ,  $C^* = \gamma_1^* + \dots + \gamma_r^*$ , где эти величины зависят от летаргии  $x$  нейтрона. В случае этой модели можно считать, что вероятность того, что нейтрон, летаргия которого  $x$ , столкнется в промежуток  $\Delta t$  с атомным ядром  $i$ -ого типа, равна  $a\gamma_i(x) \exp(-x/2) \Delta t + o(\Delta t)$ , а вероятность рассеивания равна  $a\gamma_i^*(x) \exp(-x/2) \Delta t + o(\Delta t)$ , где  $a = \sqrt{2E_0/m}$ ,  $m$  — масса нейтрона.

Предположим далее, что столкновения таковы, что во время рассеивания увеличение летаргии нейтрона не зависит от ее значения до столкновения. Пусть  $H_i(x)$  — функция распределения увеличения летаргии во время рассеивания на атомном ядре  $i$ -ого типа. Пусть  $F_k(t, x)$  — вероятность того, что нейтрон в промежуток времени  $(0, t)$  не поглощается (событие  $A_t$ ), в момент  $t$  его летаргия не превосходит  $x$  (событие  $\eta_t \leq x$ ) и число столкновений в момент  $t$  равно  $k$  (событие  $\nu_t = k$ ), функция распределения  $F_k(t, x)$  удовлетворяет интегродифференциальному уравнению (5) и может быть представлена явной формулой (7). Условное математическое ожидание  $\mathbf{M}\{\nu_t | \eta_t \leq x, A_t\}$  может быть выражено формулой (21), где фигурирующие в ней величины даются соотношениями (13) и (15).

В том специальном случае, когда  $\gamma_i^*(x) \equiv \gamma_i^*$ ,  $\gamma_i(x) \equiv \gamma_i$ ,  $C^*(x) \equiv C^*$ ,  $C(x) \equiv C$  (постоянные) преобразование  $F_k(t, x)$  Laplace—Stieltjes

$$\psi_n(t, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-at)^j}{j!} \psi_{n,j}(s)$$

может быть вычислено с помощью рекурсивной формулы (29), где

$$A_j(u, s) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \psi_{n,j}(s)$$

производящая функция  $\psi_{n,j}(s)$  и  $\psi_{n,j}(s)$  преобразование Laplace—Stieltjes  $G_{n,j}(x)$  фигурирующих в (7). В этом специальном случае дано в явном виде и условное математическое ожидание числа столкновений формулой (35).

ON PROBABILISTIC PROBLEMS CONNECTED WITH THE PROCESS OF  
SLOWING DOWN OF NEUTRONS IN NUCLEAR REACTORS

J. MOGYORÓDI and G. NÉMETH

## Summary

One of the most important questions of nuclear reactor theory is the establishment of the law of slowing down of neutrons. This paper investigates how many collisions take place during a given time interval.



Let us consider a neutron having a (fixed) initial energy  $E_0$  in the moment  $t = 0$ . Let the random variables  $E_t$  and  $\eta_t = \log E_0/E_t$  denote the energy and the lethargy, resp. of the neutron at the moment  $t$ . Suppose that the neutron moves in an infinite homogeneous medium consisting of atomic nuclei of  $r$  different types. Let  $\gamma_i(x)$  and  $\gamma_i^*(x)$  denote the collision density of the neutron and the scattering density of the neutron, resp. Put  $C = \gamma_1 + \dots + \gamma_r$ ,  $C^* = \gamma_1^* + \dots + \gamma_r^*$ ; these quantities generally depend on the lethargy of the neutron. In case of the above model it can be supposed that the probability that, during the time  $\Delta t$ , a neutron of lethargy  $x$  collides with a nucleus of type  $i$ , is  $a\gamma_i(x) \exp(-x/2) \Delta t + o(\Delta t)$  and that of scattering  $a\gamma_i^*(x) \exp(-x/2) \Delta t + o(\Delta t)$ , where  $a = \sqrt{2E_0}/m$  and  $m$  is the mass of the neutron. In addition, suppose — as usual — that the collisions are such that in case of scattering the increase of the lethargy of the neutron is independent of its value before the collision. Let  $H_i(x)$  be the distribution function of the increase in lethargy gained at the scattering on a nucleus of type  $i$ . Let  $F_k(t, x)$  be the probability that during the time interval  $(0, t]$  the neutron will not be absorbed (event  $A_t$ ), and in the moment  $t$  its lethargy will be at most  $x$  (event  $\{\eta_t \leq x\}$ ) further that the number of collisions is equal to  $k$  (event  $\{v_t = k\}$ ). The distribution function  $F_k(t, x)$  satisfies the integro-differential equation (5) and can be expressed in the explicit form (7). The conditional expectation  $\mathbf{M}\{v_t | \eta_t \leq x, A_t\}$  may be expressed by formula (21), where the occurring quantities are given by relations (13) and (15).

In the special case when  $\gamma_i^*(x) \equiv \gamma_i^*$ ,  $\gamma_i(x) \equiv \gamma_i$ ,  $C^*(x) \equiv C^*$ ,  $C(x) \equiv C$  ( $\gamma_1^*$ ,  $\gamma_i$ ,  $C^*$ ,  $C$  being constants), the Laplace—Stieltjes transform

$$\psi_n(t, s) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(at)^j}{j!} \psi_{n,j}(s)$$

of  $F_k(t, x)$  can be expressed by formulas (29) and (30), where

$$A_j(u, s) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \psi_{n,j}(s)$$

is the generating function of the functions  $\psi_{n,j}(s)$  and  $\psi_{n,j}(s)$  is the Laplace—Stieltjes transform of the function  $G_{n,j}(s)$ , occurring in (7).

In this special case the conditional expectation of the number of the collisions is given by the formula (33).



# LINEÁRIS METILSZILIKON-OLAJOK ÁTRENDZŐDÉSÉNEK MATEMATIKAI TÁRGYALÁSA, II.

PRÉKOPA ANDRÁS és RÉVÉSZ PÁL

Az [1] dolgozatban szerepel a következő differenciálegyenletrendszer :

$$\begin{aligned} \frac{dN_0(t)}{dt} &= \frac{\alpha}{R} \{ R^2 - (N + R) N_0(t) \} , \\ (1) \quad \frac{dN_k(t)}{dt} &= \frac{\alpha}{R} \left\{ R^2 - \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{r=0}^n N_{n-r}(t) N_r(t) - (N + kR + R) N_k(t) \right\} \\ &\quad (k = 1, 2, \dots) . \end{aligned}$$

Itt  $N_k(t)$  jelenti a  $t$  időpontban jelenlevő  $k$  difunkciós-egységet tartalmazó molekulák számát,  $N$  az összes difunkciós-,  $2R$  az összes monofunkciós-egységek számát,  $\alpha$  pedig a reakció sebességére jellemző állandó.  $N$  és  $R$  az időben változatlanok maradnak. A [1] dolgozat tartalmazza az (1) egyenletrendszer megoldását az  $R = N$  és  $N_1(0) = R$ ,  $N_k(0) = 0$ ,  $k > 1$  feltételek mellett. Jelen dolgozatban az (1) egyenletrendszer általános megoldásával foglalkozunk.

## 1. §. Az (1) differenciálegyenletrendszer megoldása

Vezessük be az  $N_k(t)$  mennyiségek  $g(u, t)$  generátorfüggvényét :

$$(2) \quad g(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k N_k(t) .$$

Ha (1) mindkét oldalát megszorozzuk  $u^k$ -val és összegezzük  $k$ -ra vonatkozólag, akkor a következő parciális differenciálegyenletre jutunk :

$$(3) \quad \frac{\partial g(u, t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{R} \left\{ \frac{u g^2(u, t) - R^2}{u - 1} - (N + R) g(u, t) - uR \frac{\partial g(u, t)}{\partial u} \right\} .$$

Egyszerűsítés végett bevezetjük a  $v = e^{-\alpha t}$  transzformációt és a

$$h = h(u, v) = \frac{1}{R} g\left(u, \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{v}\right)$$



függvényt. (3) alapján  $h$ -ra a következő egyenletet kapjuk:

$$(4) \quad u \frac{\partial h}{\partial u} - v \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{1 - uh^2}{1 - u} - \frac{N + R}{R} h.$$

A továbbiakban először a (4) kvázilineáris differenciálegyenletet oldjuk meg. Bevezetjük az  $(N + R)/R = l + 1$  jelölést. Ez azért célszerű, mert ha a  $t = 0$  időpontban csupa  $M_2D_{l'}$ -típusú molekulák vannak, akkor  $N = l'R$ , és így  $l = l'$ . Ebben az esetben tehát  $l$  szemléletes jelentéssel rendelkezik.

A (4) egyenlet alapján a karakterisztikákra a következő egyenleteket kapjuk:

$$(5) \quad \frac{du}{u} = -\frac{dv}{v} = \frac{dh}{\frac{1 - uh^2}{1 - u} - (l + 1)h},$$

ebből:

$$(6) \quad \frac{dh}{du} = \frac{1}{u} \frac{1 - uh^2}{1 - u} - \frac{l + 1}{u} h,$$

$$(7) \quad \frac{dv}{du} = -\frac{v}{u}.$$

Egy, a RICATTI-féle (6) differenciálegyenletet kielégítő partikuláris megoldást az [1] dolgozatban követett úton itt is találhatunk. Ilyen módon az

$$\frac{1}{l + 1 - lu}$$

függvényre jutunk, amelyet behelyettesítve a (6) egyenletbe, meggyőződhetünk arról, hogy azt valóban kielégíti. A (6) egyenlet általános megoldása a

$$(8) \quad h = \frac{1}{z} + \frac{1}{l + 1 - lu}$$

alakba írható, ahol  $z$  a következő elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldása<sup>1)</sup>:

$$(9) \quad z' - \left( \frac{l + 1}{u} + \frac{2}{1 - u} \frac{1}{l + 1 - lu} \right) z = \frac{1}{1 - u}.$$

(9)-et megoldva azt kapjuk, hogy

$$z = \frac{c_1 u^{l+1} (l + 1 - lu)^2 - (l + 1 - lu)u}{(1 - u)^2 l(l + 1)}.$$

<sup>1)</sup> Lásd például: E. KAMKE: *Differentialgleichungen reeller Funktionen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1952. (2. kiadás), 42. oldal.



ahol  $c_1$  állandó. Eszerint a (6) egyenlet általános megoldása:

$$(10) \quad h = \frac{1}{l+1-lu} + \frac{(1-u)^2 l(l+1)}{c_1 u^{l+1}(l+1-lu)^2 - (l+1-lu)u}.$$

A (7) egyenlet megoldása pedig

$$(11) \quad uv = c_2,$$

ahol  $c_2$  állandó. A (4) egyenlet megoldásai a

$$(12) \quad c_1 = f(c_2)$$

alakba írhatók, ahol  $f$  a kezdőfeltételek alapján meghatározandó függvény.

### 1°. A $h(u, 1) \equiv u^l$ kezdőfeltétel esete

Ez a feltétel annyit jelent, hogy  $N_l(0) = R$ ,  $N_k(0) = 0$ , ha  $k \neq l$ , más szóval a  $t = 0$  időpontban csupa  $M_2 D_l$ -típusú molekulák vannak.

Ha a (10) és (11) egyenletekben a kezdőfeltételnek megfelelően  $v$  helyébe 1-et,  $h$  helyébe  $u^l$ -et helyettesítünk, és a  $c_1$ -re és  $c_2$ -re ezáltal nyert kifejezéseket (12)-be beírjuk, akkor az  $f$  függvényre a következőket kapjuk:

$$(13.a) \quad f(u) = \frac{1}{u^{l+1}(l+1-lu)} \left\{ \frac{l(l+1)(1-u)^2}{lu^{l+1} - (l+1)u^l + 1} + u \right\},$$

vagy

$$(13.b) \quad f(u) = - \frac{u^{l-1} + 2u^{l-2} + \dots + (l-1)u + l}{u^{l+1}[lu^{l-1} + (l-1)u^{l-2} + \dots + 2u + 1]}.$$

A (13.b) alak a (13.a) kifejezésből  $(l+1-lu)$ -val való egyszerűsítés útján adódik.  $h(u, v)$  kifejezését a (13.b) alak felhasználásával írjuk fel, de megjegyezzük, hogy a (13.a) alak felhasználásával  $h(u, v)$ -re nyerhető kifejezés a (20) általános megoldásból leolvasható. (10), (11), (12) és (13.a) alapján

$$(14) \quad h(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{l-1} \{l-i+(l+1)iv^l - (i+1)lv^{l+1}\} (uv)^i + l(l+1)v^2 u^l}{\sum_{i=1}^l \{iv^{l+1} + (l+1)(l-i)v - l(l+1-i)\} v^{i-1} u^i + l(l+1)}.$$

Most megadjuk az  $N_k(t)$  függvények kifejezéseit. Ehhez a (14) képlet által adott  $h(u, v)$  függvényt kell  $u$  szerint sorbafejtenünk. Általában

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{a_0 + a_1 u + \dots + a_l u^l}{b_0 + b_1 u + \dots + b_l u^l} = \\ &= a_0 A_0 + (A_0 a_1 + A_1 a_0) u + (A_0 a_2 + A_1 a_1 + A_2 a_0) u^2 + \dots \\ &\dots + (A_0 a_l + A_1 a_{l-1} + \dots + A_l a_0) u^l + \\ &+ (A_1 a_l + A_2 a_{l-1} + \dots + A_{l+1} a_0) u^{l+1} + \\ &+ (A_2 a_l + A_3 a_{l-1} + \dots + A_{l+2} a_0) u^{l+2} + \dots \end{aligned}$$



ahol

$$A_r = \frac{1}{b_0} \sum_{k_1+2k_2+\dots+l k_l=r} \frac{(k_1+k_2+\dots+k_l)!}{k_1! k_2! \dots k_l!} (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_l} \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^{k_1} \left(\frac{b_2}{b_0}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{b_l}{b_0}\right)^{k_l}$$

Alkalmazva ezt a  $\psi(u) = Rh(u, v) = g(u, v)$  esetre, és figyelembe véve, hogy  $u^k$  együtthatója éppen  $N_k(v)$ , azt kapjuk, hogy

$$(15) \quad \frac{1}{R} N_k(v) = \begin{cases} \sum_{i=0}^k a_i A_{k-i}, & \text{ha } k \leq l \\ \sum_{i=0}^l a_i A_{k-i}, & \text{ha } k > l. \end{cases}$$

Itt

$$(16) \quad \begin{cases} a_i = \{l-i+(l+1)iv^l - (i+1)lv^{l+1}\} v^i, & i = 0, 1, 2, \dots, l-1 \\ a_l = l(l+1)v^{2l} \end{cases}$$

és

$$(17) \quad A_r = \frac{v^r}{l(l+1)} \sum_{k_1+2k_2+\dots+l k_l=r} \left\{ \left( -\frac{1}{l(l+1)v} \right)^{k_1+k_2+\dots+k_l} \times \right. \\ \left. \times \frac{(k_1+k_2+\dots+k_l)!}{k_1! k_2! \dots k_l!} \prod_{i=1}^l (iv^{l+1} + (l+1)(l-i)v - l(l+1-i))^{k_i} \right\},$$

továbbá

$$v = e^{-\alpha t}.$$

Abban az esetben, amikor  $l = 2$ ,  $A_r$  kifejezése lényegesen egyszerűsödik. Ekkor

$$(18) \quad A_r = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^r \binom{n}{r-n} \left( -\frac{1}{6} \right)^n (v^3 + 3v - 4)^{2n-r} (2v^4 - 2v)^{r-n}.$$

**2°  $A-h(u, 1) \equiv d_0 + d_1 u + \dots + d_s u^s$  kezdőfeltétel esete**

Ez a feltétel annyit jelent, hogy  $N_0(0) = d_0 R$ ,  $N_1(0) = d_1 R$ ,  $\dots$ ,  $N_s(0) = d_s R$ , és  $N_k(0) = 0$ , ha  $k > s$ , ahol  $d_0 + d_1 + \dots + d_s = 1$ ,  $d_i \geq 0$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, s$ ). Ekkor

$$N = (d_1 + 2d_2 + \dots + s d_s) R,$$

tehát

$$l = d_1 + 2d_2 + \dots + s d_s.$$



Ha a (10) és (11) egyenletekben a kezdőfeltételeknek megfelelően  $v$  helyébe  $1$ -et,  $h$  helyébe  $(d_0 + d_1 u + \dots + d_s u^s)$ -et helyettesítünk, és a  $c_1$ -re és  $c_2$ -re ezáltal nyert kifejezéseket (12)-be beírjuk, akkor az  $f$  függvényre a következő adódik:

$$(19) \quad f(u) = \frac{1}{u^{l+1}(l+1-lu)} \left\{ u + \frac{l(l+1)(1-u)^2}{(l+1-lu)(d_0 + d_1 u + \dots + d_s u^s) - 1} \right\}.$$

Eszerint

$$(20) \quad h(u, v) = \left\{ 1 + \frac{l(l+1)(1-u)^2}{u^{l+1}(l+1-lu)f(uv) - u} \right\} \frac{1}{l+1-lu}.$$

A generátorfüggvény komplikált volta miatt a sorfejtést nem végezzük el, de (20) alapján minden konkrét, a gyakorlatban előforduló  $N_k(t)$  meghatározható. A gyakorlatban ugyanis csak a  $k \leq 12$  esetnek van fontossága.

## 2. §. Az $N_k(t)$ függvények vizsgálata. Összehasonlítás a kísérleti eredményekkel

Gyakorlati szempontból fontos kérdés, hogy mely  $N_k(t)$  függvények rendelkeznek szélsőértékkel, és milyen  $t$  értékre veszik fel maximumukat. Az utóbbi kérdésre a válasz konkrét esetekben magasabbfokú egyenletek gyökeinek közelítő meghatározásával megadható.

Az első kérdéssel kapcsolatban megmutatjuk, hogy az

$$N_l(0) = R, \quad N_k(0) = 0, \quad \text{ha } k \neq l$$

kezdőfeltétel esetén az  $N_k(t)$  függvényeknek van maximumuk, ha  $k = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, 2l$ . Állításunkat a következőképpen bizonyítjuk. A (14) képletet deriválva, meggyőződhetünk arról, hogy

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{v^l} \left[ \frac{\partial h(u, v)}{\partial v} \right]_{v=0} &= -(l+1)^2 \left( \frac{1-u}{l+1-lu} \right)^2 = \\ &= -1 - u \left( \frac{2l}{l+1} - 2 \right) - \\ &\quad - \sum_{k=2}^{\infty} u^k \left\{ (k+1) \left( \frac{l}{l+1} \right)^k - 2k \left( \frac{l}{l+1} \right)^{k-1} + (k-1) \left( \frac{l}{l+1} \right)^{k-2} \right\} \end{aligned} \right.$$

$$(22) \quad \left[ \frac{1}{v^l} \frac{\partial h(u, v)}{\partial v} \right]_{v=1} = -1 - u - u^2 - \dots - u^{l-1} + 2lu^l - u^{l+1} - \dots - u^{2l}.$$

A (21) és (22) sorok együtthatói éppen az

$$\frac{1}{R} \frac{1}{v^l} \frac{dN_k(v)}{dv}$$



függvények értékei a  $v = 0$ , illetve  $v = 1$  helyen. A (21) és (22) sorok megfelelő együtthatóit megvizsgálva egyszerűen belátható, hogy

$$\left[ \frac{1}{v^l} \frac{dN_k(v)}{dv} \right]_{v=0} > 0, \quad \text{ha } k = 1, 2, \dots, 2l$$

$$\left[ \frac{1}{v^l} \frac{dN_k(v)}{dv} \right]_{v=1} < 0, \quad \text{ha } k = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, 2l.$$

Létezik tehát olyan  $v'$  ( $0 < v' < 1$ ) érték, hogy

$$\left[ \frac{1}{v^l} \frac{dN_k(v)}{dv} \right]_{v=v'} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, 2l.$$

Innen következik, hogy az  $N_k(v)$  függvényeknek a  $k = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, 2l$  esetben szélsőértékük van. Mivel ezek a függvények a  $v = 1$  helyen 0, minden más helyen pedig pozitív értéket vesznek fel, továbbá a  $(0, 1)$  intervallum belsejében van szélsőértékük, kell, hogy maximumuk is legyen. Ezzel állításunkat igazoltuk.

A kísérleti ellenőrzést TÖRÖK FERENC, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Általános és Szervetlen Kémiai Intézetének tanársegédje végezte el. A kiindulási adatok a következők voltak:

$$N_2(0) = 0,561 = a, \quad N_4(0) = 0,162 = b, \quad \alpha = 0,062,$$

vagyis a  $t = 0$  időpontban csak  $M_2D_2$  és  $M_2D_4$  molekulák vannak. Az ezen esetnek megfelelő képletek a következők:

$$N_0(t) = M \frac{1 - e^{-\alpha A t}}{A},$$

$$N_1(t) = \frac{M}{A-1} \left\{ \left( 1 - \frac{1 - e^{-\alpha A t}}{A} \right)^2 - e^{-\alpha(A+1)t} \right\}$$

$$N_2(t) = \frac{M}{A^3(A-1)} \left\{ (A-1)^4 + (A-1)^2(2A-3)e^{-\alpha A t} - \right. \\ \left. - (A-1)(A-3)e^{-2\alpha A t} + 2A^2(A-1)e^{-\alpha(1+A)t} + \right. \\ \left. + 2A^2e^{-(2A+1)\alpha t} - e^{-3\alpha A t} + Ce^{-\alpha(A+2)t} \right\},$$

$$\text{ahol } M = a + b, \quad A = \frac{3a + 5b}{M} \text{ és}$$

$$C = \left\{ \frac{a}{M} (A-1)^2 A^3 - (A-1)^4 - (A-1)^2(2A-3) + \right. \\ \left. + (A-1)(A-3) - 2A^3 + 1 \right\}.$$



$t = 4$  percre a kísérleti adatok a következők:

$$N_0(4) = 0,12$$

$$N_1(4) = 0,10$$

$$N_2(4) = 0,25 .$$

A számított adatok:

$$N_0(4) = 0,12$$

$$N_1(4) = 0,12$$

$$N_2(4) = 0,24 .$$

További kísérletek folyamatban vannak. Ezek eredményeit LENGYEL B. és TÖRÖK F. a Magyar Kémikusok Lapjában fogják közölni.

(Beérkezett: 1956. VII. 31.)

#### IRODALOM

- [1] PRÉKOP A.—TÖRÖK F.: „Lineáris metilszilikon-olajok átrendeződésének matematikai tárgyalása, I.” *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 67–81.

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕГРУППИРОВКИ ЛИНЕЙНЫХ МЕТИЛСИЛИКОНОВЫХ МАСЕЛ, II.

A. PRÉKOP и P. RÉVÉSZ

#### Резюме

В работе [1] решается система дифференциальных уравнений (1) при начальных условиях  $R = N$ ,  $N_1(0) = N$ ,  $N_k(0) = 0$  в случае  $k > 1$ . В настоящей работе мы занимаемся нахождением общего решения системы уравнений (1). Для этого вводится производящая функция (2) и ее преобразованная функция

$$h(u, v) = \frac{1}{R} g\left(u, \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{v}\right),$$

где  $2R$  означает число монофункциональных единиц. Из (1) следует, что для  $h(u, v)$  выполняется уравнение (4). В случае начального условия  $h(u, 1) = u^l$  (т. е. когда  $N_l(0) = R$ ,  $N_k(0) = 0$  при  $k \neq l$ ) решение дается формулой (14). Разлагая функцию  $h(u, v)$  в ряд Тейлора, для  $N_k(t)$  получаются формулы (15), (16) и (17). Если  $l = 2$ , (17) принимает более простую форму (18). В случае начального условия  $h(u, 1) = d_0 + d_1 u + \dots + d_s u^s$  (т. е. когда  $N_0(0) = R_1$ ,  $N_1(0) = d_1 R$ ,  $\dots$ ,  $N_s(0) = d_s R$ ) для  $h(u, v)$  получается формула (20), фигурирующая там функция  $f(u)$  дается формулой (19). Так функция  $N_k(t)$  может быть вычислена в каждом практически важном случае.

В § 2. доказывается, что функции  $N_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, 2l$ ) принимают свое наибольшее значение в некоторой точке  $t_k$  ( $0 < t_k < \infty$ ), если  $N_l(0) = R$ ,  $N_k(0) = 0$ , если  $k \neq l$ .



# MATHEMATICAL TREATMENT OF THE REARRANGEMENT OF LINEAR METHYLSILICONE OILS, II.

A. PRÉKOPA and P. RÉVÉSZ

## Summary

In [1] the system of differential equations (1) is derived and solved under the conditions  $R = N$ ,  $N_1(0) = N$ ,  $N_k(0) = 0$ , if  $k > 1$ . In the present paper the general solution of (1) is considered. The generating function (2) and its transformed

$$h(u, v) = \frac{1}{R} g\left(u, \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{v}\right)$$

where  $2R$  is the number of monofunctional-units are introduced. It follows from (1) that  $h(u, v)$  satisfies the equation (4). For the initial condition  $h(u, 1) \equiv u^l$  (i. e.  $N_l(0) = R$ ,  $N_k(0) = 0$  if  $k \neq l$ ) the solution is given by (14). With the Taylor-expansion of  $h(u, v)$  for the function  $N_k(t)$  we obtain formulae (15), (16), (17). If  $l = 2$ , then (17) reduces to (18). For the initial condition  $h(u, 1) = d_0 + d_1 u + \dots + d_s u^s$  (i. e.  $N_0(0) = d_0 R$ ,  $N_1(0) = d_1 R, \dots, N_s(0) = d_s R$ ) we obtain as solution formula (20), where  $f(u)$  is given by (19). Hence the functions  $N_k(t)$  can be obtained for any practically interesting case. In §. 2 it is proved that if  $N_l(0) = R$ ,  $N_k(0) = 0$ , if  $k \neq l$ , then the functions  $N_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, 2l$ ) have maxima at  $t = t_k$  where  $0 < t_k < \infty$ .



## SZUPERPONÁLT VÉLETLEN JELZETEKET ALKALMAZÓ DOKUMENTÁCIÓS RENDSZEREK MATEMATIKAI KÉRDÉSEIRŐL

OROSZ GÁBOR<sup>1)</sup> és TAKÁCS LAJOS

### Bevezetés

A tudományos és szakirodalom nagy mértékű növekedése az irodalomkutatás új eljárásainak kifejlesztésére vezetett. Az irodalom feltárásának s e feltárás alapján nyújtandó adatszolgáltatásnak — közismert néven: dokumentációnak — korábbi egyéni és manuális jellegű módszerei helyett mind szélesebb körben az intézményes és mechanizált megoldások kerülnek alkalmazásra. A feltárási munkát helyi, országos vagy nemzetközi intézmények szakértői végzik, akik a dokumentumok (könyvek, tanulmányok, kutatási jelentések, műszaki-, szabadalmi- és szabvány-leírások, prospektusok stb.) tartalmáról egyrészt ismertető kivonatot készítenek, másrészt kiemelik abból a tudományos vagy gyakorlati használat szempontjából tekintetbe vehető adatokat, tudományos fogalmakat, szakkifejezéseket, jellemzőket. Eme analizáló munka eredményeként minden dokumentumról úgynevezett dokumentációs felvétel készül, amely a dokumentum bibliográfiai adatait, tartalmi kivonatát s a kiemelt adatokat tartalmazza. Az így elkészített tételek összessége dokumentációs gyűjteményt képez, mely hatalmas adattömegével a tudományos kutatás nélkülözhetetlen forrása. A gyűjtemény sorolási rendje a kiemelt adatok nyilvántartási módján alapszik, s így egy meghatározott témára anyagot keresni szintén ennek alapján lehet.

A fejlődés másik tényezője az adatszolgáltatás mechanizálása. A dokumentációs gyűjteményekben való keresés gyors és hibamentes lefolytatására különleges berendezéseket, úgynevezett dokumentációs szelektorokat szerkesztettek. E berendezések a gyűjtemény felvétel-tömegéből az adott témára reference-ként használható tételeket a vonatkozó adatok leérzékelése alapján automatikusan válogatják ki. A szelektoroknak részint a gyűjtemény terjedelméhez méretezetten, részint az alkalmazott technikai megoldások különbözősége folytán igen sokféle típusa használatos a manuális lyukkártyás szerkezetektől a Hollerith-rendszerű elektromos gépeken, a fotocellás filmszelektorokon keresztül egészen a digitális számológépekkel rokon elektronikus berendezésekig.

A szelektorok a dokumentumokból kiemelt adatokat az emberek közötti szokásos — írás- vagy hangbeli — közlési eljárások útján felvenni,

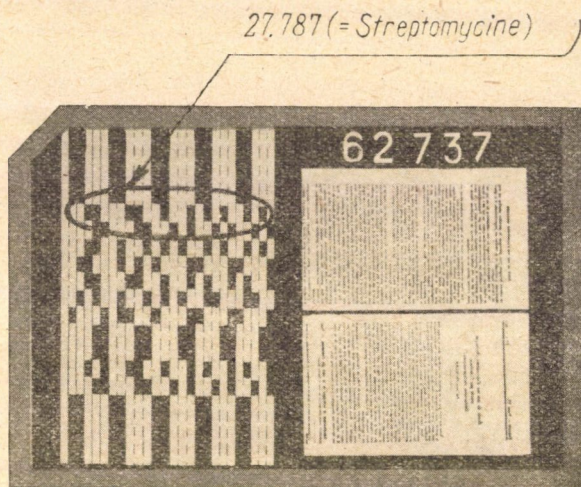
<sup>1)</sup> A budapesti Egyetemi Könyvtár munkatársa.



illetve ezek alapján feldolgozni a technikai fejlettség mai fokán nem képesek. Ezért a szelektorok leérzékelő szerkezete számára az adatokat megfelelő jelzésrendszer szerint leképezetten (átkódolva) kell az alkalmazott felvívó közegre (kártyára, filmre, magnetofon-szalagra) rávinni. A dokumentációs adatfeldolgozás és adatszolgáltatás munkamenete tehát jelzetelési eljárást — át- és visszakódolást — foglal magában.

A dokumentációs jelzésrendszereknek rendkívül sokféle típusa alakult ki. A jelzetek megválasztásának módja szerint három csoportba sorolhatók:

a) *Szisztematikus rendszerek.* Jelzeteik valamely tudományos-tároló rendszer alapján vannak szerkesztve. Ilyen például a kétsoros peremlyukasztású kártyákra szerkesztett metallurgiai dokumentációs rendszer, mely



1.a ábra

A Samain-féle Filmorex-szelektor egy filmlapja. Egysoros almezők 5 számjeggyű exkluzív jelzetekkel

az ASM—SLA Metallurgical Classification Systemen<sup>2)</sup> alapul. Vizsgálatuk tulajdonképpen a vonatkozó tudományos-tároló rendszer vizsgálatába megy át, tehát osztályozás- és tudományelméleti problémát képez.

b) *Jelentéselemekkel dolgozó rendszerek,* melyek a dokumentumban szereplő adatok, meghatározások szóképből leválasztott gyököket alkalmaznak jelzetekként. Ezt az eljárást alkalmazza a Perry-csoport által a kémiai dokumentáció céljaira szerkesztett jelzésrendszer, melynek jelzetei Hollerith-kártyákra tehetők, s feldolgozásukra a külön e célra szerkesztett IBM X794 Electronic Data Searching Machine szolgál. E rendszerek tanulmányozása elsősorban a jelentéstan körébe tartozik.

c) *Véletlenszerűen választott jelzeteket alkalmazó eljárások.* Ezeknél a jelzetek numerikus vagy alfabetikus, avagy numerikus és alfabetikus kom-

<sup>2)</sup> ASM—SLA Metallurgical Literature Classification. Prepared by a Joint Committee of the American Society for Metals and the Special Libraries Association. Cleveland, 1950.



binatorikus formációk, melyeket teljesen tetszésszerűen választással rendelünk a leképezendő fogalmakhoz, természetesen azzal a megkötéssel, hogy minden fogalomnak saját egyedi jelzete legyen. E rendszereknél részint a jelzetek struktúrája, részint véletlenszerű megválasztása s bejelölési módja folytán bizonyos matematikai problémák lépnek fel. Az alábbiakban éppen ezeket fogjuk behatóbb vizsgálat tárgyává tenni.

A	B	C	E	D	A	B	C	E	D	A	B	C	E	D	A	B	C		
D	E	C	B	A	D	E	C	B	A	D	E	C	B	A	D	E			

1.b ábra

A Microfilm Rapid Selector jelmezejének részlete 7 számjegyű exkluzív jelzetek felvételére szolgáló 2 soros almező 5 jelhelyes mezőszelvényekkel

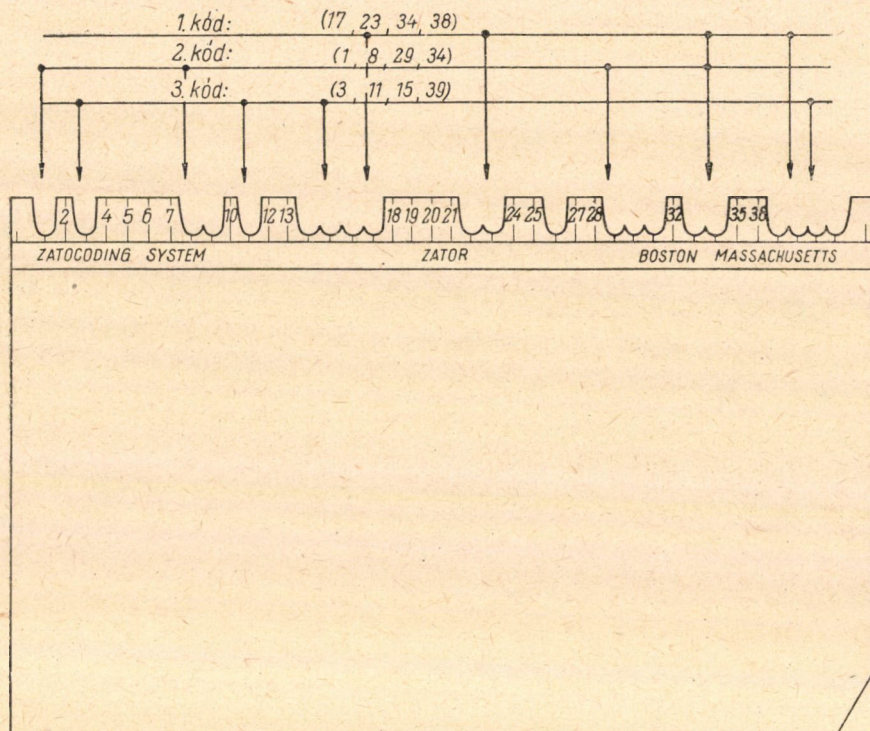
	A	B	C	D	E
0	◆	◆			
1	◆		◆		
2	◆			◆	
3	◆				◆
4		◆	◆		
5		◆		◆	
6		◆			◆
7			◆	◆	
8			◆		◆
9				◆	◆

1.c ábra

A Microfilm Rapid Selector kódrendszerének kulcsa

A véletlenszerű rendszerek jelzeteit a jelmezőbe, illetve ennek elhatárolt részeibe, az almezőkbe, kétféleképpen jelölhetjük be. Vagy úgy, hogy az almezők mindegyikébe az éppen soronkövetkező jelzet kerül. Így bármelyik jelzet akármelyik almezőbe juthat, de ha az almező egy jelzetet már felvett, többet nem jelölhetünk bele. (Lásd: 1.a, b, c ábrák.) Ezek az úgynevezett esetleges elhelyezésű exkluzív jelzetek. Vagy pedig úgy történhetik a bejelölés, hogy a jelzeteket a jelmezők, illetve az almezők meghatározott pozícióihoz rögzítjük, de ugyanakkor a jelmezőben egymáson keresztül-kasul futtatva több jelzetet is bejelölünk. (Lásd: 2. ábra.) Ezek a rögzített elhelyezésű szuperponált jelzetek.





2. ábra

Dokumentációs-kártya az elektrovibrátoros Zator-szelektorhoz.  
 Línearis szuperpozíciós jelmező kombinációs jelzetekkel

Mielőtt tovább mennénk, közbevetőleg közöljük a következőkben használt jelöléseinket:

- $n$  ..... a jelmező pozícióinak száma
- $p$  ..... a jelmező almezőinek száma
- $v$  ..... a jelzet elemeinek száma
- $m$  ..... egy almező pozícióinak száma
- $q$  ..... a szuperponált rendszerekben az egyes almezőkbe eső jelzetrészek pozícióinak száma
- $N$  ..... egy jelmezőbe bejelölhető jelzetek száma
- $W$  ..... a jelzésrendszer összes jelzeteinek száma, a leképezhető fogalmak összessége.

Az exkluzív csoportba tartozó jelzésrendszerek közös jellemzője, hogy egy jelzetelem leképezéséhez a jelmezőnek egynél több pozíciója szükséges;

a jelmező kongruens almezőkre osztott;

minden almező egyetlen teljes jelzet felvételére szolgál, tehát ezeknél

$$N = p.$$



Egyedi jellemzőjük éppen jelzetképeiknek struktúrája. A jelzetek leképezése ugyanis lehet:

*Biner*: ekkor a tízes számrendszerben megadott jelzet biner számokra áttett formában van bejelölve. A jelzet biner képe az egymás után következő almező-pozíciók jelzeteltségének, illetve jelzeteletlenségének rendjéből adódik. Csak numerikus jelzetek leképezésére alkalmazható. A rendszer kapacitása:

$$W = 2^m - 1.$$

*Szemibiner*: az almezők  $v$  számú kongruens szelvényre vannak osztva. A szelvényekbe az egyes jelzetelemek biner formában kerülnek be, s e bejelölésekből az almezőben a teljes jelzet szemibiner képe tevődik össze. Az almező-szelvények terjedelme numerikus jelzetelem esetén 4, alfabetikus jelzetelem esetén 5 pozíció, mivel a 0–9, illetve 1–26 számok biner ekvivalenseinek leképezéséhez ennyi pozíció szükséges. Ennélfogva

numerikus jelzetek esetében	$m = 4v$ és $W = 10^v$
alfabetikus jelzetek esetében	$m = 5v$ és $W = 26^v$ .

*Kombinatorikus*: az almezők itt is  $v$  számú szelvényre osztottak. A jelzetelemek képei a szelvények pozícióiból alkotott egyazon osztályba tartozó ismétlés nélküli kombinációk. A jelzetek viszont a jelzetelemek ismétléses variációi. Numerikus jelzetelemek számára 5 pozíciós szelvény szükséges, amelyben 2–2 pozíció jelölésével képezhetők le a számjegyek. Alfabetikus jelzetelemeknek 7 pozícióból álló szelvények kellenek, mert 7 az a legkisebb szám, amelynek annyi azonos osztályú (3-adosztályú) kombinációja képezhető, amennyi az alfabetum jegyeinek számát felülről legjobban közelíti. Az almezők  $m = 5v$ , illetve  $m = 7v$  terjedelműek. A jelzésrendszerek kapacitása ugyanakkora, mint a szemibiner leképezésű rendszereké.

A szuperpozíciós rendszereket az előbb tárgyaltakkal szemben éppen az jellemzi, hogy:

minden jelzetelem leképezése egyetlen pozíció igénybevételével történik;

a jelzetelemek és a vonatkozó pozíciók közötti kapcsolat szükségszerű, ennél fogva a jelzet képe a rendre következő tételek (kártyák, filmkockák) jelmezőiben mindig ugyanazon pozíciókból áll;

a jelmező lehet osztatlan vagy almezőkre osztott — ez utóbbi esetben az egyes almezőkbe nem a teljes jelzetkép, hanem annak csupán vonatkozó része esik;

a jelzetelemek tetszés szerinti megválasztása és a jelzetek szuperponálódása folytán egyes pozíciókon többszörös jelzeteltség állhat elő.

A jelzet szerkezete szerint a szuperponált rendszer lehet:

*Kombinációs*: a jelmező egyetlen összefüggő egész, s ennek pozícióiból képezett  $v$ -adosztályú ismétlés nélküli kombinációk a jelzetek, vagyis

$$W = \binom{n}{v}.$$



*Variációs:* A jelmező  $v$  számú kongruens almezőre van osztva, s a jelzetek az egyenként  $m$  pozícióból álló almezők egy-egy pozíciójából képezett  $v$ -adosztályú ismétléses variációk. Így

$$n = mv, \quad W = m^v.$$

*Variációs—kombinációs:* A jelmező  $p$  számú kongruens almezőre osztott. A jelzetek az egymás után következő almezők pozícióiból választott  $q$  számosságú csoportokból tevődnek össze, vagyis a  $p$  számú almező  $m$  számosságú pozícióiból képezett  $q$ -adosztályú ismétlés nélküli kombinációk  $p$ -adosztályú ismétléses variációi. Tehát

$$n = pm, \quad v = pq, \quad W = \binom{m}{q}^p.$$

Mind az exkluzív, mind a szuperpozíciós típusnak megvannak a maga kétségtelen előnyei, amelyek használatukat adott esetben indokoltá teszik, de vannak hátrányai is.

Exkluzív jelzetek alkalmazása esetén szelektáláskor kizárólag azokat a tételeket kapjuk, amelyek a szelektálás szempontjait képező jelzeteket ténylegesen tartalmazzák, vagyis, amelyek a szóbanforgó problémára valóban szolgáltatnak reference-anyagot. Hátrányuk, hogy a jelzetek elhelyezésének esetlegessége következtében komplikáltabb leérzékelő mechanizmus szükséges, mert a kívánt jelzetet a jelmezőben meg kell keresni. Ha pedig több jelzetnek szimultán leérzékelése szükséges, akkor megfelelő memória-berendezésről kell gondoskodni a korábban befutott leérzékelések tárolására az utolsó beérkeztéig. Oly szelektoroknál, amelyekben ilyen különleges technikai berendezés nem alkalmazható, mint például a peremlyukasztású kártyákkal dolgozó egyszerű kézi berendezéseknél, az exkluzív típusú jelzetek nem is használhatók.

A szuperponált jelzetek megtalálása éppen rögzített elhelyezésük következtében a vonatkozó pozíciók leérzékelése folytán közvetlenül adódik. A leérzékelő mechanizmus a szelektálás alapjául szolgáló jelzetek pozícióira eleve beállítható, s így találat esetén egy viszonylag egyszerű kiváltószervezet útján hajtható végre a kívánt tétel kiemelése a többi közül. Memóriaszerkezetre nincs szükség, mert az összes vonatkozó pozíciók leérzékelése egyidejűleg következik be. Másik előnyük, hogy az igénybe veendő jelmező az előbbi típus jelmezőihez képest lényegesen kisebb terjedelmű, ami szintén fontos körülmény, tekintettel a szelektorok adatfelvevő közegének terjedelmét determináló technikai szempontokra. Viszont hátrányt jelent az a tény, hogy a jelzetek szuperpozíciója következtében más jelzeteknek a keresett jelzet pozícióival azonos pozícióiból a keresett jelzet fiktív mása imitálódik, s ennek következtében a szelektálás eredményeként kapott tételek között fölös, a vizsgált témára anyagot nem szolgáltatató tételek is előfordulhatnak. Ezeket kiválogatni, azaz a szelektálás eredményét hibamentessé tenni már csak emberi munkával lehet.

Az alábbi táblázatban két konkrét esetre közöljük az exkluzív és szuperponált rendszerek különböző fajtáinak jelmező terjedelmét:



$N = 12$	$W \approx 100\,000$			$W \approx 1\,000\,000$		
	$n$	$r$	$m$	$n$	$r$	$m$
<i>Szuperponált rendszerek</i>						
Kombinációs .....	70	4	—	72	4	—
Kombinációs .....	—	—	—	85	5	—
Kombinációs—variációs .....	70	4	35	92	4	46
Variációs .....	72	4	18	90	5	18
<i>Exkluzív rendszerek</i>						
Biner .....	204	—	17	240	—	20
Szemibiner—numerikus .....	240	5	20	288	6	24
Szemibiner—alfabetikus .....	240	4	20	300	5	25
Kombinatorikus (numerikus) .....	300	5	25	360	6	30
Kombinatorikus (alfabetikus) .....	336	4	28	420	5	35

A fent tárgyalt kérdéseknek az utóbbi években igen gazdag irodalma fejlődött ki. Elsősorban R. S. CASEY és J. W. PERRY [1] könyvét említjük meg, amelyben C. S. WISE írt egy fejezetet a szuperponált kódrendszerek matematikai kérdéseiről (276—302. oldalak). Az említett könyv a kérdés irodalmának kiterjedt összefoglalását tartalmazza. A szuperpozíciós rendszerek matematikai vizsgálatával C. N. MOOERS [2], [3], [4] munkáiban foglalkozik. Ezen munkák többnyire közelítő megoldásokat tartalmaznak. Pontos megoldást a [4] munka tartalmaz, amelyben módszert ad a jelzett pozíciók száma eloszlásának meghatározására. Eljárása rekurzív képleteken alapszik, amelyeket Boole-algebra segítségével nyer. A felmerülő problémák egzakt és közelítő megoldását a szerzők [5] dolgozatukban adták meg, további általánosításokat pedig [6] tartalmaz. Jelen dolgozat eredményei azonosak az [5] dolgozatban korábban közölt eredményekkel.

A következőkben rátérünk a szuperpozíciós rendszerek speciális matematikai problémáinak vizsgálatára.

### 1. §. A szuperpozíciós rendszerek matematikai problémái

Mint már a bevezetésben említettük, tegyük fel, hogy a dokumentációt  $n$  pozíciót tartalmazó lapokon végezzük. Minden egyes dokumentumról egy lapot készítünk, amely  $N$  jelzetet (kódot) tartalmaz. Minden egyes jelzetnek megfelelően a lapon  $r$  pozíciót kilyukasztunk.<sup>3)</sup> Feltesszük, hogy a jelmező  $p$  számú kongruens almezőre van osztva, amelyek mindegyike  $m$  pozícióból áll. Tehát  $n = mp$ . Továbbá feltesszük, hogy az egyes kódoknak minden egyes almezőben  $q$  pozíció felel meg, azaz  $r = pq$ . Tekintsük a 3. ábrát, amely  $n = 36$ ,  $p = 2$ ,  $r = 6$ ,  $m = 18$  adatokkal jellemzett lap skémáját tünteti fel, és  $N = 3$  kód bejelölését tartalmazza, amelyek a következők: (2, 7, 14, 8, 12, 18), (4, 14, 18, 1, 12, 15), (7, 9, 14, 3, 6, 14).

<sup>3)</sup> A továbbiakban egyszerűség kedvéért mindig „lapokat” és „lyukasztást” mondunk. Megállapításaink természetesen általánosak, és a „lapok” alatt a szelektor adatfelvevő közegének egysége, „lyukasztáson” pedig a jelmező elem (pozíció) jelzettsége értendő.



1		3		5	6		8	
10	11	12	13		15	16	17	
	2		4	5		7		9
10	11		13			16	17	

3. ábra

Kombinációs—variációs módszer

A fent vázolt eljárás a kombinációs—variációs módszer. Ha speciálisan  $p = 1$ , akkor a kombinációs módszert nyerjük, míg ha  $q = 1$ , akkor a variációt. Így elég a kombinációs—variációs módszerrel foglalkozni, abból speciálisan kiadódik a másik két módszer.

Az egyes fogalmakhoz tartozó kódokat véletlenszerűen állapítjuk meg, mégpedig a lehetséges

$$W = \binom{m}{q}^p$$

számú kód mindegyike ugyanazon valószínűséggel jöhet tekintetbe. A hozzárendelést végezhetjük a következőképpen: Az összes lehetséges  $W$  számú kódnak megfelelő lapocskákat készítünk, és azokat elhelyezzük egy urnában. Minden egyes új fogalomhoz úgy rendelünk hozzá kódot, hogy az urnából *visszatevés nélkül* húzunk egy lapocskát. Természetesen ismétlődő fogalmakhoz mindig ugyanolyan kódot rendelünk. A fenti modell felhasználásával nyert eredmények pontosak. Ha  $W \gg N$ , akkor jó közelítéssel alkalmazhatunk egy, az előzőhöz hasonló modellt, csupán feltesszük, hogy az urnából a húzásokat *visszatevéssel* végezzük. Ekkor persze előfordulhat, hogy ugyanazon kódot különböző fogalmakhoz rendeljük hozzá, de ennek igen kicsiny a valószínűsége, és az eredményekben alig jut kifejezésre ennek a közelítésnek a hatása.

Bevezetjük a következő jelöléseket: Legyen  $\eta$  az egy lapon lyukasztott pozíciók száma. A fenti feltevésből következik, hogy  $\eta$  valószínűségi változó. Ennek eloszlása, várható értéke, szórása és momentumainak meghatározása

bír érdekességgel. Legyen  $\mathbf{P}\{\eta = k\} = P_k$  és  $\mathbf{M}\left\{\binom{\eta}{s}\right\} = B_s$ , úgy  $\mathbf{M}\{\eta\} = B_1$

és  $\mathbf{D}^2\{\eta\} = 2B_2 + B_1 - B_1^2$ . Továbbá jelölje  $\chi$  valószínűségi változó egy tetszőlegesen választott pozíció esetén azt, hogy az hányszor van jelzetelve. Legyen  $\mathbf{P}\{\chi = j\} = p_j$ . A dokumentációs szelekció szempontjából igen fontos annak a valószínűségét megállapítani, hogy  $s$  kód szerinti szelekció alkalmával szelektálva legyen egy olyan lap, amelyen nincs mind az  $s$  kód bejelölve. Jelölje ennek a valószínűségét  $R_s$ . Ez szolgáltatja a nem kívánatos lapok kiválasztásának valószínűségét. Ehhez viszont szükséges ama valószínűség ismerete, hogy egy lapon meghatározott  $\mu$  pozíció lyukasztva legyen. Jelölje ezt  $Q_\mu$ .



A következőkben a fenti valószínűségek és várható értékek meghatározásával fogunk foglalkozni. Megadjuk ezek explicit alakját a pontos és a közelítő esetben egyaránt. Az általános tárgyalás előtt a  $p = 1$ -nek megfelelő speciális esettel foglalkozunk, mivel ez gyakorlatilag a legfontosabb eset és elméletileg a legegyszerűbben tárgyalható. Ezután a legáltalánosabb kombinációs—variációs módszert tárgyaljuk, amelyből speciálisan adódik a kombinációs és variációs módszer. A probléma tovább általánosítható arra az esetre is, midőn a jel-mezőkben az egyes almezőkbe eső pozíciók száma és a kód elemeinek az egyes almezőkbe eső része különböző. Ezzel jelenleg nem foglalkozunk. A szerzők [6] dolgozata vizsgálja ezt az esetet.

A felvetett kérdések megoldására JORDAN KÁROLY [7] általános valószínűségi tételét használjuk fel.

## 2. §. Az általános valószínűségi tétel

Tekintsünk egy véletlen kísérletet, amelynek eredményét az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  események bekövetkezése szempontjából vizsgáljuk. Jelölje  $\xi$  valószínűségi változó az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  események közül bekövetkezők számát. A  $\xi$  valószínűségi változó a  $0, 1, 2, \dots, n$  értékeket veheti fel. Vezessük be továbbá a következő jelöléseket:  $\mathbf{P}\{\xi = k\} = P_k(A_1, A_2, \dots, A_n)$  és

$$\mathbf{M}\left\{\binom{\xi}{k}\right\} = B_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

JORDAN KÁROLY 1927-ben megjelent [7] dolgozatában közölte az úgynevezett *általános valószínűségi tételt*, amely a fenti jelölésben a következő:

$$(1) \quad P_k(A_1, A_2, \dots, A_n) = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{j}{k} S_j,$$

ahol  $S_0 = 1$ , és  $j = 1, 2, \dots, n$  esetén

$$(2) \quad S_j = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_j)} \mathbf{P}\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_j}\},$$

ahol az összegezés kiterjesztendő az  $(1, 2, \dots, n)$  számokból alkotható valamennyi  $j$ -edosztályú  $(i_1, i_2, \dots, i_j)$  ismétlés nélküli kombinációra.

A fenti tételeknek fontos speciális esetét kapjuk, ha feltesszük, hogy az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  események ekvivalens események. Ezen azt értjük, hogy bárhogyan is választunk ki az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  események közül  $j$  számú különbözőt ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), ezen események együttes bekövetkezésének a valószínűsége független a kiválasztás módjától és csupán a  $j$  számtól függ, azaz fennállnak a

$$\mathbf{P}\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_j}\} = \mathbf{P}\{A_1 A_2 \dots A_j\}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n, \\ j = 1, 2, \dots, n$$

összefüggések. Vezessük be ekkor a következő jelölést:  $\pi_0 = 1$ , és  $j = 1, 2, \dots, n$  esetén

$$\pi_j = \mathbf{P}\{A_1 A_2 \dots A_j\}.$$



Ekkor speciálisan ekvivalens eseményekre (1) és (2) a következő egyszerűbb alakot ölti:

$$(3) \quad \begin{aligned} P_k(A_1, A_2, \dots, A_n) &= \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \binom{n}{j} \pi_j = \\ &= \binom{n}{k} \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{n-k}{n-j} \pi_j \end{aligned}$$

és

$$(4) \quad S_j = \binom{n}{j} \pi_j.$$

Megjegyezzük, hogy a  $\xi$  változó várható értéke:

$$(5) \quad \mathbf{M}\{\xi\} = S_1,$$

szórásnégyzete:

$$(6) \quad \mathbf{D}^2\{\xi\} = 2S_2 + S_1 - S_1^2$$

és  $s$ -edik momentuma:

$$(7) \quad \mathbf{M}\{\xi^s\} = \sum_{j=1}^s j! \mathfrak{S}_s^j S_j,$$

ahol  $\mathfrak{S}_s^j$  a másodfajú Stirling-számokat jelöli.

A fentiekkel kapcsolatban utalunk még az egyik szerző [8] dolgozatára.

### 3. §. Az osztatlan jelmező esete

Tekintsük most a  $p = 1$  speciális esetet, vagyis azt az esetet, midőn az  $n$  pozícióval rendelkező lapokra  $N$  számú  $v$  elemből álló kódot jelölünk be.

Ekkor a lehetséges kódok száma, a szókinsz:  $W = \binom{n}{v}$ .

Jelölje most  $A_1, A_2, \dots, A_n$  rendre azt az eseményt, hogy a vizsgált lapon az első, a második, ..., az  $n$ -edik pozíció nincs lyukasztva. Mint könnyen belátható, a pontos és a közelítő modell esetén egyaránt érvényes, hogy az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  események ekvivalens események, és annak a valószínűsége, hogy közülük  $j$  számú előfordul, a pontos modell esetén:

$$(8) \quad \mathbf{P}\{A_1 A_2 \dots A_j\} = \frac{\binom{n-j}{v}}{\binom{n}{v}},$$



a közelítő modell esetén pedig :

$$(9) \quad \mathbf{P}\{A_1 A_2 \dots A_j\} = \left[ \frac{\binom{n-j}{v}}{\binom{n}{v}} \right]^N.$$

Legyen a rövidség kedvéért  $\mathbf{P}\{A_1 A_2 \dots A_j\} = \pi_j$ . A fenti képletek könnyen adódnak a visszatevés nélküli és a visszatevéses húzások alapján.

1°. *A lyukasztott pozíciók számának eloszlása.* Most nyilvánvalóan felírhatjuk, hogy  $P_k = \mathbf{P}\{\eta = k\} = P_{n-k}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ . Ugyanis a lapon akkor lesz  $k$  pozíció lyukasztva, ha az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  események közül pontosan  $k$  nem fordul elő, vagyis  $n - k$  fordul elő. Mivel (3) szerint ekvivalens eseményekre

$$P_{n-k}(A_1, A_2, \dots, A_n) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \pi_{n-j},$$

tehát a pontos modell esetén :

$$(10) \quad P_k = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{v}} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{j}{v} \binom{N}{N},$$

a közelítő modell esetén pedig :

$$(11) \quad P_k = \frac{\binom{n}{k}}{\left[\binom{n}{v}\right]^N} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \left[\binom{j}{v}\right]^N.$$

Speciálisan mindkét modellre :

$$\mathbf{M}\{\eta\} = n(1 - \pi_1)$$

és

$$\mathbf{D}^2\{\eta\} = n^2(\pi_2 - \pi_1^2) + n(\pi_1 - \pi_2).$$

2°. *A pozíciók lyukasztási multiplicitása.*  $\chi$ -vel jelöljük azt a változót, amely azt mutatja, hogy egy kiválasztott pozíció hányszorosan van lyukasztva. A  $\mathbf{P}\{\chi = j\} = p_j$  valószínűsége könnyen felírható a pontos modell esetén, hogy



$$(12) \quad p_j = \frac{\binom{n-1}{v-1} \binom{n-1}{N-j}}{\binom{n}{v}},$$

a közelítő modell esetén pedig:

$$(13) \quad p_j = \binom{N}{j} \left(\frac{v}{n}\right)^j \left(1 - \frac{v}{n}\right)^{N-j}.$$

Ugyanis az  $\binom{n}{v}$  lehetséges kód között  $\binom{n-1}{v-1}$  olyan van, amely egy kiválasztott pozíciót tartalmaz, és  $\binom{n-1}{v}$  olyan van, amely azt nem tartalmazza. Az első esetben visszatevés nélkül történik a húzás, míg a másodikban visszatevéssel és  $\binom{n-1}{v-1} : \binom{n}{v} = \frac{v}{n}$  a kedvező kód húzásának a valószínűsége.

Mindkét esetben

$$\mathbf{M}\{\chi\} = N \frac{v}{n}.$$

A pontos esetben:

$$\mathbf{D}^2\{\chi\} = N \frac{v}{n} \left(1 - \frac{v}{n}\right) \left(1 - \frac{N-1}{\binom{n}{v} - 1}\right),$$

a közelítő esetben pedig:

$$\mathbf{D}^2\{\chi\} = N \frac{v}{n} \left(1 - \frac{v}{n}\right).$$

3°. Az *extra kártyák kiválasztásának a valószínűsége*. Tegyük fel, hogy egy vagy több kód szerint szelektálást végzünk. Ekkor kiválasztódnak mindazon kártyák, amelyeken ez a kód vagy ezek a kódok ténylegesen be vannak jelölve, de esetleg kiválasztódnak olyan kártyák is, amelyeken a speciális kód vagy kódok nem szerepelnek, de a többi kód szuperpozíciója révén kiadódnak. Kérdés, mennyi a valószínűsége annak, hogy egy olyan kártya kiválasztódik, amelyen a szelektálás alapjául szolgáló kód vagy kódok nincsenek bejelölve. Jelölje ezt a valószínűséget  $s$  kód szerinti szelektálás esetén  $R_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ). Ezt a valószínűséget a következő valószínűség segítségével határozhatjuk meg. Jelölje  $Q_\mu$  annak a valószínűségét, hogy egy kártyán kiválasztott  $\mu$  pozíció lyukasztva van. Az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  események ekvivalenciájából következik, hogy ez a valószínűség:



$$Q_\mu = \mathbf{P}\{\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_\mu\}$$

Ez pedig JORDAN KÁROLY (3) tételének alkalmazásával a következőképpen fejezhető ki a  $\pi_j$  mennyiségek segítségével:

$$Q_\mu = \sum_{j=0}^{\mu} (-1)^j \binom{\mu}{j} \pi_j.$$

Ugyanis most annak a valószínűségéről van szó, hogy az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  események közül egy sem fordul elő, azaz a  $P_0(A_1, A_2, \dots, A_n)$  valószínűségről. Most a pontos modell esetén

$$(14) \quad Q_\mu = \frac{1}{\binom{n}{v}} \sum_{j=0}^{\mu} (-1)^j \binom{\mu}{j} \binom{n-j}{v} \binom{n}{N},$$

a közelítő modell esetén pedig:

$$(15) \quad Q_\mu = \frac{1}{\left[\binom{n}{v}\right]^N} \sum_{j=0}^{\mu} (-1)^j \binom{\mu}{j} \left[\binom{n-j}{v}\right]^N.$$

Speciálisan annak a valószínűsége, hogy egy kártyán egy kijelölt kód pozíciói lyukasztva vannak,  $Q_v$ : ugyanis egy kód  $v$  számú elemet tartalmaz. Most felírható a pontos modell esetén, hogy

$$Q_v = \frac{N}{\binom{n}{v}} + \left(1 - \frac{N}{\binom{n}{v}}\right) R_1,$$

a közelítő modell esetén pedig:

$$Q_v = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\binom{n}{v}}\right)^N\right] + \left(1 - \frac{1}{\binom{n}{v}}\right)^N R_1.$$

A fenti képletek a teljes valószínűség tétele alapján adódnak. Ugyanis  $Q_v$  annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott kódnak megfelelő pozíciók ki vannak lyukasztva a kártyán, és ez két egymást kizáró módon jöhet létre: az illető kód vagy tényleg szerepel a kártyán — aminek a valószínűsége a pontos modell esetén  $N/\binom{n}{v}$ , a közelítő modell esetén pedig  $1 - \left(1 - 1/\binom{n}{v}\right)^N$

és ekkor 1 valószínűséggel ki vannak lyukasztva a megfelelő pozíciók; vagy az illető kód nem szerepel — aminek a valószínűsége a pontos modell esetén



$1 - N / \binom{n}{v}$ , a közelítő modellnél pedig  $\left(1 - 1 / \binom{n}{v}\right)^N$ , de a többiek szuperpozíciója révén kiadódik, aminek a valószínűsége  $R_1$ .

Így tehát egy kód szerinti szelektáláskor annak a valószínűsége, hogy egy olyan kártyát is kiválasztunk, amely nem kívánatos, a pontos modell esetén

$$(16) \quad R_1 = \frac{Q_v - N / \binom{n}{v}}{1 - N / \binom{n}{v}},$$

a közelítő modell esetén pedig

$$(17) \quad R_1 = \frac{Q_v - \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\binom{n}{v}}\right)^N\right]}{\left(1 - \frac{1}{\binom{n}{v}}\right)^N}.$$

Ha egyidejűleg több kód szerint végezzük a szelektálást, úgy először össze kell számolni, hogy ezen kódok szuperpozíciója összesen hány különböző elemet tartalmaz. Tegyük fel, hogy  $s$  kód szerint végezzük a szelektálást, és az összes különböző elemek száma  $\mu$ . Ekkor  $Q_\mu$  szolgáltatja annak valószínűségét, hogy az  $s$  kód szuperpozíciójának megfelelő  $\mu$  pozíció a kártyán ki van lyukasztva. Most a fentihez hasonló okoskodással felírható a pontos modell esetén:

$$Q_\mu = \frac{\binom{\binom{n}{v} - s}{N - s}}{\binom{\binom{n}{v}}{N}} + \left[1 - \frac{\binom{\binom{n}{v} - s}{N - s}}{\binom{\binom{n}{v}}{N}}\right] R_s,$$

a közelítő modell esetén pedig:

$$Q_\mu = \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} \left[1 - \frac{j}{\binom{n}{v}}\right]^N + \left\{1 - \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} \left[1 - \frac{j}{\binom{n}{v}}\right]^N\right\} R_s.$$

A pontos modell esetén ugyanis

$$\frac{\binom{\binom{n}{v} - s}{N - s}}{\binom{\binom{n}{v}}{N}}$$



annak a valószínűsége, hogy az  $N$  kód között mind az  $s$  megjelölt kód szerepel, míg a közelítő modell esetén JORDAN KÁROLY (3) tétele alapján könnyen nyerjük, hogy

$$\sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} \left[ 1 - \frac{j}{\binom{n}{v}} \right]^N$$

a kívánt valószínűség. Így tehát a pontos modell esetében:

$$(18) \quad R_s = \frac{Q_\mu - \left( \binom{n}{v} - s \right) / \left( \binom{n}{N} \right)}{1 - \left( \binom{n}{v} - s \right) / \left( \binom{n}{N} \right)},$$

a közelítő modellnél pedig:

$$(19) \quad R_s = \frac{Q_\mu - \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} \left[ 1 - \frac{j}{\binom{n}{v}} \right]^N}{1 - \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} \left[ 1 - \frac{j}{\binom{n}{v}} \right]^N}.$$

Megjegyezzük, hogy ama valószínűségek, amelyek azt fejezik ki, hogy az  $N$  kód közül kiválasztott  $s$  kód be van jelölve a kártyán, nem bírnak különösebb fontossággal. Ugyanis szelektáláskor mindazon kártyák, amelyek a megjelölt kódok szerepelnek, minden esetben kiesnek. A fenti valószínűségek csak tájékoztató adatot szolgáltatnak a kódok előfordulására, ha az egyes fogalmak egyenlően valószínűen fordulnak elő. A nem kívánatos kártyák számának megbecslésére azonban jól alkalmazható a fenti  $R_s$  valószínűség. Ha összesen  $S$  kártyánk van, úgy  $s$  kód szerinti szelektáláskor a nem kívánatos kártyák várható száma  $SR_s$ .

Az eddig megadott exakt formulák birtokában lehetőség van arra, hogy szuperpozíciós kódokkal dolgozó dokumentációs rendszerek tervezésénél az eddig alkalmazott közelítő formulák helyett pontosabbakat alkalmazzunk, és így valóban optimális viszonyokat érjünk el.

#### 4. §. Az osztott jelmező esete

Tekintsük most a bevezetésben említett általános esetet, midőn a jelmező  $p$  számú kongruens almezőre van osztva. Ekkor a lehetséges kódok száma, a szókinsz:  $W = \binom{m}{q}^p$ . A kódok választása a pontos modellnél vissza-



tevés nélküli húzással, a közelítő modellnél pedig visszatevéses húzással történik.

Jelölje rendre  $A_1, A_2, \dots, A_n$  azt az eseményt, hogy a vizsgált kártyán az első, a második, ..., az  $n$ -edik pozíció nincs lyukasztva. Az osztott jelmezű esetében az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  események már nem lesznek ekvivalens események, de érvényes lesz, hogy ugyanazon almezőre vonatkozó események egymásközt ekvivalensek. Ha most meg akarjuk állapítani  $j$  számú esemény együttes előfordulásának a valószínűségét, akkor ez attól fog függni, hogy az egyes események közül a különböző almezőkre hány vonatkozik. Így a pontos modell esetén:

$$\mathbf{P}\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_j}\} = \frac{\binom{m-j_1}{q} \binom{m-j_2}{q} \dots \binom{m-j_p}{q}}{\binom{m}{q}^p},$$

ha az  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_j}$  események közül  $j_1$  számú az első,  $j_2$  számú a második, ... és  $j_p$  számú a  $p$ -edik almezőre vonatkozik. A fenti valószínűség a közelítő modell esetén:

$$\mathbf{P}\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_j}\} = \left[ \frac{\binom{m-j_1}{q} \binom{m-j_2}{q} \dots \binom{m-j_p}{q}}{\binom{m}{q}^p} \right]^N.$$

*I<sup>o</sup> A lyukasztott pozíciók számának eloszlása.* Most is, miként az osztatlan jelmezű esetében, felírható:  $P_k = \mathbf{P}\{\eta = k\} = P_{n-k}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ , és ezen utóbbi valószínűséget JORDAN KÁROLY (1) képlete szolgáltatja, amely szerint

$$(20) \quad P_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{n-j}{n-k} B_{n-j},$$

ahol a  $B_j$  mennyiségek most a  $\xi = n - \eta$  változó binomiális momentumait jelölik. (2) szerint a pontos modell esetén fennáll:

$$(21) \quad B_j = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_p=j} \binom{m}{j_1} \binom{m}{j_2} \dots \binom{m}{j_p} \frac{\binom{m-j_1}{q} \binom{m-j_2}{q} \dots \binom{m-j_p}{q}}{\binom{m}{q}^p},$$



a közelítő modell esetén pedig :

$$(22) \quad B_j = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_p=j} \binom{m}{j_1} \binom{m}{j_2} \dots \binom{m}{j_p} \left[ \frac{\binom{m-j_1}{q} \binom{m-j_2}{q} \dots \binom{m-j_p}{q}}{\binom{m}{q}^p} \right]^N.$$

Most  $\eta$  várható értéke :

$$\mathbf{M}\{\eta\} = n - B_1$$

és szórásnégyzete :

$$\mathbf{D}^2\{\eta\} = 2 B_2 + B_1 - B_1^2,$$

ahol a pontos modellre

$$B_1 = n \frac{\binom{m-1}{q} \binom{m}{q}^{p-1}}{\binom{m}{q}^p}.$$

és

$$B_2 = \frac{p \binom{m}{2} \binom{m-2}{q} \binom{m}{q}^{p-1} + m^2 \binom{p}{2} \binom{m-1}{q}^2 \binom{m}{q}^{p-2}}{\binom{m}{q}^p},$$

míg a közelítő modellre

$$B_1 = n \left( 1 - \frac{q}{m} \right)^N$$

és

$$B_2 = \frac{n(m-1)}{2} \left[ \left( 1 - \frac{q}{m} \right) \left( 1 - \frac{q}{m-1} \right) \right]^N + \frac{n(n-m)}{2} \left( 1 - \frac{q}{m} \right)^{2N}.$$

2°. *A pozíciók lyukasztási multiplicitása.* Jelölje ismét  $\chi$  egy kiválasztott pozíció lyukasztásának multiplicitását, és legyen  $p_j = \mathbf{P}\{\chi = j\}$ . A pontos modell esetén felírható, hogy

$$(23) \quad p_j = \frac{\binom{m-1}{q-1} \binom{m}{q}^{p-1}}{j} \frac{\binom{m-1}{q} \binom{m}{q}^{p-1}}{N-j} \frac{1}{\binom{m}{q}^p},$$



a közelítő modell esetén pedig

$$(24) \quad p_j = \binom{N}{j} \left(\frac{q}{m}\right)^j \left(1 - \frac{q}{m}\right)^{N-j}.$$

Most mindkét modellre :

$$\mathbf{M}\{\chi\} = N \frac{q}{m},$$

és a pontos modellre :

$$\mathbf{D}^2\{\chi\} = N \frac{q}{m} \left(1 - \frac{q}{m}\right) \left(1 - \frac{N-1}{\binom{m}{q}^p - 1}\right),$$

a közelítő modellre pedig :

$$\mathbf{D}^2\{\chi\} = N \frac{q}{m} \left(1 - \frac{q}{m}\right).$$

3°. Az *extra kártyák kiválasztásának a valószínűsége*. Az osztatlan jellemző esetéhez hasonlóan meg kell állapítani először a  $Q_v$  valószínűséget, vagyis annak a valószínűségét, hogy a szelektálás alapjául szolgáló kód elemeinek megfelelő pozíciók ki vannak lyukasztva. Ezt a valószínűséget szintén JORDAN KÁROLY általános valószínűségi tétele alapján írhatjuk fel. A pontos modell esetén az eredmény :

$$(25) \quad Q_v = \sum_{j=0}^v (-1)^j \sum_{j_1+j_2+\dots+j_p=j} \binom{q}{j_1} \binom{q}{j_2} \dots \binom{q}{j_p} \frac{\binom{m-j_1}{q} \binom{m-j_2}{q} \dots \binom{m-j_p}{q}}{\binom{m}{q}^p - N},$$

a közelítő modell esetén pedig :

$$(26) \quad Q_v = \sum_{j=0}^v (-1)^j \sum_{j_1+j_2+\dots+j_p=j} \binom{q}{j_1} \binom{q}{j_2} \dots \binom{q}{j_p} \left\{ \frac{\binom{m-j_1}{q} \binom{m-j_2}{q} \dots \binom{m-j_p}{q}}{\binom{m}{q}^p} \right\}^N.$$

Jelölje  $T_1$  annak a valószínűségét, hogy egy kiszemelt kód szerepel a kártyán. Erre könnyen beláthatóan fennáll a pontos modell esetén

$$(27) \quad T_1 = \frac{\binom{m}{q}^p - 1}{\binom{m}{q}^p - N} = \frac{N}{\binom{m}{q}^p}.$$



a közelítő modell esetén pedig:

$$(28) \quad T_1 = 1 - \left( 1 - \frac{1}{\binom{m}{q}^p} \right)^N.$$

Végül az  $R_1$  valószínűség a teljes valószínűség tétele alapján felírható

$$Q_v = T_1 + (1 - T_1) R_1$$

összefüggésből határozható meg, ahonnan

$$(29) \quad R_1 = \frac{Q_v - T_1}{1 - T_1}.$$

Ha a szelektálás egyidejűleg  $s$  kód szerint történik, úgy össze kell számolni, hogy ezen  $s$  kód szuperpozíciója összesen hány különböző elemet tartalmaz. Legyen ez  $\mu$ . Ezután meg kell nézni, hogy az egyes almezőkbe ezen elemekből hány jut. Legyenek ezek számai rendre  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ . Most annak a valószínűsége, hogy az  $s$  kiszemelt kód szuperpozíciójának megfelelő  $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p$  pozíció a kártyán lyukasztva van, JORDAN KÁROLY (3) tétele alapján a pontos modellre:

$$(30) \quad Q_\mu = \sum_{j=0}^{\mu} (-1)^j \sum_{j_1+j_2+\dots+j_p=j} \binom{\mu_1}{j_1} \binom{\mu_2}{j_2} \dots \binom{\mu_p}{j_p} \frac{\binom{m-j_1}{q} \binom{m-j_2}{q} \dots \binom{m-j_p}{q}}{\binom{m}{q}^p} \frac{N}{\binom{m}{q}^p},$$

a közelítő modellre pedig:

$$(31) \quad Q_\mu = \sum_{j=0}^{\mu} (-1)^j \sum_{j_1+j_2+\dots+j_p=j} \binom{\mu_1}{j_1} \binom{\mu_2}{j_2} \dots \binom{\mu_p}{j_p} \left\{ \frac{\binom{m-j_1}{q} \binom{m-j_2}{q} \dots \binom{m-j_p}{q}}{\binom{m}{q}^p} \right\}^N.$$

Jelölje  $T_s$  annak a valószínűségét, hogy  $s$  kiszemelt kód mindegyike szerepel a kártyán. A pontos modellre könnyen felírható, hogy

$$(32) \quad T_s = \frac{\binom{m}{q}^p - s}{\binom{m}{q}^p},$$



a közelítő modellre pedig JORDAN KÁROLY (3) tétele alapján

$$(33) \quad T_s = \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} \left[ 1 - \frac{j}{\binom{m}{q}} \right]^N.$$

Végül a teljes valószínűség tétele szerint fennáll:

$$(34) \quad Q_\mu = T_s + (1 - T_s) R_s,$$

és innen

$$R_s = \frac{Q_\mu - T_s}{1 - T_s}$$

szolgáltatja annak a valószínűségét, hogy egy olyan kártyát kiválasszunk, amelyen a kiszemelt  $s$  kód mindegyike nincs bejelölve.

(Beérkezett: 1956. augusztus 15.)

#### IRODALOM

- [1] R. S. CASEY—J. W. PERRY: *Punched cards, their applications to Science and Industry*. Reinhold, New York 1951.
- [2] C. N. MOOERS: *Application of random codes to the gathering of statistical information*. Zator Company, Boston, 1949.
- [3] C. N. MOOERS: *Zatocoding for punched cards*. Zator Company, Boston, 1950.
- [4] C. N. MOOERS: *The exact distribution of the number of positions marked in a Zatocoding field*. Zator Technical Bulletin No. 73., Boston (1952)
- [5] G. OROSZ—L. TAKÁCS: „Über die Codesysteme mit zufallsartig gewählten superponierten Koden.” *Dokumentation* 3 (1956) 9—22.
- [6] G. OROSZ—L. TAKÁCS: „Some probability problems concerning the marking of codes into the superimposition field.” *Journal of Documentation* (sajtó alatt).
- [7] JORDAN K.: „A valószínűségszámítás alapfogalmai” („Les fondements du calcul des probabilités”). *Matematikai és Fizikai Lapok* 34 (1927) 109—136.
- [8] TAKÁCS L.: „Az általános valószínűségi tételről.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 5 (1955) 467—476.

#### О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ ДОКУМЕНТАЦИОННЫХ СИСТЕМ С НАЛАГАЮЩИМИСЯ СЛУЧАЙНЫМИ КОДАМИ

G. OROSZ и L. TAKÁCS

#### Резюме

Введение знакомит с различными документационными системами. § 1. знакомит с математическими проблемами случайных налагающихся систем. Относящиеся сюда более ранние исследования содержатся в работах К. S. WISE [1] (стр. 272—302), С. N. MOOERS ([2], [3], [4]) авторов ([5], [6]). Работы [1], [2], [3] содержат приближенные решения. Точным решением проблемы занимается работа [4], но она не содержит явных формул, а дает лишь рекурсивный метод для их вычисления. Явное решение возникших вопросов в общем случае дается в предыдущих работах авторов [5] и [6]. Настоящая работа содержит результаты работы [5].



Документация со случайными кодами производится следующим образом. О каждом документе изготавливается перфокарта, на которой отмечается  $N$  типичных для данного документа понятий. Предположим, что данная перфокарта содержит  $n$  позиций ( $n$  возможностей перфорации), каждому понятию соотносится некоторый код с  $r$  элементами и код обозначается на перфокарте так, что соответствующие коду элементы перфорируются. Мы говорим о *неделимом поле знаков*, если элементы кода могут любым образом выбираться среди  $n$  позиций. Тогда число возможных кодов  $W = \binom{n}{r}$ . Мы говорим о *делимом поле знаков*, если поле знаков разбито на  $p$  одинаковых подполей, состоящих из  $m$  позиций, и элементы кода содержат по  $q$  позиций из каждого подполя. Тогда  $n = mp$  и  $r = pq$ . Число всевозможных кодов в этом случае  $W = \binom{m}{q}^p$ . Предположим, что к отдельным понятиям соответствующий код соотносится случайным выбором из всех возможных кодов. Нужно различать два случая: *при точном рассмотрении* предполагается, что к новому понятию коды соотносятся выбором без возвращения, в то время как *при приближенном рассмотрении* считается, что соотношение кодов производится выбором с возвращением.

При сделанных выше предположениях определяется 1° Число перфорированных позиций на перфокарте, распределение  $\eta$ , т. е. вероятности  $P\{\eta = k\} = P_k$ , математическое ожидание  $M\{\eta\}$ , дисперсия  $D^2\{\eta\}$  и моменты  $M\{\eta^s\}$ . 2° Пусть переменное  $\chi$  обозначает, сколько раз перфорирована выбранная на перфокарте позиция. Определяем распределение кратности перфорации  $\chi$ , т. е. вероятности  $P\{\chi = j\} = p_j$ , математическое ожидание  $M\{\chi\}$  и дисперсию  $D^2\{\chi\}$ . 3° Наконец, определяем  $R_s (s = 1, 2, \dots, N)$  вероятность того, что одновременно проводя селектацию по  $s$  кодам, выберем такую перфокарту, на которой не отмечены все  $s$  кодов, служащие основой для селектации. Коротко говоря,  $s$  вероятность исключительных перфокарт.

Упомянутые выше вероятности определяются следующим образом: вводятся события  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , обозначающие соответственно тот факт, что на перфокарте позиции  $1, 2, \dots, n$  не перфорированы, и к этим событиям применяется общая теорема К. ЖОРДАН [7]. (§ 2.)

В дальнейшем перечисляются относящиеся к вероятностям  $P_k, p_k, R_1$  и  $R_s$  формулы для следующих четырех случаев: а) неделимое поле знаков, точная модель, б) неделимое поле знаков, приближенная модель, в) делимое поле знаков, точная модель, г) делимое поле знаков, приближенная модель (§§ 3—4).

Относительно  $P_k$ : а) (10), б) (11), в) (20), где  $t$  определяется (21), г) (20), где  $B_j$  дается (22).

Относительно  $p_j$ : а) (12), б) (13), в) (23), г) (24).

Относительно  $R_1$ : а) (16), где  $Q_v$  дается (14), б) (17), где  $Q_v$  определяется (15), в) (29), где  $Q_v$  дается (25) и  $T_1$  (27), г) (29), где  $Q_v$  определяется (26), а  $T_1$  (28).

Относительно  $R_s$ : а) (18), где  $Q_\mu$  дается (14), б) (19), где  $Q_\mu$  определяется (15), в) (34), где  $Q_\mu$  дается (30), а  $T_s$  (32), г) (34), где определяется  $Q_\mu$  (31) и  $T_s$  (33).

Зная эти формулы, можно вместо применявшихся до сих пор приближенных формул применять точные формулы при планировании документационных систем и создать таким образом лучшие условия.

## ÜBER GEWISSE MATHEMATISCHE PROBLEME DER DOKUMENTATIONSSYSTEME MIT ZUFALLSARTIG GEWÄHLTEN SUPERPONIERTEN KODEN

G. OROSZ und L. TAKÁCS

### Zusammenfassung

In der Einführung werden die verschiedenen Dokumentationssysteme besprochen. §. 1. behandelt die mathematischen Probleme der zufallsartigen Superpositionssysteme. Diesbezügliche frühere Untersuchungen sind in den Arbeiten von C. S. WISE ([1], pp. 276—302), C. N. MOOERS ([2], [3], [4]) und denjenigen der Verfasser ([5], [6]) enthalten. Die Arbeiten [1], [2], [3] enthalten nur angenäherte Lösungen. Die exakte Lösung des Problems wurde in der Arbeit [4] mitgeteilt; sie enthält aber keine explizite Formel, nur eine rekursive Methode zur Berechnung derjenigen. Die



expliziten Lösungen der wichtigsten Fragen sind für den allgemeinen Fall in den früheren Arbeiten ([5], [6]) der Verfasser enthalten. Die gegenwärtige Arbeit reproduziert die Ergebnisse von [5].

Die Dokumentation durch zufallsartige Kodern geschieht folgendermassen. Von jedem Dokument wird eine Unterlage verfertigt, auf welche  $N$  Begriffe, die das betreffende Dokument charakterisieren, eingezeichnet werden. Es sei angenommen, dass die gegebene Karte  $n$  Positionen ( $n$  Durchlochungsmöglichkeiten) enthält, zu jedem einzelnen Begriffe ein Kod von  $v$  Elementen angeordnet wird, und die Kode auf der Unterlage derart eingezeichnet wird, dass die dem Elementen der Kode entsprechenden Positionen ausgelocht werden. Man spricht von einem *ungeteilten Kodefeld* wenn die Elemente der Kode aus den  $n$  Positionen beliebig ausgewählt werden können. Dann

wird die Anzahl der möglichen Kode  $W = \binom{n}{v}$  sein. Man spricht von einem *geteilten Kodefeld*, wenn das Kodefeld auf  $p$  gleiche Teilfelde mit je  $m$  Positionen geteilt ist und die Elemente der Kodern  $q$  Positionen aus jedem Teilfelde enthalten. Dann wird  $n = mp$  und  $v = pq$  sein. Die Anzahl aller möglichen Kodern wird dann  $W = \binom{m}{q}^p$  sein. Es wird

angenommen, dass die passende Kode durch zufallsartige Ziehen aus allen Kodern zu den einzelnen Begriffen zugeordnet werden. Es werden zwei Fälle unterschieden: Bei der *exakten Behandlung* nimmt man an, dass die Kodern durch Ziehen ohne Zurückwerfen zu den neuen Begriffen zugeordnet werden; bei der *angenäherten Behandlung* wird es angenommen, dass die Wahl der Kodern durch Ziehen mit Zurückwerfen geschieht.

Neben den obigen Voraussetzungen wird folgendes bestimmt: 1° Die Verteilung der Anzahl  $\eta$  der ausgelochten Positionen auf einer Karte, d. h. die Wahrscheinlichkeiten  $P\{\eta = k\} = P_k$ , der Erwartungswert  $M\{\eta\}$ , die Streuungsquadrat  $D^2\{\eta\}$  und die Momente  $M\{\eta^s\}$ . 2° Es bezeichne die Veränderliche  $\chi$  wie vielmal eine ausgelesene Position auf einer Karte gelocht wurde. Die Verteilung der Multiplizität der Auslochung  $\chi$ , d. h. die Wahrscheinlichkeiten  $P\{\chi = j\} = p_j$ , der Erwartungswert  $M\{\chi\}$  und der Streuungsquadrat  $D^2\{\chi\}$  werden berechnet. 3° Endlich wird  $R_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) berechnet,  $R_s$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass — bei einer Selektierung nach  $s$  gleichzeitigen Kodern — eine Karte ausgewählt wird, auf welcher nicht alle  $s$  Kodern, die den Grund für die Selektierung bieten, eingezeichnet sind. Kurz:  $R_s$  ist die Wahrscheinlichkeit für extra Karten.

Die obigen Wahrscheinlichkeiten werden folgendermassen bestimmt: Es seien die Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eingeführt, welche der Reihe nach bezeichnen, dass die 1, 2, ...,  $n$ -te Position auf einer Karte nicht ausgelocht wurde. Auf diese Ereignisse wird dann der allgemeine Wahrscheinlichkeitssatz von KARL JORDAN [7] angewandt (§. 2.).

Im darauffolgenden Teil werden Formeln bezüglich der Wahrscheinlichkeiten  $P_k, p_j, R_1$  und  $R_s$  für die folgenden vier Fälle aufgeführt: a) Ungeteiltes Kodefeld, exaktes Modell, b) ungeteiltes Kodefeld, angenähertes Modell, c) geteilte Kodefeld, exaktes Modell, d) geteiltes Kodefeld, angenähertes Modell (§. 3.—4.).

Bezüglich  $P_k$ : a) (10), b) (11), c) (20), wobei  $B_j$  durch (21) definiert wird, d) (20), wobei  $B_j$  durch (22) definiert wird.

Bezüglich  $p_j$  a) (12), b) (13), c) (23), d) (24).

Bezüglich  $R_1$  a) (16),  $Q_v$  wird durch (14) definiert, b) (17),  $Q_v$  wird durch (15) definiert, c) (29) wo  $Q_v$  und  $T_1$  werden durch (25), bzw. (27) bestimmt, d) (29) wobei  $Q_v$  und  $T_1$  durch (26) bzw. (28) bestimmt wird.

Bezüglich  $R_s$  a) (18) wobei  $Q_\mu$  durch (14) gegeben wird, b) (19) wobei  $Q_\mu$  durch (15) bestimmt wird, c) (34), wobei  $Q_\mu$  und  $T_s$  durch (30) bzw. (32) gegeben werden, d) (34), wobei  $Q_\mu$  und  $T_s$  durch (31) bzw. (33) bestimmt werden.

Das Kenntnis der obigen Formeln gibt Möglichkeit exakte Formeln anstatt der bisher angewandten Näherungsformeln beim Planen von Dokumentationssystemen anzuwenden und dadurch bessere Verhältnisse zu schaffen.



# A LATIN NÉGYZET ÉS AZ ORTOGONÁLIS LATIN NÉGYZET-PÁR FOGALMÁNAK EGY ÚJ ÁLTALÁNOSÍTÁSA ÉS ENNEK FELHASZNÁLÁSA KÍSÉRLETEK TERVEZÉSÉRE

HEPPES ALADÁR és RÉVÉSZ PÁL

## Bevezetés

A matematikai statisztikában használatos úgynevezett latin négyzetek módszere azzal a problémával foglalkozik, hogyan készítsük el egy kísérlet-sorozat tervét, amennyiben azt akarjuk megvizsgálni, hogy bizonyos paraméterek megváltoztatása milyen hatással van egy jelenség lejátszódásának eredményére. A cél természetesen az, hogy minél kevesebb kísérlet árán, minél nagyobb biztonsággal tudjuk eldönteni, milyen az egyes paraméterek hatása. Az alábbiakban ennek a módszernek továbbfejlesztését fogjuk tárgyalni. Az alább ismertetendő módszer sok paraméter esetén lehetőséget nyújt arra, hogy viszonylag kevés kísérlet árán nagy biztonsággal állapíthassuk meg az egyes paraméterek (esetleg több paraméter együttes) hatását.

A latin négyzetek módszerének nagy az irodalma. Utalunk például H. B. MANN [1] könyvére. Ennek tárgyalásmódját fogjuk az alábbiakban követni.

A latin négyzet és ortogonális latin négyzet-pár fogalmának  $n$ -dimenziós általánosításával már többen foglalkoztak. (Lásd például [2] és [3].) A latin kocka fogalmát az említett művekkel azonos módon definiáljuk. Az ortogonális latin kocka fogalma helyett azonban a variációs kocka fogalmát vezetjük be, ami az ortogonális latin kocka-pár fogalmának további általánosítását jelenti.

## 1. §. Permutációs kockák és az ezzel kapcsolatos kombinatorikai feladat

Tekintsünk az  $n$ -dimenziós térben egy kockaalakú,  $m^n$  elemű mátrixot. Válasszuk az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  koordinátarendszert úgy, hogy a mátrix elemei a  $0 \leq x_i \leq m-1$  ( $i = 0, 1, \dots, m-1$ ) kocka rácspontra essenek. E mátrix valamely oszlopán egy, az  $x_i$  koordináta-egységvektorok valamelyikével párhuzamos (egy-dimenziós) rács-oszlopot értünk. A mátrixnak egy, az  $x_1, x_2, \dots, x_k$  koordináta-egységvektorokkal párhuzamos  $k$ -dimenziós rács-altérbe eső részét pedig a mátrix egy  $k$ -dimenziós rétegének nevezzük.



Továbbiakban  $n$  mindig a dimenziószámot,  $m$  pedig a fenti mátrix egy oszlopában levő elemek számát — a kockamátrix, illetve rácskocka „éhhosszát” jelenti.

Permutációs kockának<sup>1)</sup> nevezzük az olyan  $n$ -dimenziós kockamátrixot, amelynek elemei a  $0, 1, 2, \dots, m-1$  számokból kerülnek ki, mégpedig úgy, hogy a mátrix minden oszlopában a  $0, 1, 2, \dots, m-1$  számok egy permutációja áll.

Bármely adott  $n$  és  $m$  értékhez könnyen szerkeszthetünk permutációs kockát. Könnyen belátható, hogyha az  $n$ -dimenziós  $m$  éhhosszúságú rácskocka minden rácspontjához az illető pont koordinátáinak mod  $m$  vett összegét rendeljük, akkor permutációs kockához jutunk.

Az  $n$ -dimenziós tér  $m$  éhhosszúságú  $P_1, P_2, \dots, P_n$  permutációs kocka  $n$ -eséről azt mondjuk, hogy gyengén variált kocka  $n$ -est alkot, ha e kockák megfelelő rácspontjaiban levő elemekből készített — a kockák indexei szerint rendezett — szám  $n$ -esek közt a  $0, 1, 2, \dots, m-1$  számoknak minden  $n$ -edosztályú ismétléses variációja egyszer és csak egyszer fordul elő. (Az, hogy  $n$  számú permutációs kocka gyengén variált kocka  $n$ -est alkot-e, vagy sem, független a kockák indexezésétől.)

Az  $n$ -dimenziós térbeli  $m$  éhhosszúságú  $P_1, P_2, \dots, P_n$  permutációs kocka  $n$ -es variációs kocka  $n$ -est<sup>2)</sup> képez, ha megfelelő  $k$ -dimenziós rétegei közül — amelyek nyilván  $k$ -dimenziós permutációs kockák — bármely  $k$  gyengén variált  $k$ -dimenziós kocka  $k$ -st alkot,  $k = 1, 2, \dots, n$ -re.

A következőkben feladatunknak fogjuk tekinteni maximális elemszámú variációs kockarendszerek, vagyis olyan permutációs kockákból álló rendszerek konstruálását, amelyek közül bármely  $n$  variációs kocka  $n$ -est alkot.

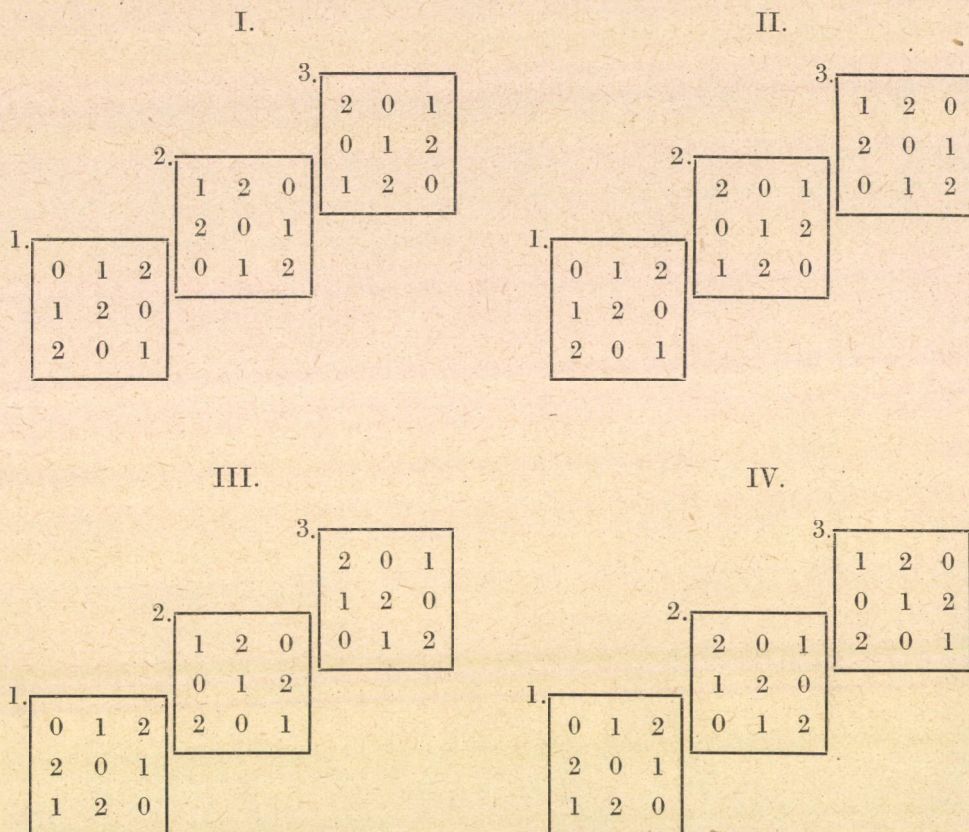
Mindenekelőtt be fogjuk bizonyítani, hogy egy variációs kockarendszer legfeljebb  $m-1$  permutációs kockából áll. Tekintsünk egy variációs kockarendszert. Válasszunk ki egyik elemében egy kétdimenziós réteget, majd vizsgáljuk e réteg és a többi kocka megfelelő rétegéből álló variációs négyzetrendszert. Állításunk igazolására elég kimutatnunk, hogy egy variációs négyzetrendszer nem állhat  $(m-1)$ -nél több permutációs négyzetből. Könnyen látható, hogy ha egy variált négyzetrendszer valamely négyzetében a  $0, 1, 2, \dots, m-1$  elemek helyébe rendre ezek valamely rögzített permutációja szerinti számot írunk, ismét variált négyzetrendszerhez jutunk. Ennek alapján az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy valamennyi négyzet első oszlopában rendre a  $0, 1, 2, \dots, m-1$  számok állanak. Mint-hogy permutációs kockáról van szó, a második oszlop első eleme csak az  $1, 2, \dots, m-1$  számok valamelyike lehet: másrészt, ha a rendszer két négyzetében e helyen ugyanaz az  $i$  szám állna, akkor e két négyzet nem alkotna variációs párt, hiszen az  $(i, i)$  variáció az első oszlopban is szerepel. Ugyan-ezen gondolatmenet alkalmazásával kimutatható, hogy egy gyengén variált kockarendszer, vagyis olyan kockarendszer, amelyből kiválasztott bármely

<sup>1)</sup> Kétdimenziós megfelelőjét az irodalomban latin négyzetnek nevezik.

<sup>2)</sup>  $n = 2$ -re a variációs és a gyengén variált kockát alkotó négyzetpárok fogalma azonos, és megegyezik az irodalomban használt latin—görög, illetve ortogonális négyzetpár fogalmával.



$n$  kocka gyengén variált kocka  $n$ -est képez, legfeljebb  $(n - 1) \cdot (m - 1)$  kockából állhat. Pl.  $m = 3$ ,  $n = 3$  esetben valóban megadható 4-elemű gyengén variált kockarendszer:



Itt I.—IV. a kockák sorszámát, 1.—3. pedig a rétegek sorszámát jelentik

Térjünk vissza a variációs kockarendszerek tárgyalásához. Alábbiakban a kétdimenziós eredménynek megfelelően az  $m$  szám számelméleti szerkezetétől függően alsó korlátot fogunk adni adott  $n$  és  $m$  értékekhez tartozó maximális variációs rendszer kockái számára. A feladatnak természetesen csak  $n \leq m - 1$  esetén van értelme. Bebizonyítjuk először a következő tételt:

**1. tétel:** Ha  $m$  prímszám, és  $n \leq m - 1$ , akkor készíthető  $(m - 1)$  elemű  $n$ -dimenziós variációs kockarendszer.

#### Bizonyítás:

Állításunk igazolására konstruálunk egy  $(m - 1)$ -elemű variációs kockarendszert. Legyen  $P_k$  a  $k$ -adik kocka ( $k = 1, 2, \dots, m - 1$ ).



Legyen a  $P_k$  kocka  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  koordinátájú eleme a

$$\sum_{j=1}^n x_j k^{j-1}$$

kifejezés mod  $m$  vett legkisebb nemnegatív értéke. Tekintsük a  $P_k$  kocka valamely, az  $x_j$  koordináta-egységvektorral párhuzamos oszlopát. Ezen oszlop  $\alpha$ -adik és  $\beta$ -adik elemének különbsége,  $(\alpha - \beta) k^{j-1} \equiv 0 \pmod{m}$ , tekintettel arra, hogy  $m$  prím,  $\alpha - \beta$  és  $k$  pedig kisebbek, mint  $m$ . A  $P_k$  kockák tehát permutációs kockák. Megmutatjuk ezek után, hogy a  $P_k$  kockák variációs kocka-rendszert alkotnak. Válasszunk ki tetszőlegesen a  $P_k$  kockák közül  $n$  darabot. Legyenek ezek:  $P_{k_1}, P_{k_2}, \dots, P_{k_n}$ . Elegendő bebizonyítani, hogy e kockák  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , illetve  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  helyén levő elemekből képzett két  $n$ -edrendű ismétléses variáció csak akkor egyezhet meg, ha az  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  és  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  helyek azonosak. A két variáció megegyezése a következő egyenletrendszerre vezet:

$$\begin{aligned} x_1 + k_1 x_2 + k_1^2 x_3 + \dots + k_1^{n-1} x_n &= x'_1 + k_1 x'_2 + k_1^2 x'_3 + \dots + k_1^{n-1} x'_n \\ &\vdots \\ x_1 + k_n x_2 + k_n^2 x_3 + \dots + k_n^{n-1} x_n &= x'_1 + k_n x'_2 + k_n^2 x'_3 + \dots + k_n^{n-1} x'_n. \end{aligned}$$

Átrendezve a fenti egyenleteket, az  $(x_i - x'_i)$  ismeretlenekre egy homogén lineáris egyenletrendszerhez jutunk, amelynek együttható-determinánsa az

$$\begin{vmatrix} 1 & k_1 & k_1^2 & \dots & k_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k_n & k_n^2 & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Vandermonde-féle determináns. Ennek értéke azonban:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (k_j - k_i) \equiv 0 \pmod{m},$$

tehát egyetlen megoldás:  $x_i = x'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), miként állítottuk.

Tetszőleges élő variációs kockarendszerek esetére bebizonyítjuk a következő, az 1. tételt is tartalmazó tételt:

**2. tétel:** Ha  $m$  kanonikus előállítása  $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ , akkor létezik

$$\min_{1 \leq i \leq r} (p_i^{a_i} - 1)$$



számú permutációs kockából álló variációs kockarendszer. Feltesszük, hogy

$$n \leq \min_{1 \leq i \leq r} (p_i^{a_i} - 1) .$$

Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy

$$p_1^{a_1} - 1 = \min_{1 \leq i \leq r} (p_i^{a_i} - 1) .$$

Ezen tétel bizonyításához a Galois-testek elméletének alapjait is fogjuk használni.

Készítsük el rendre a  $p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_r^{a_r}$  számú elemet tartalmazó  $T_1, T_2, \dots, T_r$  Galois-testeket.  $T_i$  elemei legyenek:  $g_{0i} = 0, g_{1i} = e, g_{2i}, g_{3i}, \dots, g_{p_i^{a_i}-1,i}$

Tekintsük továbbá a  $(g_{j_1 1}, g_{j_2 2}, \dots, g_{j_r r})$  elem  $r$ -eseket, mint  $r$ -dimenziós pontokat. Értelmezzük ezek közt az összeadás és a szorzás műveletét koordinátáinként. Ekkor ezen pontok gyűrűt alkotnak, amelyek egységeleme:  $\gamma_1 = (g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1r})$ .

Legyen:

$$\gamma_2 = (g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2r})$$

⋮

⋮

$$\gamma_{p_1^{a_1}-1} = (g_{p_1^{a_1}-1,1}, g_{p_1^{a_1}-1,2}, \dots, g_{p_1^{a_1}-1,r}) .$$

Nyilvánvaló, hogy a  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p_1^{a_1}-1}$  pontoknak van a gyűrűben a  $\gamma_1$  egységelemre nézve inverzük. Tekintsünk továbbá tetszőleges  $n$  különböző  $r$ -dimenziós pontot:  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ .

A  $P_1, P_2, \dots, P_{p_1^{a_1}-1}$  permutációs kockákat ezek után a következő módon konstruálhatjuk: a  $P_k$  permutációs kocka  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  koordinátájú eleme legyen:

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j \gamma_k^{j-1} .$$

Teljes mértékben az 1. tétel bizonyítási módszerét követve látható, hogy  $P_1, P_2, \dots, P_{p_1^{a_1}-1}$  mindegyike permutációs kocka, és együttesen variációs kockarendszert alkotnak.



Például  $n = 3$ ,  $m = 4$  esetében a következő 3 elemű variációs kocka-rendszer készíthető:

$$\begin{array}{l}
 P_1 \\
 \begin{array}{l}
 1. \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n_2 & n_1 & n_4 & n_3 \\ n_3 & n_4 & n_1 & n_2 \\ n_4 & n_3 & n_2 & n_1 \end{vmatrix} \\
 2. \begin{vmatrix} n_2 & n_1 & n_4 & n_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n_4 & n_3 & n_2 & n_1 \\ n_3 & n_4 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} \\
 3. \begin{vmatrix} n_3 & n_4 & n_1 & n_2 \\ n_4 & n_3 & n_2 & n_1 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n_2 & n_1 & n_4 & n_3 \end{vmatrix} \\
 4. \begin{vmatrix} n_4 & n_3 & n_2 & n_1 \\ n_3 & n_4 & n_1 & n_2 \\ n_2 & n_1 & n_4 & n_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{vmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{l}
 P_2 \\
 \begin{array}{l}
 1. \begin{vmatrix} k_1 & k_3 & k_4 & k_2 \\ k_2 & k_4 & k_3 & k_1 \\ k_3 & k_1 & k_2 & k_4 \\ k_4 & k_2 & k_1 & k_3 \end{vmatrix} \\
 2. \begin{vmatrix} k_4 & k_2 & k_1 & k_3 \\ k_3 & k_1 & k_2 & k_4 \\ k_2 & k_4 & k_3 & k_1 \\ k_1 & k_3 & k_4 & k_2 \end{vmatrix} \\
 3. \begin{vmatrix} k_2 & k_4 & k_3 & k_1 \\ k_1 & k_3 & k_4 & k_2 \\ k_4 & k_2 & k_1 & k_3 \\ k_3 & k_1 & k_2 & k_4 \end{vmatrix} \\
 4. \begin{vmatrix} k_3 & k_1 & k_2 & k_4 \\ k_4 & k_2 & k_1 & k_3 \\ k_1 & k_3 & k_4 & k_2 \\ k_2 & k_4 & k_3 & k_1 \end{vmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{l}
 P_3 \\
 \begin{array}{l}
 1. \begin{vmatrix} t_1 & t_4 & t_2 & t_3 \\ t_2 & t_3 & t_1 & t_4 \\ t_3 & t_2 & t_4 & t_1 \\ t_4 & t_1 & t_3 & t_2 \end{vmatrix} \\
 2. \begin{vmatrix} t_3 & t_2 & t_4 & t_1 \\ t_4 & t_1 & t_3 & t_2 \\ t_1 & t_4 & t_2 & t_3 \\ t_2 & t_3 & t_1 & t_4 \end{vmatrix} \\
 3. \begin{vmatrix} t_4 & t_1 & t_3 & t_2 \\ t_3 & t_2 & t_4 & t_1 \\ t_2 & t_3 & t_1 & t_4 \\ t_1 & t_4 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} \\
 4. \begin{vmatrix} t_2 & t_3 & t_1 & t_4 \\ t_1 & t_4 & t_2 & t_3 \\ t_4 & t_1 & t_3 & t_2 \\ t_3 & t_2 & t_4 & t_1 \end{vmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$



H. B. MANN [1] könyvében közölt idevágó eredmények a fentiek speciális eseteként  $n = 2$  helyettesítéssel adódnak.

## 2. §. Gyakorlati alkalmazás

Az alábbiakban a fenti eredményeknek — a kísérletek tervezésével kapcsolatos — gyakorlati alkalmazására fogunk példát mutatni.<sup>3)</sup> A példát a növénytermesztés köréből vesszük, mivel a szóban forgó statisztikai módszereket általában mezőgazdasági problémáknál használják, bár lehetőség van ipari alkalmazásokra is.

Tegyük fel, hogy valamely növény négy különböző fajtáját akarjuk összehasonlítani. Legyenek ezek  $n_1, n_2, n_3$  és  $n_4$ . Ugyanakkor azt is ki akarjuk próbálni, hogy az ország melyik táján, melyik fajtát legcélszerűbb termelni. Jelöljük a szóba jövő területeket így:  $l_1, l_2, l_3, l_4$ . Lehetőség mutatkozik még arra is, hogy 4 különböző trágyafajta és 4 kezelési mód hatását is tanulmányozzuk, ha a talaj az egyes vetési területeken belül is inhomogenitásokat mutat. (Ekkor feltesszük, hogy a talaj minősége lineárisan változik.) Ha a talajt az egyes területeken belül homogénnek tekintjük, akkor még két újabb hatás-sorozat kipróbálására van lehetőség. Jelöljük a kezelési módokat  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , a trágyafajtákat pedig  $t_1, t_2, t_3, t_4$ .

Az  $l_1, l_2, l_3, l_4$  területek mindegyikén vegyünk fel egy négyzetalakú földterületet, amelyet osszunk fel  $4 \times 4$ -es négyzetre. Így az  $l_1, l_2, l_3, l_4$  területeken levő négyzetek együttesen  $4 \times 4 \times 4$ -es kockát alkotnak.

Ezen kockába az  $n_1, n_2, n_3, n_4$ , illetve a  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , illetve a  $t_1, t_2, t_3, t_4$  jeleket helyezzük el, úgy, mint azt az előző táblázaton tettük. A vetési — és trágyázási — tervet e szerint készítsük el, illetve a különböző kezelési módokat e szerint alkalmazzuk.

## 3. §. Statisztikai értékelés

Természetesen az, hogy pl. az  $n_1$  fajtából kaptuk a legkedvezőbb termési eredményt, nem feltétlenül jelenti azt, hogy ez a fajta jobb volt, mint a többi: lehet, hogy ez véletlen. A továbbiakban arra a kérdésre adunk választ, hogy a terméseredmények eltérése mikor szignifikáns.

Legyen az  $i$ -edik terület  $j$ -edik sorának  $k$ -edik oszlopában a terméseredmény  $\xi_{ijk}$ . Tegyük fel, hogy itt az  $\alpha$ -edik fajtát vetettük, a  $\beta$ -edik trágyafajtát és a  $\gamma$ -edik kezelési módot alkalmaztuk. Feltesszük, hogy valamennyi  $\xi_{ijk}$  normális eloszlású ugyanazon  $\sigma$  szórással. Legyen  $M(\xi_{ijk}) = m_{ijk}$ , és  $\xi_{ijk} = m_{ijk} + \eta_{ijk}$ . Legyen  $m_{ijk} = l_i + o_j + s_k + n_\alpha + t_\beta + k_\gamma + m$ , ahol  $l_i, n_\alpha, t_\beta, k_\gamma$  rendre az  $i$ -edik terület,  $\alpha$ -edik növényfajta,  $\beta$ -edik trágyafajta és  $\gamma$ -edik kezelési mód hatását mutatja.  $o_j$  és  $s_k$  a föld inhomogenitására jellemző, vagy ha az homogén, akkor két újabb paraméter hatását jellemzi. Feltehető, hogy<sup>4)</sup>

$$\sum_{i=1}^r l_i = \sum_{j=1}^r o_j = \sum_{k=1}^r s_k = \sum_{\alpha=1}^r n_\alpha = \sum_{\beta=1}^r t_\beta = \sum_{\gamma=1}^r k_\gamma = 0.$$

<sup>3)</sup> E példa kiválasztásában SZÉKELY GÁBOR volt segítségünkre.

<sup>4)</sup> A statisztikai értékelést  $r$  élű háromdimenziós kockára készítjük el. A fenti példában  $r = 4$ .



Nyilván fennállnak a következő összefüggések :

$$\bar{\xi}_{i..} = \bar{\eta}_{i..} + l_i + m; \quad \bar{\xi}_{.j.} = \bar{\eta}_{.j.} + o_j + m; \quad \bar{\xi}_{..k} = \bar{\eta}_{..k} + s_k + m;$$

$$\bar{\xi} = \bar{\eta} + m;$$

$$\bar{\xi}_a = \bar{\eta}_a + n_a + m; \quad \bar{\xi}_\beta = \bar{\eta}_\beta + f_\beta + m; \quad \bar{\xi}_\gamma = \bar{\eta}_\gamma + k_\gamma + m;$$

ahol pl.

$$\bar{\xi}_{i..} = \frac{1}{r^2} \sum_{j,k=1}^r \xi_{ijk}, \quad \bar{\xi} = \frac{1}{r^3} \sum_{i,j,k=1}^r \xi_{ijk}, \quad \bar{\xi}_a = \frac{1}{r^2} \sum \xi_{ijk}.$$

Az utóbbinál az összegezést azon  $i, j, k$  indexekre kell kiterjeszteni, amelyeknek megfelelő helyeken az  $\alpha$ -adik fajtát vetettük.

A szignifikáns eltérések kimutatására a szórásелемzés módszerét használjuk. Legyen

$$Q = \sum_{i,j,k=1}^r (\xi_{ijk} - \bar{\xi})^2.$$

Elemi számolással belátható, hogy

$$\begin{aligned} Q = & r^2 \sum_{i=1}^r (\bar{\xi}_{i..} - \bar{\xi})^2 + r^2 \sum_{j=1}^r (\bar{\xi}_{.j.} - \bar{\xi})^2 + r^2 \sum_{k=1}^r (\bar{\xi}_{..k} - \bar{\xi})^2 + \\ & + r^2 \sum_{\alpha=1}^r (\bar{\xi}_\alpha - \bar{\xi})^2 + r^2 \sum_{\beta=1}^r (\bar{\xi}_\beta - \bar{\xi})^2 + r^2 \sum_{\gamma=1}^r (\bar{\xi}_\gamma - \bar{\xi})^2 + \\ & + \sum_{i,j,k=1}^r (\xi_{ijk} - \bar{\xi}_{i..} - \bar{\xi}_{.j.} - \bar{\xi}_{..k} - \bar{\xi}_a - \bar{\xi}_\beta - \bar{\xi}_\gamma + 5\bar{\xi})^2. \end{aligned}$$

Az egyenlőség jobboldalának tagjait jelöljük rendre  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  és  $Q_7$ . A  $Q$  szabadsági foka  $r^3 - 1$ ,  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  mindegyikének szabadsági foka  $r - 1$ ,  $Q_7$  szabadsági foka pedig  $r^3 - 6r + 5$ .

Mivel, mint látható, a jobboldal tagjai szabadsági fokainak összege egyenlő a baloldal szabadsági fokával, és a Fischer—Cochran tétel többi feltételei is teljesülnek (lásd pl. : [1]) —  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  és  $Q_7$  független  $\chi^2$ -eloszlású valószínűségi változók.

A gyakorlati alkalmazásoknál az áttekinthetőség miatt célszerű elkészíteni a következő szórásfelbontó táblázatot :



Szórás-felbontó táblázat

A szórás eredete	Az eltérések négyzetösszege	Szabadsági fokok	Szórásnégyzet
A vetési helyek eltéréséből adódó szórás:	$Q_1 = r \sum_{i=1}^r (\bar{\xi}_i - \bar{\xi})^2$	$r - 1$	$s_1^2 = \frac{1}{r-1} Q_1$
Az oszlopok közti eltérés miatti szórás:	$Q_2 = r \sum_{j=1}^r (\bar{\xi}_j - \bar{\xi})^2$	$r - 1$	$s_2^2 = \frac{1}{r-1} Q_2$
A sorok közti eltérés miatti szórás:	$Q_3 = r^2 \sum_{i=1}^r (\bar{\xi}_i - \bar{\xi})^2$	$r - 1$	$s_3^2 = \frac{1}{r-1} Q_3$
A növényfajták közti különbségekből adódó szórás:	$Q_4 = r^2 \sum_{\alpha=1}^r (\bar{\xi}_\alpha - \bar{\xi})^2$	$r - 1$	$s_4^2 = \frac{1}{r-1} Q_4$
A trágyafajták közti különbségekből adódó szórás:	$Q_5 = r^2 \sum_{\beta=1}^r (\bar{\xi}_\beta - \bar{\xi})^2$	$r - 1$	$s_5^2 = \frac{1}{r-1} Q_5$
A kezelési fajták közti különbségekből adódó szórás:	$Q_6 = r^2 \sum_{\gamma=1}^r (\bar{\xi}_\gamma - \bar{\xi})^2$	$r - 1$	$s_6^2 = \frac{1}{r-1} Q_6$
Hiba:	$Q_7 = \sum_{i,j,k=1}^r (\bar{\xi}_{ijk} - \bar{\xi}_{i.} - \bar{\xi}_{.j} - \bar{\xi}_{..k} - \bar{\xi}_0 - \bar{\xi}_\beta - \bar{\xi}_\gamma + 5\bar{\xi})^2$	$r^3 - 6r + 5$	$s_7^2 = \frac{1}{r^3 - 6r + 5} Q_7$
Összesen:	$Q = \sum_{i,j,k=1}^r (\bar{\xi}_{ijk} - \bar{\xi})^2$	$r^3 - 1$	$s^2 = \frac{1}{r^3 - 1} Q$

Először a következő  $H_{04}$  hipotézis elfogadása felől fogunk dönteni:  $n_c = 0$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, r$ ), azaz a vizsgált növény egyes fajtái közti különbségek a terméseredményben nem okoznak szignifikáns eltérést.

Ha a  $H_{04}$  hipotézis igaz,  $s_4^2/s_7^2$   $F$ -eloszlást követ  $(r-1, r^2-6r+5)$  paraméterekkel és 1 várható értékkel. Az  $F$ -eloszlásról készített táblázatok segítségével  $s_4^2/s_7^2$  értékének ismeretében dönthetünk adott (pl. 95%-os) szinten, hogy elfogadjuk-e a  $H_{04}$  hipotézist, vagy nem.

Hasonló módon dönthetünk a  $H_{01}$ ,  $H_{02}$ ,  $H_{03}$ ,  $H_{05}$ ,  $H_{06}$  hipotézisek elfogadása felől is, tehát arról, hogy az  $l_i = 0$ ,  $o_j = 0$ ,  $s_k = 0$ ,  $t_\beta = 0$ ,  $k_\gamma = 0$  hipotéziseket elfogadjuk-e.

Ha a  $H_{01}$ ,  $H_{02}$ ,  $H_{03}$ ,  $H_{04}$ ,  $H_{05}$ ,  $H_{06}$  hipotéziseket a kísérletek alapján el kellett fogadnunk, akkor a kísérlet azt mutatta, hogy a terméseredmény az egyes hatásokkal szemben közömbös.

Ha ezen hipotézisek valamelyikét el kellett vetnünk, akkor az illető hatás csökkenteni, illetve növelni képes a terméseredményt. Ha azt tapasztaljuk például, hogy a  $H_{04}$  hipotézist el kell vetnünk, és az első növényfajta terméseredménye magasabb, mint a többié, akkor az  $n_1 \neq 0$ ,  $n_2 = n_3 = n_4 = \dots = n_r = -n_1/(r-1)$  hipotézis elfogadásáról fogunk a fentiekhez hasonló módon dönteni.

Elképzelhető, hogy kiemelkedő terméseredményt akkor kapunk csak, ha pl. a növényfajták közül az elsőt és a trágyafajták közül a másodikat együtt alkalmazzuk. Annak eldöntése, hogy az első növényfajta és a második trágyafajta használata valóban szignifikáns eltérést okoz, a szórás-felbontásnak az előbbiektől eltérő módját teszi szükségessé.



Legyen most  $m_{ijk} = l_i + o_j + s_k + x_{a\beta} + k_\gamma + m$ , ha az  $i$ -edik terület  $j$ -edik oszlopának  $k$ -adik sorába az  $\alpha$ -adik fajtát a  $\beta$ -adik trágyázással vetettük, és a  $\gamma$ -adik kezelési módot használtuk.  $m_{ijk}$ ,  $l_i$ ,  $o_j$ ,  $s_k$ ,  $k_\gamma$  és  $m$  jelentése megegyezik az eddigiekkel,  $x_{a\beta}$  pedig az  $\alpha$ -adik növény- és  $\beta$ -adik trágyafajta együttes hatását jellemzi.

Ekkor  $\bar{\xi}_{i..}$ ,  $\bar{\xi}_{.j.}$ ,  $\bar{\xi}_{..k}$ ,  $\bar{\xi}_{\gamma}$  és  $\bar{\xi}$  értéke megegyezik a fentiekkel, és

$$\bar{\xi}_{a\beta} = \bar{\eta}_{c\beta} + x_{a\beta} + m;$$

itt

$$\bar{\xi}_{a\beta} = \frac{1}{r^2} \sum \xi_{ijk},$$

ahol az összegezést azon  $i$ ,  $j$ ,  $k$  indexekre kell kiterjeszteni, amelyeknek megfelelő helyen az  $\alpha$ -adik növényfajtát vetettük a  $\beta$ -adik trágyafajtaival.

Most a szórás-felbontás a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} Q = & \sum_{i,j,k=1}^r (\xi_{ijk} - \bar{\xi})^2 = r^2 \sum_{i=1}^r (\bar{\xi}_{i..} - \bar{\xi})^2 + r^2 \sum_{j=1}^r (\bar{\xi}_{.j.} - \bar{\xi})^2 + \\ & + r^2 \sum_{k=1}^r (\bar{\xi}_{..k} - \bar{\xi})^2 + r \sum_{\alpha,\beta=1}^r (\bar{\xi}_{a\beta} - \bar{\xi})^2 + r^2 \sum_{\gamma=1}^r (\bar{\xi}_{\gamma} - \bar{\xi})^2 + \\ & + \sum_{i,j,k=1}^r (\xi_{ijk} - \bar{\xi}_{i..} - \bar{\xi}_{.j.} - \bar{\xi}_{..k} - \bar{\xi}_{a\beta} - \bar{\xi}_{\gamma} + 4\bar{\xi})^2. \end{aligned}$$

A szórás-felbontó táblázat elkészítése teljesen a fentiekhez hasonló módon történhet.

Azon kérdés eldöntésére, hogy valamely  $(\alpha, \beta)$ -hatás okoz-e szignifikáns eltérést, a következő hipotézist állítjuk fel:  $x_{a\beta} = 0$  minden  $(\alpha, \beta)$  párra.

Ezen hipotézis teljesülése esetén az  $s_4^2/s_6^2$  változó  $F$ -eloszlású  $(r^2-1, r^3-r^2-4r+4)$  paraméterekkel, ahol

$$s_4^2 = \frac{r^2}{r^2-1} \sum_{\alpha,\beta=1}^r (\bar{\xi}_{a\beta} - \bar{\xi})^2,$$

$$s_6^2 = \frac{1}{r^3-r^2-4r+4} \sum_{i,j,k=1}^r (\xi_{ijk} - \bar{\xi}_{i..} - \bar{\xi}_{.j.} - \bar{\xi}_{..k} - \bar{\xi}_{a\beta} - \bar{\xi}_{\gamma} + 4\bar{\xi})^2.$$

A hipotézist akkor vetjük el, ha valamelyik  $(\alpha, \beta)$  pár szignifikáns eltérést okoz.

(Beérkezett: 1956. VII. 20.)



## IRODALOM

- [1] H. B. MANN: *Analysis and design of experiments*. Dover, New York, 1949.  
 [2] TOSIO KITAGEWA — MICHIO MITOME: *Tables for the design of factorial experiments*. Tokyo, 1953.  
 [3] K. A. BROWNLEE — P. K. LORAIN: „The relationship between finite groups and completely orthogonal squares, cubes and hyper-cubes”. *Biometrika* **35** (1948) 277–281.

## ОДНО ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

A. HEPPEС и P. RÉVÉSZ

## Резюме

В математической статистике, особенно в связи с сельскохозяйственными экспериментами, часто используют метод латинских квадратов и, соответственно, метод ортогональных латинских квадратов (см., например, [1]). В настоящей работе дается одно обобщение этого метода, которое особенно облегчает планирование и статистическую оценку экспериментов, зависящих от многих параметров.

Понятие латинских квадратов обобщается следующим образом:  $n$ -мерным перестановочным кубом назовем такую  $n$  = мерную кубическую матрицу, элементы которой выбираются из чисел  $0, 1, 2, \dots, m-1$  так, что в каждом — параллельном некоторому ребру куба — столбце матрицы находится некоторая перестановка чисел  $0, 1, 2, \dots, m-1$ . (В случае  $n = 2$  получается латинский квадрат.)

$n$ -мерный аналог пары ортогональных латинских квадратов называется вариационным множеством кубов и определяется следующим образом:

Перестановочные кубы  $P_1, P_2, \dots, P_n$  образуют вариационное множество кубов, если из элементов, находящихся на соответствующих местах этих кубов, расположенных согласно индексам кубов, каждая повторная вариация чисел  $0, 1, 2, \dots, m-1$  встречается один и только один раз.

В Теореме 2. доказывается, что если  $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ , то существует  $\min(p_i^{a_i} - 1)$   $n$ -мерных перестановочных кубов, длина [ребер которых  $m$ , среди которых любые  $n$  образуют вариационное множество кубов при условии, что  $n \leq \min(p_i^{a_i} - 1)$ .

Во второй части работы с помощью анализа дисперсий вырабатывается метод оценки статистических экспериментов, проделанных с вариационными кубами.

## A NEW GENERALIZATION OF THE METHOD OF LATIN SQUARES AND ORTHOGONAL LATIN SQUARES AND ITS APPLICATION TO THE DESIGN OF EXPERIMENTS

A. HEPPEС and P. RÉVÉSZ

## Summary

The method of Latin squares and that of orthogonal Latin squares has often been applied to the design of experiments, chiefly in connection with agricultural experiments (see e. g. [1]). In the present paper a generalization of this method is given that makes easier, in the first place, the design and statistical evaluation of experiments with several parameters.

The generalization of the notion of a Latin square, the permutation-cube, is defined in the following manner:

An  $n$ -dimensional cube-matrix, the elements of which are the numbers  $0, 1, 2, \dots, m-1$  will be called an  $n$ -dimensional permutation-cube if every column (i. e. every sequence of elements, parallel to an edge of the cube) of the matrix contains a permutation of the numbers  $0, 1, 2, \dots, m-1$  (a 2-dimensional permutation cube is simply a Latin square).



The appropriate  $n$ -dimensional notion generalizing the notion of orthogonal Latin squares will be called variational-cube and is defined as follows:

The permutation-cubes  $P_1, P_2, \dots, P_n$  constitute a variational  $n$ -tuple of cubes if, among the number  $n$ -tuples, formed by the corresponding elements of the  $n$  cubes and arranged according to the indices of the cubes, every variation with repetition of order  $n$  of the numbers  $0, 1, \dots, m-1$  occurs once and only once.

**Theorem 2.** states that if  $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$  then there exist a set of  $n$ -dimensional permutation-cubes with edge-length  $m$  containing  $\min(p_i^{a_i} - 1)$  cubes any  $n$  of which is a variational  $n$ -tuple of cubes provided that  $n \leq \min(p_i^{a_i} - 1)$ .

In the second part of the paper the statistical evaluation of experiments designed by means of variational-cubes is elaborated using standard methods of the analysis of variance.



# A MINTA-TERJEDELEM ÉS CSONKÍTOTT MINTA-TERJEDELEM ALAPJÁN TÖRTÉNŐ SZÓRÁSBECSLÉSRŐL

ÉLTETŐ ÖDÖN

## Bevezetés

Statistikai becslésektől általában azt kívánjuk, hogy jól becsüljék az ismeretlen paramétereket, azaz a mintavételek során a becslő függvény értéke lehetőleg kicsiny ingadozást mutasson az igazi paraméter-érték körül. A becslésmélet egyik feladata éppen az, hogy adott problémánál megtalálja a hatásos,<sup>1)</sup> vagy ha ilyen nem létezik, a minimális szórásnégyzetű becsléseket. Ilyen „legjobb” becslések kiszámítása egy adott mintából sokszor hosszabb időt vesz igénybe, emellett bizonyos matematikai előképzettséget is igényel. Sok esetben azonban az adatokból nyerhető információ sokat veszít értékéből, ha mintavétel után sok ideig tart az adatok kiértékelése. Ez a helyzet például a gyártásközi minőségellenőrzésnél, ahol nagyon fontos az, hogy ha valami rendellenességet mutatnak az adatok, azonnal be lehessen avatkozni a gyártás menetébe. Ezért a gyakorlatban sokszor használnak gyors és egyszerű, de nem hatásos — inefficiens — becsléseket még akkor is, ha a szóbanforgó problémánál ismeretes hatásos becslés. A becslésméletnek ennél fogva foglalkoznia kell ilyen inefficiens becslések vizsgálatával is annak megállapítása céljából, hogy a gyakorlati szempontokat kielégítő becslések közül hatásfokukat tekintve melyek a legjobbak. Jelen dolgozat speciális inefficiens becslésekkel foglalkozik, mégpedig normális eloszlású változó szórásának a minta-terjedelem (*range*), illetve csonkított minta-terjedelmek (*quasi-range*-ek) alapján történő becslésével. Ismertetve az eddigi eredményeket, a dolgozat foglalkozik az egyes csonkított terjedelmek hatásosságával, és táblázatban adja a szórásbecsléshez szükséges konstansokat, a standard normális eloszlásból vett minta csonkított terjedelmeinek várható értékét.

## 1. §. Szórásbecslés minta-terjedelem, átlagos minta-terjedelem és csonkított minta-terjedelem alapján

Legyen az alapsokaságból vett  $n$  elemű minta  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , illetve nagyság szerint rendezve:  $\xi_1^* < \xi_2^* < \dots < \xi_n^*$ . A legnagyobb és legkisebb

<sup>1)</sup> A „hatásos becslés” (*efficient estimate*) definícióját illetőleg lásd pl.: [1], 481. oldal.



mintaelem különbségét, a  $w = \xi_n^* - \xi_1^*$  minta-terjedelmet már régóta használják gyors szórásbecslésre. Ez a lehetőség a következőkön alapszik:

Legyen a szóban forgó  $\xi$  valószínűségi változó várható értéke  $m$  és szórása  $\sigma$ ; akkor a standardizált,  $(\xi - m)/\sigma$  változó minta-terjedelme:

$$(1) \quad W = \frac{\xi_n^* - m}{\sigma} - \frac{\xi_1^* - m}{\sigma} = \frac{w}{\sigma}.$$

Ha most bevezetjük a  $d_n = \mathbf{M}\{W\}$  jelölést,

$$\mathbf{M}\left\{\frac{w}{d_n}\right\} = \sigma,$$

vagyis a minta-terjedelem osztva egy, az alapeloszlástól és  $n$ -től függő állandóval, torzítatlan becslést ad a  $\sigma$  szórásra. A  $d_n$  állandókat csak néhány eloszlás esetén lehet egyszerűen meghatározni, legtöbb eloszlásnál numerikus integrálással kell kiszámolni. A gyakorlatban legfontosabb eloszlásra, a normális eloszlásra ezeket az állandókat még L. C. H. TIPPET határozta meg 1925-ben,  $n = 1000$ -ig. Ezzel lehetővé vált normális eloszlás esetén a szórásnak a minta-terjedelem alapján történő torzítatlan becslése. A becslés hatásosságát vizsgálva kimutatták (O. L. DAVIES és E. S. PEARSON 1934-ben, illetve ?? HAINES és E. S. PEARSON 1935-ben), hogy a szórás ezen becslésének hatásossága a mintaelemszám növekedtével gyorsan csökken, mindazonáltal kis — 5—15 elemű mintáknál nem rossz becslés a szórásra, például  $n = 10$ -nél 85%-os a hatásossága. Hangsúlyozni kell azonban, hogy ezek a megállapítások normális eloszlásra vonatkoznak, bár legtöbb eloszlásnál a minta-terjedelem alapján történő szórásbecslés nem hatásos, vannak olyan eloszlások — elsősorban az egyenletes eloszlás —, amelyeknél a minta-terjedelem alapján történő szórásbecslés hatásosabb, mint a szokásos mintabeli szórás. Egyébként ezt a kérdést vizsgálva, D. R. COX [4] cikkében arra a következtetésre jut, hogy nagy  $\beta_2$  (az eloszlás *excessusa*) esetén jobb a minta-terjedelem alapján való becslés.

A továbbiakban mindig normális alapeloszlásból vett mintákkal foglalkozunk. Ezen esetben közepes vagy nagy mintáknál a minta-terjedelem nem használható jó szórásbecslésre. Ilyenkor az eredeti mintából véletlenszerűen egyenlő elemszámú kisebb csoportokat készítenek, ezen csoportok minta-terjedelmeinek átlaga osztva a megfelelő  $d_n$  állandóval, szintén torzítatlan becslést ad a szórásra, hatásossága azonban nagyobb, mint az egész mintából számított terjedelem alapján történő becslése. Kimutatható, hogy általában akkor lesz legjobb hatásfokú ez a becslés, ha az eredeti mintát 7 vagy 8 elemű csoportokra osztjuk be. Egyes esetekben — a különben elhagyandó mintaelemek nagyobb száma miatt fellépő információvesztés következtében — jobb a 6, illetve 9 elemű csoportokra történő beosztás. F. E. GRUBBS és L. WEAVER [5]  $n = 100$ -ig meghatározták, melyik a legjobb csoportbeosztás. Számításaikból kitűnik, hogy megfelelő csoportbeosztást készítve az átlagos minta-terjedelem alapján történő becslésnél elérhető a 75%-os hatásosság.

Az átlagos minta-terjedelem használata nagyobb minták esetén kiküszöböli a minta-terjedelem alapján való becslés erősen inefficiens voltát. Azon-



ban ez utóbbi becslés jó tulajdonságaiból, gyorsaságából, egyszerűségéből is veszt, különösen akkor, ha a  $\xi$  változó megfigyelt értékei nem függetlenek a megfigyelés sorrendjétől, amikor is külön módszer szükséges a csoportokba való beosztás véletlenszerűségének biztosításához.

A minta-terjedelemhez hasonlóan gyors és egyszerű, de nagyobb minták esetén ennél hatásosabb becslését kaphatjuk a szórásnak az úgynevezett csonkított minta-terjedelmek alapján. Ha  $\xi_1^* < \xi_2^* < \dots < \xi_n^*$  a rendezett minta, akkor az  $r$ -edik csonkított terjedelem:

$$w_r = \xi_{n-r}^* - \xi_{r+1}^* .$$

Ha  $d_{r,n}$  a standardizált változó  $r$ -edik csonkított terjedelmének várható értéke, akkor itt is  $w_r/d_{r,n}$  torzítatlan becslés a  $\sigma$  szórásra. Hogy ez a becslés nagyobb minták esetén jobb, mint a minta-terjedelem alapján történő, az szemléletesen könnyen érthető, hiszen nagyobb minták esetén könnyen fellépnek egyes kiugró mintaelemek, amelyek a csonkított terjedelmet kevésbé befolyásolják, mint a közönséges minta-terjedelmet, ezenkívül a gyakorlatban előforduló eloszlásoknak a normálistól való eltérése is elsősorban az eloszlás szélein jelentkezik.

A  $w_r$ -ek szórásbecslésre való felhasználására F. MOSTELLER [6] hívta fel a figyelmet. Ő említi K. PEARSON egy korábbi eredményét, amely szerint aszimptotikusan 65%-os hatásosság elérhető, ha olyan  $w_r$  alapján becsljük a szórást, amelyre  $\lim r/n = \lambda = 0,07$ . F. MOSTELLER szerint, ha  $\sigma$ -t két csonkított terjedelem összegével

$$\sigma = \frac{w_r + w_s}{d_{r,n} + d_{s,n}}$$

alakban becsljük, ahol  $\lim r/n = \lambda_1 = 0,07$  és  $\lim s/n = \lambda_2 = 0,2$ , akkor ezen becslés hatásossága aszimptotikusan 74%-os lesz. Ez a hatásosság nem változik lényegesen, ha  $0,16 \leq \lambda_2 \leq 0,22$ . Ha pedig négy csonkított terjedelem alapján becsljük  $\sigma$ -t, úgy hogy  $\lambda_1 = 0,02$ ;  $\lambda_2 = 0,08$ ;  $\lambda_3 = 0,15$  és  $\lambda_4 = 0,25$ ; akkor aszimptotikusan 89,6%-os hatásosság érhető el, vagyis ez a becslés jobb, mint a várható eltérés alapján való becslés.

Ezeket az eredményeket F. MOSTELLER azon ismert tétel alapján vezeti le, hogy a minta kvantilisei aszimptotikusan normális eloszlásúak az eloszlás megfelelő kvantilise körül, illetve több minta-kvantilise együttes eloszlása aszimptotikusan többdimenziós normális eloszlás. Ezeknél a tételeknél azonban a normális eloszláshoz való konvergencia meglehetősen lassú, annál lassúbb, minél közelebb van a 0-hoz vagy 1-hez a  $\lim r/n = \lambda$  határérték. Ezért nem érdektelen, ha közepes mintáknál ( $n = 15-20$ -tól  $n = 100$ -ig) külön vizsgáljuk az egyes csonkított terjedelmek alapján történő becslések tulajdonságát, hatásosságát.

Ilyen irányú vizsgálatok eddig a matematikai statisztikai irodalomban elég gyéren szerepeltek. Aszimptotikus formula  $w_r$  várható értékére, illetve szórásnégyzetére még R. A. FISHER és L. C. H. TIPPET, illetve E. J. GUMBEL munkái alapján ismeretes. Ez a következő (lásd: H. CRAMÉR [1], 377. oldal, (28. 6. 18) egyenlet):



$$(2) \quad \mathbf{M}\{w_r\} = \sigma \left\{ \frac{4 \log n - \log \log n - \log 4\pi - 2(S_{1r} - C)}{\sqrt{2 \log n}} + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right\}$$

$$\mathbf{D}^2\{w_r\} = \frac{\sigma^2}{\log n} \left( \frac{\pi^2}{6} - S_{2r} \right) + O\left(\frac{1}{\log n}\right)$$

ahol  $\sigma$  az alapeloszlás szórása,  $\log n$   $n$  természetes logaritmus,  $C$  az Euler-állandó,  $S_{1r}$ , illetve  $S_{2r}$  pedig a következők:

$$S_{1r} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r}, \quad S_{10} = 0,$$

$$S_{2r} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{r^2}, \quad S_{20} = 0.$$

Ezenkívül J. H. CADWELL [3] dolgozata foglalkozik ilyen irányú vizsgálatokkal. J. H. CADWELL aszimptotikus formulát ad szimmetrikus sűrűségfüggvényű alapeloszlás esetén a csonkított terjedelmek sűrűségfüggvényére. Részletesen foglalkozik még standardizált normális eloszlásból vett minta első csonkított minta-terjedelmével, táblázatot ad  $n = 30$ -ig  $\mathbf{M}\{w_1\}$ -re,  $\mathbf{D}^2\{w_1\}$ -re,  $\beta_1$ -re és  $\beta_2$ -re, valamint  $w_1$  alsó és felső valószínűségi szintekhez tartozó szignifikancia-pontjaira. Vizsgálja ezenkívül a  $w_0$ ,  $w_1$  és  $w_2$  becslések hatásosságát. A kapott értékeket grafikusán ábrázolva kitűnik, hogy  $n = 17$ -ig  $w_0$ , ettől kezdve  $n = 31$ -ig  $w_1$ , innen pedig  $w_2$  lesz a három becslés közül a legjobb.

J. H. CADWELL eredményei lehetővé teszik  $w_1$ -nek szórásbecslésre való felhasználását  $n = 30$ -ig. A gyakorlatban azonban sokszor előfordulnak nagyobb minták mellett is olyan esetek, ahol szükség lehet a szórás gyors becslésére. Jelen dolgozat ezért folytatja J. H. CADWELL vizsgálatait. Mindenekelőtt a csonkított terjedelmek alapján történő szórásbecsléshez szükség van a becslést torzítatlanná tevő  $d_{r,n}$  állandókra, amelyek a standardizált normális eloszlás  $r$ -edik csonkított terjedelmének várható értékei. Ezek  $n = 50$ -ig könnyen számíthatók, például E. S. PEARSON és H. O. HARTLEY [2] 28. táblázatából, ahol a standardizált normális eloszlás rendezett mintaelemeinek várható értéke található két tizedes pontossággal. Ugyanis

$$(3) \quad \mathbf{M}\{w_r\} = \mathbf{M}\{\xi_{n-r}^* - \xi_{r+1}^*\} = 2 \mathbf{M}\{\xi_{n-r}^*\}$$

mivel az eloszlás szimmetrikus.  $n = 50$ -től azonban eddig még nem voltak meg ezek a  $d_{r,n}$  állandók. Ezt a hiányt igyekszik betölteni a jelen dolgozat, táblázatban adva ezen  $d_{r,n}$  értékeket  $r = 2$ -re  $n = 50$ –70-ig,  $r = 3, 4, 5$ -re  $n = 50$ –100-ig,  $r = 5$ -re csak ötönként. A számítás a következőn alapult:

Ismeretes, de könnyen be is látható, hogy az  $r$ -edik rendezett mintaelem sűrűségfüggvénye, ha az alapeloszlás sűrűségfüggvénye  $f(x)$ :

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(x) \{1 - F(x)\}^{n-r} F^{r-1}(x).$$



Ebből szimmetrikus, speciálisan standardizált normális alapeloszlás esetén (3) alapján

$$(4) \quad \mathbf{M}\{w_r\} = 2(r+1) \left( \frac{n}{r+1} \right) \int_{-\infty}^{\infty} x \{1 - \Phi(x)\}^r \Phi^{n-r-1}(x) \varphi(x) dx,$$

ahol

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$n = 50$ -re,  $60$ -ra,  $70$ -re,  $80$ -ra és  $100$ -ra a számítás a (4) képlet alapján történt, numerikus integrálással  $w_r$ -ben,  $0,1$ -es intervallumokkal. A kapott értékek 3 tizedesjegyre pontosak. A többi  $d_{r,n}$  meghatározása interpolációval történt. Interpolációra a (2)-ben adott aszimptotikus formula főtagját használtuk úgy, hogy minden szereplő  $n$ -re és  $r$ -re meghatároztuk az aszimptotikus formulából adódó  $\mathbf{M}'\{w_r\}$ -et, s mivel ennek függvényében ábrázolva a számított  $\mathbf{M}\{w_r\}$ -eket, azok igen jó közelítésben egy-egy egyenesen fekszenek, a számított  $\mathbf{M}\{w_r\}$ -ek között —  $\mathbf{M}'\{w_r\}$ -et tekintve független változónak — lineárisan interpoláltunk.

Az egyes csonkított terjedelmek hatásosságát az

$$e\{w_r\} = \frac{\mathbf{D}^2\{s\}}{\mathbf{D}^2\{w_r\}/\mathbf{M}^2\{w_r\}}$$

képlet alapján számítottuk, ahol

$$s = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}$$

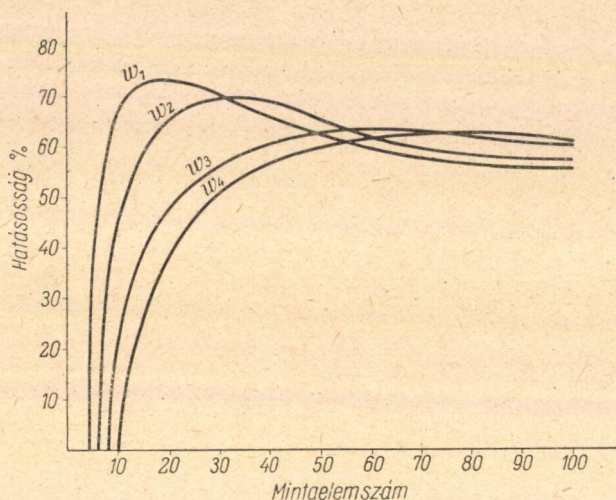
és

$$\mathbf{D}^2(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right)^2 (n-1) - 1$$

$\mathbf{D}^2\{w_r\}$  kiszámítása a szereplő  $n$ -ekre és  $r$ -ekre  $\mathbf{M}\{w_r\}$ -hez hasonlóan numerikus integrálással történt. Az alábbi táblázat adja a kapott szórásnégyzeteket és hatásosságokat, az ábra pedig — részben J. H. CADWELL adatait is felhasználva — a hatásosság változását mutatja.



$r \backslash n$	2		3		4		5	
	$D^2 \{w_r\}$	$100 e \{w_r\} \%$	$D^2 \{w_r\}$	$100 e \{w_r\} \%$	$D^2 \{w_r\}$	$100 e \{w_r\} \%$	$D^2 \{w_r\}$	$100 e \{w_r\} \%$
50	0,171	65,4	0,140	62,6	0,122	59,8		
60	0,162	61,9	0,131	63,2	0,114	61,3		
70	0,155	59,8	0,123	62,9	0,107	62,1		
80			0,118	61,9	0,103	62,3		
100			0,110	59,8	0,095	60,6	0,082	62,2



Az ábrából kitűnik, hogy 55 körül  $w_3$  jobb lesz, mint  $w_2$ , 76-nál pedig már  $w_4$  lesz az optimális. 100-nál azonban már  $w_5$  jobb, mint  $w_4$ . Látható továbbá az is, hogy megfelelő  $w_r$  alapján becsülve a szórást,  $n = 50-10$ , elemszámú mintáknál elérhető a kb. 63%-os hatásosság, ami azt jelenti hogy gyors szórásbecslésre jól fel lehet használni a csonkított minta-terjedelmeket. Lényegesen lehet növelni a szórásbecslés hatásosságát, ha nem egy, hanem két — a megfelelő elemszám mellett legjobb két — csonkított minta-terjedelem lineáris kombinációja alapján becsülünk. Ebben az esetben — mint J. H. CADWELL számításai is mutatják — általában elérhető a 75%-os hatásosság. Mindez azt mutatja, hogy a csonkított minta-terjedelmeket széles területen jól lehet alkalmazni normális, vagy közel normális eloszlásból vett közepes minták esetén az eloszlás szórásának gyors és egyszerű becslésére.



## IRODALOM

- [1] H. CRAMÉR: *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton, Princeton University Press, 1946. („Princeton Mathematical Series” No. 9)
- [2] H. O. HARTLEY—E. S. PEARSON: *Biometrika Tables for Statisticians, I*. Cambridge University Press, Cambridge, 1954.
- [3] J. H. CADWELL: „The distribution of quasi-ranges in samples from a normal population.” *Annals of Mathematical Statistics* **24** (1953) 603—613.
- [4] D. R. COX: „The mean and coefficient of variations of range in small samples from non-normal population.” *Biometrika* **41** (1954) 469—481.
- [5] F. E. GRUBBS and L. WEAVER: „The best unbiased estimate of population standard deviation based on group ranges.” *Journal of the American Statistical Association* **42** (1947) 224—241.
- [6] F. MOSTELLER: „On some useful »inefficient« statistics.” *Annals of Mathematical Statistics* **17** (1946) 377—394.

Standard normális eloszlásból vett minta csonkított terjedelmének várható értéke

$$d_{r,n} = \mathbf{M}\{w_r\}$$

$\begin{smallmatrix} r \\ n \end{smallmatrix}$	2	3	4	5	$\begin{smallmatrix} r \\ n \end{smallmatrix}$	3	4	5
50	3,257	2,927	2,662	2,44	76	3,346	3,105	
51	3,276	2,948	2,684		77	3,360	3,118	
52	3,295	2,968	2,706		78	3,372	3,131	
53	3,313	2,988	2,726		79	3,384	3,144	
54	3,331	3,007	2,747		80	3,396	3,156	2,95
55	3,349	3,026	2,770	2,55	81	3,408	3,169	
56	3,366	3,045	2,787		82	3,419	3,181	
57	3,383	3,062	2,806		83	3,432	3,194	
58	3,400	3,080	2,825		84	3,443	3,205	
59	3,415	3,096	2,841		85	3,454	3,216	3,02
60	3,432	3,115	2,860	2,64	86	3,464	3,229	
61	3,448	3,131	2,878		87	3,475	3,239	
62	3,462	3,147	2,895		88	3,487	3,250	
63	3,477	3,163	2,912		89	3,496	3,260	
64	3,492	3,180	2,929		90	3,507	3,272	3,08
65	3,506	3,194	2,945	2,73	91	3,517	3,282	
66	3,520	3,209	2,961		92	3,527	3,293	
67	3,534	3,224	2,976		93	3,537	3,303	
68	3,548	3,238	2,991		94	3,547	3,314	
69	3,561	3,253	3,007		95	3,556	3,324	3,13
70	3,574	3,267	3,021	2,81	96	3,566	3,334	
71		3,280	3,036		97	3,575	3,343	
72		3,294	3,050		98	3,585	3,353	
73		3,308	3,064		99	3,594	3,363	
74		3,321	3,078		100	3,604	3,373	3,18
75		3,334	3,092	2,88				

(Beérkezett: 1956. VII. 27.)



## ОБ ОЦЕНКЕ ДИСПЕРСИИ НА ОСНОВАНИИ РАЗМАХА ВЫБОРКИ И УРЕЗАННОГО РАЗМАХА ВЫБОРКИ

Ö. ÉLTETŐ

## Резюме

Автор, резюмируя результаты, связанные с оценкой дисперсии случайной величины с нормальным распределением на основании размаха (range) выборки и среднего размаха (group ranges) выборки занимается урезанным размахом (quasi-ranges) выборок со средним ( $n = 30 - 100$ ) числом элементов. Продолжая исследования J. H. CADWELL [3], статья дает при  $n$  равном от 50 до 100, эффективность  $w_2$ ,  $w_3$  и  $w_4$ , а также таблицу математического ожидания урезанного размаха выборок, взятых из стандартного нормального распределения.

## ON THE ESTIMATION OF THE STANDARD DEVIATION BASED ON RANGE AND QUASI-RANGES

Ö. ÉLTETŐ

## Summary

The author sums up the known results concerning the estimation of the dispersion of a normally distributed random variable based on range and group ranges. The paper deals furthermore with the quasi-ranges in mediocre samples (from  $n = 30$  to 100). Continuing J. H. CADWELL's investigations it contains the efficiencies of  $w_2$ ,  $w_3$  and  $w_4$  from  $n = 50$  to  $n = 100$  and a table with the expectations of quasi-ranges in samples from a standard normal population.



**KIEGÉSZÍTÉS**  
**„A RENDEZETT MINTÁK ELMÉLETÉNEK ALKALMAZÁSA**  
**A STATISZTIKAI MINŐSÉGELLENŐRZÉSBEN”**  
**CÍMŰ DOLGOZATHOZ**

FONTÁNYI ÁGOTA, SARKADI KÁROLY és VAS ÉVA

A címben említett dolgozatban [1] ismertettük a gyártásközi minőség-ellenőrzésnek egy módszerét, amely a rendezett minták elméletén alapszik. A cikk függeléke tartalmazza a rendezett mintaelemek ellenőrzőhatárainak kiszámításához szükséges táblázatot is (I. táblázat). Ez a táblázat 95%-os és 99%-os valószínűségi (szignifikancia-) határokat ad meg, mégpedig 15 elemű mintáig bezárólag minden egyes mintaelem ellenőrző határához, ettől kezdve 17, 21, 25 és 29 elemű mintáknál pedig 5—5 egymástól egyforma távolságra eső kiemelt mintaelemre vonatkozóan (a két szélső elemre, a mediánra és a közöttük középen elhelyezkedő elemekre).

Gyakorlati szempontból szükségesnek mutatkozott a közölt táblázatok kiegészítése. A táblázatokban alkalmazott 95%-os, illetve 99%-os valószínűségi szint a gyakorlati esetek egy részében alkalmas ugyan, számos gyakorlati esetben azonban még a 99%-os szint sem mutatkozik elég magasnak, azaz a kontroll-kártyán túlságosan szűk ellenőrző határokat ad, túlságosan sokszor fog előfordulni jó gyártás esetén, hogy az ellenőrző határon kívül esnek értékek. Ez gyakorlati szempontból nem kívánatos.

Mint ismeretes, az átlag ellenőrzésére szolgáló diagramokban általában az úgynevezett  $3\sigma$ -s ellenőrző határokat használják, ami 99,73%-os szintnek felel meg. A 99,8%-os ehhez közel eső kerek érték, ezt a szintet sok helyen alkalmazzák a szórás és a terjedelem ellenőrző diagramjain alkalmazott határok kiszámításához is. Mindezen indokok alapján a cikkben közölt táblázatokat itt a 99,8%-os valószínűségi szinthez tartozó értékekkel egészítjük ki.

Eredeti cikkünkben említettük, hogy a rendezett minta középső tagját, a mediánt, valamint a két szélső értéket általánosabban használják minőség-ellenőrzésre, mint a többi rendezett mintaelemet. A *Magyar Szabványügyi Hivatal* a gyártásközi minőségellenőrzésről egy szabványt készül kiadni, amely többek között a medián-terjedelem ellenőrzőkártyát is ismerteti. Táblázataink természetesen a medián-terjedelem kártya alkalmazásánál is használhatók a medián ellenőrzőhatárainak kiszámítására.

Itt jegyezzük meg azt, hogy a medián ellenőrző diagramjára vonatkozó irodalomban sehol sem találtunk utalást arra, hogy hogyan kell a medián



ellenőrzőhatárait exakt módon kiszámítani. Így pl. a [2] és [3] alatt idézett források egy közelítő képletet ajánlanak az ellenőrzőhatár kiszámítására. Ezen közelítő képlet szerintük N. V. SZMIRNOV-tól ered, és a Student-féle eloszlás táblázatának használatán alapul. Egyik forrás sem közli, hogy N. V. SZMIRNOV hol és mikor tette közzé ezt a közelítő képletet, és a képletből nem tudtuk megállapítani, hogy mi a közelítés alapgondolata. N. V. SZMIRNOV képletével számított értékek némileg eltérnek az egzakt módon számított értékektől, ezért ennek a képletnek használata nem ajánlható, de nem is szükséges. Táblázataink egzakt értékeket adnak meg, és ha bárkinek valamely okból olyan szintre vonatkozó adatokra volna szüksége, amely azokban nem szerepel az eredeti cikkben ismertetett módszerrel bármely szintre megállapíthatja. (5 elemű minta mediánjának ellenőrzőhatárai [1] cikkünk 2. sz. ábrája segítségével is megállapítható a közbeeső valószínűségi szintekre is.)

Végül megemlítjük, hogy cikkünk megjelenése óta megjelent M. MASUYAMA hasonló tárgyú cikke is [4]. MASUYAMA ugyancsak BRAGINSZKIJA hivatkozik, és ő is a helyes valószínűségi határokat adja meg ugyanarra a két szintre, amire mi is megadtuk, mégpedig  $n = 3$  és  $n = 10$  között. Táblázata általában egy-két tizedessel pontosabb értékeket ad meg az általunk közölteknél.

Táblázat a rendezett elemű minták ellenőrzőhatárainak  
kiszámításához

(1) A (0,1) intervallumban egyenletes eloszlásra: az  $x_1$  alsó és  $x_2$  felső ellenőrzőhatár értékei; tetszőleges  $F(x)$  eloszlásfüggvénnyel bíró folytonos eloszlásra:  $F(x_1)$  és  $F(x_2)$  értékei.

(2) Normális eloszlásra azon kontroll-tényezők, melyek a tényleges szórással megszorozva az ellenőrzőhatároknak az átlagtól való távolságát adják. (0 középértékű és 1 szórású normális eloszlás esetén az  $x_1$  és  $x_2$  ellenőrzőhatárok.)

(3) Normális eloszlásra azon kontroll-tényezők, melyek  $\bar{R}$ -sal megszorozva adják az ellenőrzőhatárok távolságát az átlagtól. (0 középértékű és 1 várható mintabeli terjedelmű normális eloszlás esetén az  $x_1$  és  $x_2$  ellenőrzőhatárok.)

99,8 %

Alsó határ [ $F_{nk}(x_1) = 0,001$ ]				Felső határ [ $F_{nk}(x_2) = 0,999$ ]			
(k)	(1)	(2)	(3)	(k)	(1)	(2)	(3)
$n = 4$							
1	0,000250	- 3,48	- 1,69				
2	0,012	- 2,25	- 1,09				
				3	0,988	+ 2,25	+ 1,09
				4	0,999750	+ 3,48	+ 1,69
$n = 5$							
1	0,00200	- 3,54	- 1,52				
3	0,047	- 1,68	- 0,72				
				3	0,933	+ 1,68	+ 0,72
				5	0,99980	+ 3,54	+ 1,52



Alsó határ [ $F_{nk}(x_1) = 0,001$ ]				Felső határ [ $F_{nk}(x_2) = 0,999$ ]			
(k)	(1)	(2)	(3)	(k)	(1)	(2)	(3)
$n = 6$							
1 3	0,000167 0,037	- 3,59 - 1,78	- 1,42 - 0,70	4 6	0,963 0,999833	+ 1,78 + 3,59	+ 0,70 + 1,42
$n = 7$							
1 4	0,00014 0,076	- 3,64 - 1,43	- 1,35 - 0,53	4 7	0,924 0,99986	+ 1,43 + 3,64	+ 0,53 + 1,35
$n = 8$							
1 4	0,000125 0,064	- 3,66 - 1,52	- 1,28 - 0,53	5 8	0,936 0,999875	+ 1,52 + 3,66	+ 0,53 + 1,28
$n = 9$							
1 5	0,000110 0,102	- 3,69 - 1,27	- 1,24 - 0,43	5 9	0,898 0,999890	+ 1,27 + 3,69	+ 0,43 + 1,24
$n = 10$							
1 5	0,000100 0,090	- 3,72 - 1,34	- 1,21 - 0,44	6 10	0,910 0,999900	+ 1,34 + 3,72	+ 0,44 + 1,21
$n = 11$							
1 6	0,000091 0,125	- 3,74 - 1,15	- 1,18 - 0,36	6 11	0,875 0,999909	+ 1,15 + 3,74	+ 0,36 + 1,18
$n = 12$							
1 6	0,000085 0,112	- 3,76 - 1,22	- 1,15 - 0,37	7 12	0,888 0,999915	+ 1,22 + 3,76	+ 0,37 + 1,15
$n = 13$							
1 7	0,000077 0,144	- 3,78 - 1,06	- 1,13 - 0,32	7 13	0,856 0,999923	+ 1,06 + 3,78	+ 0,32 + 1,13



Alsó határ [ $F_{nk}(x_1) = 0,001$ ]				Felső határ [ $F_{nk}(x_2) = 0,999$ ]			
(k)	(1)	(2)	(3)	(k)	(1)	(2)	(3)
$n = 14$							
1	0,000072	- 3,80	- 1,12	8	0,869	+ 1,12	+ 0,33
7	0,131	- 1,12	- 0,33	14	0,999928	+ 3,80	+ 1,12
$n = 15$							
1	0,000069	- 3,81	- 1,10	8	0,839	+ 0,99	+ 0,29
8	0,161	- 0,99	- 0,29	15	0,999931	+ 3,81	+ 1,10
$n = 17$							
1	0,000059	- 3,85	- 1,07	9	0,824	+ 0,93	+ 0,26
9	0,176	- 0,93	- 0,26	17	0,999941	+ 3,85	+ 1,07
$n = 21$							
1	0,000048	- 3,90	- 1,03	11	0,799	+ 0,84	+ 0,22
11	0,201	- 0,84	- 0,22	21	0,999952	+ 3,90	+ 1,03
$n = 25$							
1	0,000040	- 3,94	- 1,00	13	0,769	+ 0,74	+ 0,19
13	0,231	- 0,74	- 0,19	25	0,999960	+ 3,94	+ 1,00
$n = 29$							
1	0,000034	- 3,98	- 0,98	15	0,763	+ 0,72	+ 0,18
15	0,237	- 0,72	- 0,18	29	0,999966	+ 3,98	+ 0,98

## IRODALOM

- [1] FONTÁNYI Á.—SARKADI K.—VAS GY.-NÉ: „A rendezett minták elméletének alkalmazása a statisztikai minőségellenőrzésben.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 307–334.
- [2] A. M. Длин: *Математическая статистика в технике*. Советская Наука, Москва, 1951. (pp. 171–173.)
- [3] *Энциклопедический Справочник „Машиностроение”* Том 15. Машгиз, Москва, 1951. (p. 622).
- [4] M. MASUYAMA: „Tables of two-sided 5% and 1% control limits for individual observations of the  $r$ -th order.” *Sankhyā* **15** (1955) 291–294.



ДОБАВЛЕНИЕ К РАБОТЕ  
«ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВАРИАЦИОННЫХ РЯДОВ  
ПРИ СТАТИСТИЧЕСКОМ КОНТРОЛЕ КАЧЕСТВА»

Á. FONTÁNYI—K. SARKADI—É. VAS

**Резюме**

Таблицы статьи [1] относятся к уровням 95% и 99%. На основании возникших на практике запросов дополнение дает соответствующие таблицы для уровня 99,8%.

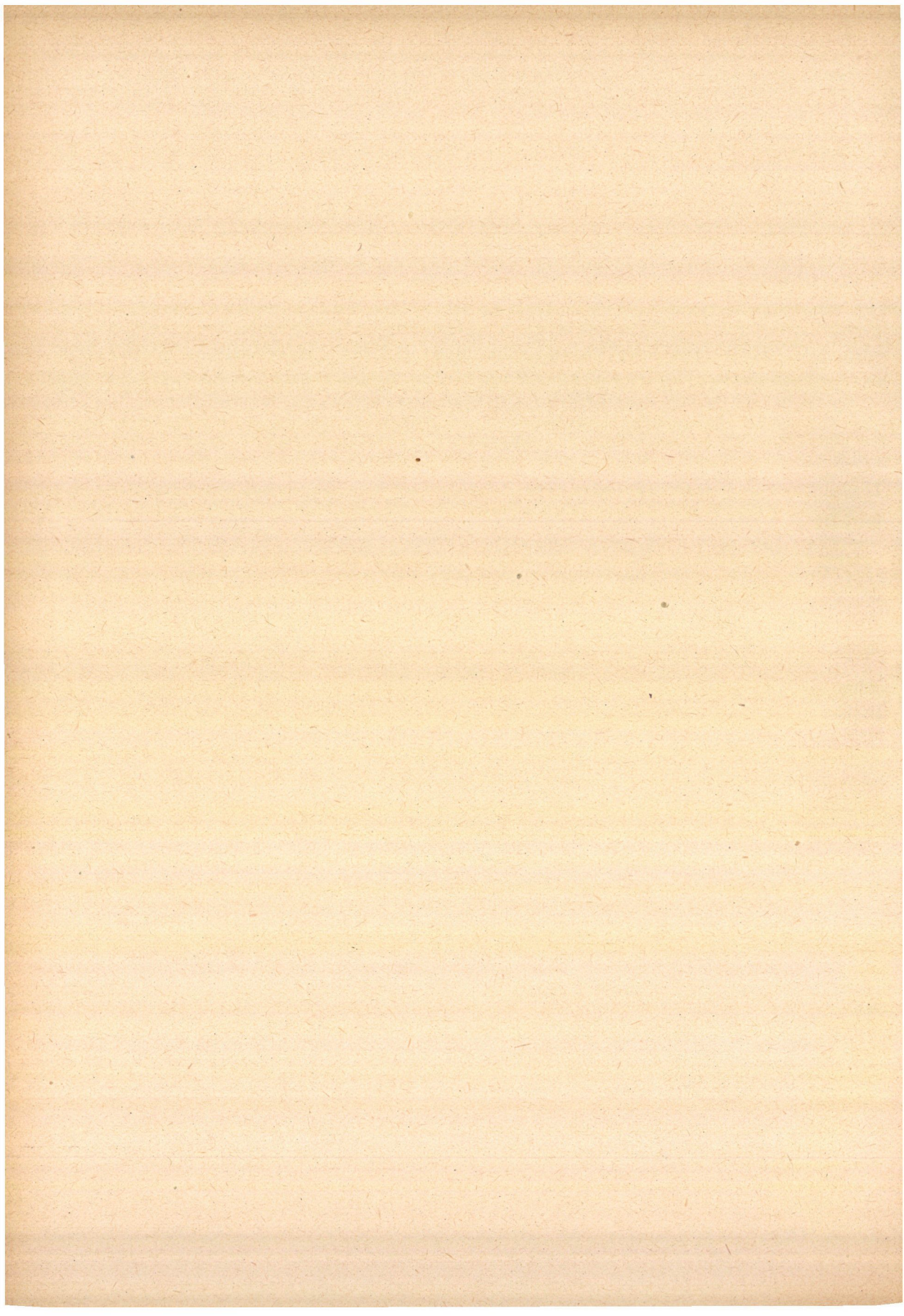
ERGÄNZUNG ZUR ARBEIT  
«ANWENDUNG DER THEORIE DER GEORDNETEN STICHPROBEN IN  
DER STATISTISCHEN QUALITÄTSKONTROLLE»

Á. FONTÁNYI—K. SARKADI—É. VAS

**Zusammenfassung**

Die Tabellen der originalen Arbeit beziehen sich auf Sicherheitswahrscheinlichkeiten von 95% und 99%. Auf Grund der Bedürfnisse der Praxis wurden in dieser Ergänzung die entsprechenden Tabellen für eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 99,8% ausgearbeitet.







# TÖMÖR FÉMGÖMBBEN FELLÉPŐ ÖRVÉNYÁRAMVESZTESÉG MEGHATÁROZÁSÁRÓL

KARDOS GILBERT

## Összefoglalás

A szerző ezen dolgozatban kiszámítja egy — az időben szinuszosan változó homogén mágneses térbe helyezett — tömör fémgömb hatására kialakuló elektromágneses teret, továbbá a gömbben fellépő Joule-vesztességet.

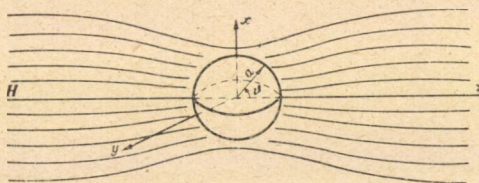
Ezt a feladatot kétdimenzióban FREUD GÉZA [1] megoldotta; ezen dolgozatban az [1]-ben foglaltak háromdimenziós analogonjával foglalkozunk.

Az irodalomban ([1], [2], [3]) a problémát eddig csak közelítéssel oldották meg; tudniillik elhanyagolták az örvényáramok terének visszahatását az eredeti homogén mágneses térre. Ez nyilván csak az alacsony frekvenciás határesetben megengedett. Mi a feladat egzakt megoldását adjuk, vagyis a Maxwell-egyenletekből kiindulva meghatározzuk a gömbön kívül és belül a teret, majd ennek felhasználásával kiszámítjuk a gömbben fellépő örvényáramvesztességet.

Ezen kérdésnek az elektrotechnika azon problémáiban van jelentősége, ahol kis gömbszerű testek erős indukciónak vannak kitéve, például porvasmagoknál.

## 1. §. A probléma matematikai megfogalmazása

Vegyünk fel a koordinátarendszer origójában egy  $a$  sugarú gömböt az alábbi 1. ábra szerint:



1. ábra



Legyen a külső mágneses tér  $z$  irányú, változzék az időben szinuszosan, azaz legyen  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp \{j\omega t\}$ . (Itt  $j = \sqrt{-1}$ .) A mágneses tér által a gömbben indukált örvényáramok szekunder tere az eredeti homogén mágneses teret eltorzítja. Az eltolási áramot a vezetési áramhoz képest elhanyagoljuk.

Az elektromos térerősség a gömbön belül kielégíti a

$$\Delta \mathbf{E}_1 = \gamma \mu_1 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t}$$

differenciálegyenletet, ahol  $\gamma$  a gömb anyagának fajlagos vezetőképessége,  $\mu_1$  a permeabilitása. A gömbön kívül kielégül a  $\Delta \mathbf{E}_2 = 0$  Laplace-egyenlet. A mágneses térerősségre hasonló egyenletek érvényesek.

Fentiekén kívül a megoldásoknak ki kell még elégíteniök a gömb felszínén fellépő következő csatlakozási feltételeket:

$$1^\circ (\mathbf{E}_1)_t = (\mathbf{E}_2)_t$$

$$2^\circ (\mathbf{H}_1) = (\mathbf{H}_2)_t$$

$$3^\circ \mu_0 (\mathbf{H}_1)_n = \mu_1 (\mathbf{H}_2)_n,$$

ahol  $\mu_0$  a külső szigetelő közeg permeabilitása.

Ezen egyenletek azt fejezik ki, hogy az elektromos és mágneses térerősség tangenciális komponensei, továbbá a mágneses indukció normális komponense a gömb felületén folytonosan haladnak át. Egy további feltétel: a  $\mathbf{H}$  mágneses térnek a gömbtől nagy távolságban (matematikailag a végtelenben) az eredeti külső homogén térrel kell megegyeznie, vagyis  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ .

Természetesen nem szükséges az  $\mathbf{E}$ -re és  $\mathbf{H}$ -ra vonatkozó differenciálegyenleteket külön megoldanunk, mert például, ha  $\mathbf{E}$ -t meghatároztuk, akkor  $\mathbf{H}$  a Maxwell-egyenletekből kiszámítható, és fordítva.

A csatlakozási feltételek sem függetlenek egymástól. Az egyik térjellemzőre vonatkozó csatlakozási feltételek teljesülésével a másakra vonatkozó csatlakozási feltételek is kielégülnek.

Megjegyezzük még, hogy az egész dolgozat folyamán a Giorgi-féle mértékrendszerben dolgoztunk. A feladat természetének megfelelően gömbkoordinátákat alkalmazunk. A feladat szimmetriájából következik, hogy az elektromágneses tér a  $\varphi$  koordinátáktól független, azaz  $\partial/\partial\varphi = 0$ .

Ezek után rátérünk a probléma megoldására.

Írjuk fel a Maxwell-egyenleteket gömbkoordinátákban, és vegyük figyelembe, hogy mindenütt  $\partial/\partial\varphi = 0$ . A térjellemzőket  $F(r) \exp(j\omega t)$  alakban keressük.

$$\text{I. } \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r H_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta H_\varphi) \right\} = i_r = \gamma E_r,$$

$$\text{II. } \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} H_r - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\vartheta) \right\} = i_\varphi = \gamma E_\varphi;$$



$$\text{III. } \frac{1}{r \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \vartheta H_{\varphi}) - \frac{\partial}{\partial \varphi} H_r \right\} = i_{\vartheta} = \gamma E_{\varphi};$$

$$\text{IV. } \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (r E_{\vartheta}) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r E_{\varphi} \sin \vartheta) \right\} = - \frac{\partial B_r}{\partial t} = - j \omega \mu H_r;$$

$$\text{V. } \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} E_r - \frac{\partial}{\partial r} (r E_{\vartheta}) \right\} = - \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial t} = - j \omega \mu H_{\varphi}$$

$$\text{VI. } \frac{1}{r \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r E_{\varphi} \sin \vartheta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} E_r \right\} = - \frac{\partial B_{\vartheta}}{\partial t} = - j \omega \mu H_{\vartheta}$$

Látható, hogy a hat Maxwell-egyenlet két csoportra osztható. Az első csoportban — a II., IV. és VI. egyenletekben — csak  $E_{\varphi}$ ,  $H_r$  és  $H_{\vartheta}$  szerepel, a másodikban — az I., III. és V. egyenletekben — csak az  $E_{\vartheta}$ ,  $E_r$  és  $H_{\varphi}$  mennyiségek szerepelnek.

Megmutatjuk, hogy a második csoport egyenletei számunkra érdektelenek.

Feltesszük, hogy a gömbön belül  $i_r = 0$  — azaz az örvényáramoknak nincs radiális komponense. Ezt a probléma geometriai feltételei indokolják. Az  $i_r = 0$  összefüggésből  $i_r = \gamma E_r$  miatt egyszersmind  $E_r = 0$ . Ezt az I. egyenletbe helyettesítve

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta H_{\varphi}) = 0$$

adódik, azaz

$$H_{\varphi} = \frac{C}{r \sin \vartheta}.$$

A feladat geometriai feltételeiből és a gerjesztő mágneses térre vonatkozó feltételek következtében adódik, hogy a gömbtől nagy távolságban  $H_{\varphi} = 0$ .

A

$$H_{\varphi} = \frac{C}{r \sin \vartheta}$$

egyenlet érvényes a gömbön kívül is, mert itt  $\gamma = 0$ , tehát  $i_r = 0$ . De a „ $H$ -megoldásnak” korláatosnak kell lennie a gömbön belül. Ez csak úgy lehet, ha  $C = 0$ . A gömb felületén  $r = a$  esetben  $H_{\varphi}$  folytonosan megy át, tehát mindenütt  $H_{\varphi} = 0$ .

Ebből és III.-ból, továbbá a  $H_r$ -nek a  $\varphi$ -től való függetlenségéből adódik, hogy  $i_{\vartheta} = 0$ , tehát  $E_{\vartheta} = 0$ , végül is:  $H_{\varphi} = E_r = E_{\vartheta} = 0$ .

## 2. §. A tér meghatározása a gömbön kívül

Legyen  $E_1$  a térerősség a gömbön kívül, és  $E_2$  a gömbön belül. Oldjuk meg a  $\Delta E_1 = 0$  egyenletet. Tudjuk, hogy

$$\text{rot rot } E_1 = \text{grad div } E_1 - \Delta E_1.$$



Mivel a szigetelő közegben szabad töltések nincsenek,  $\operatorname{div} \mathbf{E}_1 = 0$ . Ezért megoldjuk a következő egyenletet:

$$\Delta \mathbf{E}_1 = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = 0.$$

De mivel

$$E_r = E_\vartheta = 0 \quad \text{és} \quad E_\varphi \neq 0,$$

továbbá  $\partial/\partial\varphi = 0$ ,  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1$  csak  $\varphi$  irányú lehet, tehát csak a

$$(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1)_\varphi = 0$$

egyenlettel foglalkozunk.

Térbeli koordinátákat használva:

$$(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1)_\varphi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial\vartheta} (\operatorname{rot}_r E_\varphi) - \frac{\partial}{\partial r} (r \operatorname{rot}_\vartheta \mathbf{E}_1) \right\} = 0,$$

azaz

$$(1) \quad -\frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (E_{1\varphi} \sin\vartheta) \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r E_{1\varphi}) = 0.$$

Így a következő parciális differenciálegyenletet kapjuk:

$$(1^*) \quad \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (E_{1\varphi} \sin\vartheta) \right\} + r \frac{\partial^2 (r E_{1\varphi})}{\partial r^2} = 0.$$

A megoldást a következő alakban keressük:

$$E_{1\varphi}(r, \vartheta) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta).$$

Ezt (1)-be helyettesítve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (R \Theta \sin\vartheta) \right\} + r \frac{\partial^2 (r R \Theta)}{\partial r^2} = \\ = R \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (\Theta \sin\vartheta) \right\} + r \frac{\Theta \partial^2 (r R)}{\partial r^2} = 0 \end{aligned}$$

$1/R\Theta$ -val szorozva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\Theta \sin\vartheta) \right\} + \frac{r}{R} \frac{d^2 (r R)}{dr^2} = \\ = \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + \frac{\cotg\vartheta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\vartheta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} + \frac{r}{R} \left( r \frac{d^2 R}{dr^2} + 2 \frac{dR}{dr} \right) = 0, \end{aligned}$$

vagyis

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + \frac{\cotg\vartheta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\vartheta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} = \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr},$$



amiből

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} = k = \text{konst.} \quad .$$

Ezt átrendezve, egy *Euler-egyenlethez* jutunk:

$$(2) \quad r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - kR = 0 \quad .$$

A másik egyenlet:

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + \frac{\cot \vartheta}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\vartheta} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} + k = 0 \quad ;$$

ebből az  $x = \cos \vartheta$ ,  $\Theta = u$  helyettesítéseket bevezetve, az

$$(3) \quad (1 - x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + \left( k - \frac{1}{1 - x^2} \right) u = 0$$

egyenlet adódik; ez pedig a *Legendre-féle differenciálegyenlet*.

Az Euler-egyenlet megoldása:

$$R(r) = Ar^n + Br^{-(1+n)}$$

ahol  $A$  és  $B$  tetszőleges konstansok, és  $k = n(n + 1)$ . Ez utóbbi helyettesítésre (3) normálalakra transzformálása céljából van szükség. Csak az  $n = 1$ -hez tartozó megoldás felelhet meg, mert ellenkező esetben, ha  $r \rightarrow \infty$ ,  $R$  túl gyorsan tartana  $\infty$ -hez.

Oldjuk meg most a (3) egyenletet. (3) nem más, mint a következő egyenletnek egy speciális alakja  $r = 1$  esetben:

$$(4) \quad (1 - x^2) \frac{d^2 P_n^r(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n^r(x)}{dx} + \left\{ n(n + 1) - \frac{r^2}{1 - x^2} \right\} P_n^r(x) = 0 \quad .$$

Ennek megoldása:

$$P_n^r(x) = (1 - x^2)^{\frac{r}{2}} \frac{dP_n(x)}{dx}$$

ahol  $P_n^r(x)$  az úgynevezett *kapcsolt Legendre-függvény*. (3) megoldása tehát:

$$P_n^1(x) = \sqrt{1 - x^2} \frac{dP_n(x)}{dx}$$

vagy az  $x = \cos \vartheta$  helyettesítéssel:

$$P_n^1(\cos \vartheta) = \sin \vartheta \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d \cos \vartheta} = - \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \quad .$$



A megoldás  $k = 2$ , azaz  $n = 1$  esetén tehát a következő:

$$u(x) = CP_1^1(x) = CP_1^1(\cos \vartheta)$$

és

$$\Theta(\vartheta) = CP_1^1(\cos \vartheta) = C \sin \vartheta.$$

Ezzel (1) megoldása:

$$E_{1\varphi} = R \Theta = (Ar + Br^{-2}) C \sin \vartheta.$$

Az  $AC = C_1$ ,  $BC = C_2$  jelöléssel:

$$(5) \quad E_{1\varphi} = (C_1 r + C_2 r^{-2}) P_1^1(\cos \vartheta).$$

Határozzuk meg az első Maxwell-egyenletből a mágneses térerősség komponenseit:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_r \mathbf{E}_1 &= -\frac{\partial B_r}{\partial t} = -j \omega \mu_0 H_r = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (E_{1\varphi} \sin \vartheta) = \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial E_{1\varphi}}{\partial \vartheta} - \frac{E_{1\varphi}}{r(\cot \vartheta)^{-1}} \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot}_\vartheta \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial B_\vartheta}{\partial t} = -j \omega \mu_0 H_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_{1\varphi}) = \frac{E_{1\varphi}}{r} + \frac{\partial E_{1\varphi}}{\partial r}.$$

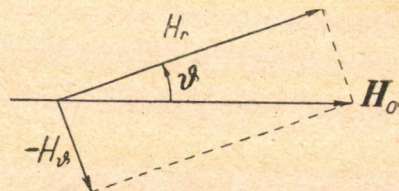
$E_{1\varphi}$  értékét ezekbe helyettesítve

$$j \omega \mu_0 H_r = 2 C_1 \cos \vartheta + 2 C_2 (\cos \vartheta) r^{-3}$$

$$j \omega \mu_0 H_\vartheta = -2 C_1 \sin \vartheta + C_2 (\sin \vartheta) r^{-3}$$

adódik. Végül

$$(6) \quad \left. \begin{aligned} H_r &= \left( \frac{2 C_1}{j \omega \mu_0} - \frac{2 C_2}{j \omega \mu_0 r^3} \right) \cos \vartheta \\ H_\vartheta &= \left( -\frac{2 C_1}{j \omega \mu_0} - \frac{C_2}{j \omega \mu_0 r^3} \right) \sin \vartheta. \end{aligned} \right\}$$



2. ábra

Mivel a gömbtől nagy távolságban  $H_\varphi = 0$ , a mágneses térerősségnek csak  $r$  és  $\vartheta$  irányú komponensei vannak, éspedig

$$H_r = H_0 \cos \vartheta$$

$$H_\vartheta = -H_0 \sin \vartheta$$



Így tehát (6) felhasználásával

$$(7) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} H_r = \frac{2C_1}{j\omega\mu_0} \cos \vartheta = H_0 \cos \vartheta ,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H_\vartheta = -\frac{2C_1}{j\omega\mu_0} \sin \vartheta = -H_0 \sin \vartheta ,$$

azaz

$$|\mathbf{H}_0| = \sqrt{H_\vartheta^2 + H_r^2} = H_0 .$$

Az eredeti mágneses teret kaptuk tehát.

(7)-ből rögtön adódik, hogy  $C_1 = \frac{1}{2} j\omega\mu_0 H_0$ , amit (5)-be és (6)-ba visszahelyettesítve :

$$(7^*) \quad E_{1\varphi}(r, \vartheta) = \left( \frac{j\omega\mu_0}{2} H_0 r + \frac{C_2}{r^2} \right) P_1^1(\cos \vartheta) .$$

Végeredményben a gömbön kívül a  $\mathbf{H}$  térerősség komponensei :

$$(7^{**}) \quad H_{1r}(r, \vartheta) = \left( H_0 + \frac{2C_2}{j\omega\mu_0 r^3} \right) \cos \vartheta ,$$

$$H_{1\vartheta}(r, \vartheta) = \left( -H_0 + \frac{C_2}{j\omega\mu_0 r^3} \right) \sin \vartheta ,$$

ahol  $C_2$  tetszőleges komplex állandó.

### 3. §. A tér meghatározása a gömbön belül

Induljunk ki a Maxwell-egyenletekből :

$$\text{I}^* \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} \quad \mathbf{i} = \gamma \mathbf{E} , \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 ;$$

$$\text{II}^* \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad \mathbf{B} = \mu_1 \mathbf{H} , \quad \text{div } \mathbf{E} = 0 .$$

I\*-ból :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} ;$$

II\*-ból :

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \text{rot } \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_1 \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} .$$

Mint hogy  $\mathbf{E} = \mathbf{E} e^{j\omega t}$ , a következő egyenletet kell megoldanunk :

$$(\text{rot rot } \mathbf{E}_2)_\varphi = -j\omega\mu_1 \gamma \mathbf{E}_{2\varphi} .$$



Hasonló módon, mint (1)-nél, a

$$(8) \quad (\text{rot rot } \mathbf{E}_2)_\varphi = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (E_{2\varphi} \sin \vartheta) \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r E_{2\varphi}) = \\ = j\omega\mu_1 \gamma E_{2\varphi}$$

parciális differenciálegyenlet adódik. A megoldást itt is ilyen alakban keressük:  $E_{2\varphi}(r, \vartheta) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta)$ . Így

$$(9) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (R\Theta \sin \vartheta) \right\} + \frac{1}{r} \frac{d^2(rR\Theta)}{dr^2} = j\omega\mu_1 \gamma R\Theta.$$

(9)-et  $r^2/R\Theta$ -val szorozva, és rendezve:

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\Theta \sin \vartheta) \right\} = -\frac{r}{R} \frac{d^2(rR)}{dr^2} + j\omega\mu_1 \gamma r^2 = -k.$$

Az

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\Theta \sin \vartheta) + k = 0$$

egyenletet (3) alatt már vizsgáltuk, a belőle nyert

$$(1-x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + \left( k - \frac{1}{1-x^2} \right) u = 0$$

Legendre-féle differenciálegyenlet megoldása:

$$u(x) = \Theta(\vartheta) = BP_1^1(\cos \vartheta),$$

felhasználva, hogy  $k = n(n+1) = 2$ .

A másik egyenletet  $R$ -rel szorozva és rendezve, a

$$(10) \quad r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + R(k - j\omega\mu_1 \gamma r^2) = 0 \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \left( \frac{k}{r^2} + j\omega\mu_1 \gamma \right) R = 0$$

*Bessel-féle differenciálegyenlet* adódik, amelyből az  $R = v/r$  új függő, illetve  $r = x$  új független változó bevezetésével

$$(11) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \left( -j\omega\mu_1 \gamma - \frac{k}{x^2} \right) v = 0$$



adódik. Legyen  $\alpha^2 = -j\omega\mu_1\gamma$  és  $k = m^2 - \frac{1}{4}$ ; (12) egyszerűbb alakban:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left( \alpha^2 - \frac{m^2 - 1/4}{x^2} \right) v = 0.$$

Általános megoldása:

$$v = C'_1 \sqrt{x} J_m(\alpha x) + C'_2 \sqrt{x} J_{-m}(\alpha x),$$

ahol  $J_m(\alpha x)$  az  $m$ -edrendű (komplex argumentumú) Bessel-függvény.

Tehát a (10) egyenlet megoldása:

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \{ C'_1 J_{3/2}(\alpha r) + C'_2 J_{-3/2}(\alpha r) \}.$$

$r = 0$ -nál azonban korlátosnak kell lennie a megoldásnak; ez csak akkor teljesülhet, ha  $C'_1 = 0$ . Így:

$$R(r) = \frac{C'_1}{\sqrt{r}} J_{3/2}(r \sqrt{-j\omega\mu_1\gamma}) = \frac{C'_1}{\sqrt{r}} J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right),$$

ahol  $\delta = \sqrt{2/\mu_1\omega\gamma}$  a behatolási mélység. Így a gömbön belül fellépő elektromos térerősség:

$$(12) \quad E_{2\varphi}(r, \vartheta) = \frac{C_1}{\sqrt{r}} J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right),$$

ahol  $C_1 = C'_1 B$ .

A Maxwell-egyenletek alapján most már könnyen határozhatjuk meg a gömb belsejében fellépő mágneses térerősség komponenseit (5\*) mintájára:

$$\text{rot}_r \mathbf{E}_2 = -\frac{E_{2\varphi}}{r} \cot \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial E_{2\varphi}}{\partial \vartheta} = -j\omega\mu_1 H_{2r},$$

$$\text{rot}_\vartheta \mathbf{E}_2 = \frac{E_{2\varphi}}{r} + \frac{\partial E_{2\varphi}}{\partial r} = -j\omega\mu_1 H_{2\vartheta}.$$

Ebből

$$(13) \quad \begin{aligned} j\omega\mu_1 H_{2r} &= \frac{2C_1}{\sqrt{r}} J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) \cos \vartheta \\ &- j\omega\mu_1 H_{2\vartheta} - \frac{C_1}{2r^{3/2}} J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) \sin \vartheta + \frac{C_1 \sin \vartheta}{\sqrt{r}} \frac{d}{dr} J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right). \end{aligned}$$

Végül, felhasználva a következő Bessel-függvények közti

$$\frac{d}{dy} J_q(y) = -\frac{q}{y} J_q(y) + J_{q-1}(y)$$



összefüggést, és bevezetve a  $\beta = \sqrt{-2j/\delta}$  jelölést:

$$\frac{d}{dr} J_{3/2}(\beta r) = -\frac{3}{2r} J_{3/2}(\beta r) + \beta J_{1/2}(\beta r);$$

továbbá

$$-j\omega\mu_1 H_{2\vartheta} = -\frac{C_1}{r^{3/2}} J_{3/2}(\beta r) \sin \vartheta + \frac{C_1 \beta}{\sqrt{r}} J_{1/2}(\beta r) \sin \vartheta.$$

Ezeket helyettesítve (13)-ba:

$$(14) \quad \begin{aligned} H_{2r} &= \frac{2C_1}{j\omega\mu_1 r^{3/2}} J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) P_1^1(\cos \vartheta), \\ H_{2\vartheta} &= \frac{C_1}{j\omega\mu_1 r^{3/2}} \left\{ J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) - r \frac{\sqrt{-2j}}{\delta} J_{1/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) \right\} P_1^1(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

#### 4. §. Az állandók meghatározása

Az elektromos és mágneses térerősséget — állandó szorzóktól eltekintve — meghatároztuk. A konstansok kiszámíthatók a csatlakozási feltételekből.

Mivel a  $H_\vartheta$  folytonosan megy át a gömb felszínén, azaz  $H_{1\vartheta}|_{r=a} = H_{2\vartheta}|_{r=a}$ , továbbá, mivel a  $\mathbf{B}$  indukció-vektor normális komponense szintén folytonosan megy át a gömb felszínén, vagyis  $\mu_0 H_{1r}|_{r=a} = \mu_1 H_{2r}|_{r=a}$ , a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} -H_0 \sin \vartheta + \frac{C_2 \sin \vartheta}{j\omega\mu_0 a^3} &= \frac{C_1 \sin \vartheta}{j\omega\mu_1 a^{3/2}} \{J_{3/2}(\beta a) - \beta a J_{1/2}(\beta a)\}, \\ \mu_0 H_0 \cos \vartheta + \frac{2C_2 \mu_0 \sin \vartheta}{j\omega\mu_0 a^3} &= \frac{2C_1 \mu_1 \cos \vartheta}{j\omega\mu_1 a^{3/2}} J_{3/2}(\beta a). \end{aligned}$$

Bevezetve a  $J_{3/2}(\beta a) = A$  és  $J_{1/2}(\beta a) = B$  jelölést, továbbá a két egyenletet összeadva és rendezve, a

$$3\mu_0 H_0 = \frac{2C_1}{j\omega a^{3/2} \mu_1} \{A(\mu_1 - \mu_0) + a\mu_0 \beta B\}$$

egyenlet adódik. Innen

$$C_1 = \frac{3\mu_0 \mu_1 H_0 j\omega a^{3/2}}{2\{A(\mu_1 - \mu_0) + a\beta\mu_0 B\}}.$$

Hasonló módon

$$C_2 = \frac{3\mu_0 \mu_1 H_0 j\omega a^3}{2\{A(\mu_1 - \mu_0) + a\beta\mu_0 B\}} A - \frac{\mu_0 H_0 j\omega a^3}{2}.$$



Kontrollképpen nézzük meg, teljesül-e az a feltétel, hogy az elektromos térerősség szintén folytonosan megy át a gömb felületén, azaz  $(E_{1\varphi})_{r=a} - (E_{2\varphi})_{r=a} = 0$ , tehát

$$\frac{AC_1}{\sqrt{a}} - \frac{C_2}{a^2} - \frac{j\omega\mu_0 a H_0}{2} = 0.$$

$C_1$  és  $C_2$  fenti értékeit behelyettesítve valóban azt kapjuk, hogy

$$\frac{3\mu_0\mu_1 H_0 j\omega a^{3/2} A}{\sqrt{a} 2\{A(\mu_1 - \mu_0) + \mu_0 a \beta B\}} - \frac{3\mu_0\mu_1 H_0 j\omega a^3 A}{2a^2\{A(\mu_1 - \mu_0) + \mu_0 a \beta B\}} + \\ + \frac{\mu_0 H_0 j\omega a^3}{2a^2} - \frac{\mu_0 H_0 j\omega a}{2} = 0.$$

A  $C_1$  konstans visszahelyettesítve (12)-be és (14)-be, végeredményképp a gömbön belül az alábbi térerősségek adódnak:

$$E_{2\varphi}(r, \vartheta) = \\ = \frac{3\mu_0\mu_1 j\omega H_0 a^{3/2} r^{-1/2}}{2\left\{J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a\right)(\mu_1 - \mu_0) + \frac{a\mu_0\sqrt{-2j}}{\delta} J_{1/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a\right)\right\}} J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) P_1^1(\cos \vartheta),$$

$$H_{2\vartheta}(r, \vartheta) = \\ = \frac{3\mu_0 H_0 a^{3/2} r^{-3/2}}{2\left\{J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a\right)(\mu_1 - \mu_0) + \frac{a\mu_0\sqrt{-2j}}{\delta} J_{1/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a\right)\right\}} \times \\ \times \left\{J_{3/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) - \frac{r\sqrt{-2j}}{\delta} J_{1/2}\left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r\right) P_1^1(\cos \vartheta)\right\}.$$

## 5. §. Az örvényáramveszteség meghatározása

A Joule-veszteséget a Poynting—Umov vektor segítségével határozzuk meg:

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_F (\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}) d\mathbf{f} \right\}$$

ahol az integrálást a gömb felszínére kell kiterjeszteni (tetszőleges  $z$  komplex szám esetén  $\bar{z}$  a  $z$  konjugáltja). Tekintve, hogy  $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , az energiaáramlás vektora, a gömb felszínére merőleges, a mágneses térerősségnek csak  $\vartheta$ -irányú komponensét kell figyelembe venni. Így tehát

$$W = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_F E_{2\varphi} \bar{H}_{2\vartheta} d\mathbf{f} \right\} = -\frac{1}{2} \int_F \operatorname{Re} [(E_{2\varphi} \bar{H}_{2\vartheta})_{r=a}] d\mathbf{f}.$$



Bevezetve az  $A_1 \sin \vartheta = (E_{2\varphi})_{r=a}$  és az  $A_2 \sin \vartheta = (H_{2\vartheta})_{r=a}$  jelölést, adódik, hogy

$$W = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{ A_1 \bar{A}_2 \} a^2 \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ = a^2 \pi \operatorname{Re} \{ A_1 \bar{A}_2 \} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta ,$$

illetve

$$W = -\frac{4}{3} \pi a^2 \operatorname{Re} \{ A_1 \bar{A}_2 \} .$$

Így maga az örvényáramvesztesség:

$$\frac{3 \mu_0^2 \mu_1 j \omega \pi H_0^2 a^3 J_{3/2} \left( \frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} \right)}{\left| J_{3/2} \left( \frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} \right) (\mu_1 - \mu_0) + \frac{a \mu_1 \sqrt{-2j}}{\delta} J_{1/2} \left( \frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} \right) \right|^2} \left\{ J_{1/2} \left( \frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} \right) - \frac{a \sqrt{-2j}}{\delta} J_{3/2} \left( \frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} \right) \right\}$$

Számítsuk ki most

$$- \operatorname{Re} \{ j J_{3/2}(\beta a) [\overline{J_{3/2}(\beta a)} - \beta a \overline{J_{1/2}(\beta a)}] \}$$

értékét. Bevezetve a  $b = a/\delta$  jelölést és figyelembe véve, hogy  $\sqrt{-j} = (1-j)/\sqrt{2}$ , a fenti kifejezésre

$$(17) \quad - \operatorname{Re} \{ j J_{3/2}(b(1-j)) [\overline{J_{3/2}(b(1-j))} - b(1-j) \overline{J_{1/2}(b(1-j))}] \}$$

adódik. A  $(2n+1)/2$  alakú indexszel bíró Bessel-függvényeket egyébként elemi függvények segítségével is ki lehet fejezni (lásd: [4], 100. oldal):

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x , \quad J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{\sin x - x \cos x}{x} ,$$

amit (17)-be helyettesítünk:

$$(17^*) \quad - \operatorname{Re} \left\{ j \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{\sin x - x \cos x}{x} \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}} (\sin x - x \cos x - x^2 \sin x) \right] \right\} .$$

Legyen

$$(18) \quad \begin{aligned} \sin b &= s , & \operatorname{sh} b &= \alpha . \\ \cos b &= c , & \operatorname{ch} b &= \beta . \end{aligned}$$

Figyelembe vesszük még, hogy

$$\begin{aligned} \sin b(1-j) &= \sin b \operatorname{ch} b - j \cos b \operatorname{sh} b = s\beta - j\alpha \\ \cos b(1-j) &= \cos b \operatorname{ch} b + j \sin b \operatorname{sh} b = c\beta + j\alpha . \end{aligned}$$



Így

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}} (\sin x - x \cos x - x^2 \sin x) = \\
 (19) \quad & = \sqrt{\frac{2}{\pi b^3} \frac{s\beta - jca - b(1-j)(c\beta + jsa) - b^2(1-j)^2(s\beta - jca)}{(1-j)^{3/2}}} \\
 & = \sqrt{\frac{2}{\pi b^3} \frac{(s\beta + 2b^2ca - bsa - bc\beta) + j(2b^2s\beta - ca + bc\beta bsa)}{(1-j)^{3/2}(1+j)^{3/2}}} \cdot (1+j)^{3/2}.
 \end{aligned}$$

Viszont

$$(19^*) \quad (1+j)^{3/2} = \sqrt[4]{8} \left( \cos \frac{3\pi}{8} + j \sin \frac{3\pi}{8} \right) \equiv \sqrt[4]{8} (u + jv),$$

vagyis (19) baloldala a következővel egyenlő:

$$(20) \quad \sqrt{\frac{2\sqrt{8}}{\pi b^3} \frac{(s\beta + 2b^2ca - bc\beta - bsa) + j(2b^2s\beta - ca + bc\beta - bsa)}{2\sqrt{2}}} (u + jv).$$

Legyen

$$\begin{aligned}
 s\beta + 2b^2ca - bc\beta - bsa &= C \\
 2b^2s\beta - ca + bc\beta - bsa &= D.
 \end{aligned}$$

A számításokat elvégezve azt kapjuk, hogy

$$(21) \quad \overline{J_{3/2}(x)} - x J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\pi b^3}} (C - jD)(u - jv).$$

Számítsuk ki most a  $jJ_{3/2}(x)$  kifejezést:

$$\begin{aligned}
 (22) \quad jJ_{3/2}(x) &= j \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\pi b^3}} \frac{\sin x - x \cos x}{(1-j)^{3/2}} = \\
 &= j(u + jv) \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\pi b^3}} \{ (s\beta - bc\beta - bsa) + j(bc\beta - ca - bsa) \}.
 \end{aligned}$$

Legyen

$$\begin{aligned}
 s\beta - bc\beta - bsa &= E \\
 bc\beta - ca - bsa &= F.
 \end{aligned}$$

Ekkor (22) a következő alakot veszi fel:

$$j \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\pi b^3}} (u + jv)(E + jF).$$



E kifejezést (17)-be helyettesítve, (21) figyelembevételével

$$(23) \quad -\operatorname{Re} \left\{ j \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\pi b^3}} (u + jv) (E + jF) \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\pi b^3}} (u - jv) (C - jD) \right\} = \\ = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2\pi b^3} (E + jF) (D + jC) \right\} = -\frac{1}{\pi b^3 \sqrt{2}} (ED - FC)$$

adódik. Végül tekintettel a (18) és (22\*) összefüggésekre, (23)-ra a következőt kapjuk:

$$(24) \quad \frac{1}{b\pi\sqrt{2}} \{b(\operatorname{sh} 2b + \sin 2b) - \operatorname{ch} 2b + \cos 2b\}.$$

Hátra van még a

$$(25) \quad \left| J_{3/2} \left( \frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right) (\mu_1 - \mu_0) + \frac{a\mu_0 \sqrt{-2j}}{\delta} J_{1/2} \left( \frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right) \right|^2$$

kifejezés kiszámítása. Ugyanazokat a jelöléseket használva, mint (18)-ban és (19\*)-ban, egyszerű számítások után (25) így alakul:

$$(26) \quad \frac{1}{b^3\pi\sqrt{2}} \{(\mu_1 - \mu_0)^2 [(s^2\beta^2 + c^2\alpha^2) + 2b^2(s^2\alpha + c^2\beta^2) - 2b(\alpha\beta + sc)] + \\ + 4\mu_0^2 b^4(c^2\alpha^2 + s^2\beta^2) - 4\mu_0(\mu_1 - \mu_0)b^2(s\beta + c\alpha)\}$$

A (24) és (26) kifejezéseket (16)-ba helyettesítve:

$$(27) \quad \frac{3\mu_1\mu_0^2\omega\pi a^3 H_0^2 \left\{ \frac{a^2}{\delta^2} \left[ \operatorname{sh} \frac{2a}{\delta} + \sin \frac{2a}{\delta} \right] + \frac{a^2}{\delta^2} \left[ \operatorname{ch} \frac{2a}{\delta} - \cos \frac{2a}{\delta} \right] \right\}}{(\mu_1 - \mu_0)^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[ \operatorname{ch} \frac{2a}{\delta} - \cos \frac{2a}{\delta} \right] + \frac{a^2}{\delta^2} \left[ \cos \frac{2a}{\delta} + \operatorname{ch} \frac{2a}{\delta} \right] - \frac{a}{\delta} \left[ \sin \frac{2a}{\delta} + \operatorname{sh} \frac{2a}{\delta} \right] \right\} + \frac{2\mu_0^2 a^4}{\delta^4} \left[ \operatorname{ch} \frac{2a}{\delta} - \cos \frac{2a}{\delta} \right] + \frac{2\mu_0(\mu_1 - \mu_0)a^2}{\delta^2} \left[ \sin \frac{2a}{\delta} + \operatorname{sh} \frac{2a}{\delta} \right]}$$

adódik (lásd a cikk végén a 3. ábrát).

$\mu_1 = \mu_0$  esetén, vagyis például, ha vas helyett alumíniumból van a gömb, a (27) képlet leegyszerűsödik:

$$(28) \quad W = \frac{3\mu_0\omega a \delta \pi H_0^2 \left\{ a \left( \operatorname{sh} \frac{2a}{\delta} + \sin \frac{2a}{\delta} \right) - \delta \left( \operatorname{ch} \frac{2a}{\delta} - \cos \frac{2a}{\delta} \right) \right\}}{2 \left( \operatorname{ch} \frac{2a}{\delta} - \cos \frac{2a}{\delta} \right)}.$$

## 6. §. A kis- és nagyfrekvenciás határeset

A kisfrekvenciás határesetben  $a/\delta \ll 1$ . A veszteség képletében szereplő függvények végtelen sorainak magasabb hatványú tagjai elhanyagolhatók, ily módon a veszteségre vonatkozó képleteket a következőképp nyerjük:



$$W = \frac{3}{2} \mu_0 \omega a \delta^2 \pi H_0^2 \left\{ \frac{\frac{a}{\delta} \left( \operatorname{sh} \frac{2a}{\delta} + \sin \frac{2a}{\delta} \right)}{\operatorname{ch} \frac{2a}{\delta} - \cos \frac{2a}{\delta}} - 1 \right\} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2^4}{2 \cdot 6!} \frac{\mu_0 a^5 \delta^2 \pi H_0^2}{\delta^4}.$$

Tehát

$$W = \frac{1}{15} a^5 \gamma \omega^2 \pi \mu_0^2 H_0^2.$$

Ezen képlet egyezik az irodalomban található képlettel. (Lásd: [2], 173. oldal; [3], 35. oldal.)

Nagyfrekvenciás határesetben ( $a/\delta \gg 1$ ) a probléma a gömb külsejére vonatkozó Neumann-probléma megoldására redukálódik. Ez a feladat — melyet már megoldottak (lásd: [5], 330. oldal) — fellép a matematikai fizika más problémáinál is.

Röviden ismertetjük a megoldást a mi elektromos problémánk esetén.

Elektromos tér csak a gömbön kívül van. A gömbön felületi áram lép fel, melynek abszolút értéke megegyezik a gömb felületén fellépő mágneses térerősség tangenciális komponensével. A gömbön belül a tér zérus. A feladat tehát a gömb külsejére vonatkozó Neumann-probléma:

$$[\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \text{ innen } \mathbf{H} = \operatorname{grad} \Phi \text{ és } \Delta \Phi = 0.]$$

Ezen egyenlet a következő határfeltételek mellett oldandó meg:

$$1^\circ \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_{r=a} = 0$$

$$2^\circ \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{H} = \mathbf{H}_0.$$

A következő potenciálfüggvény az összes feltételeket kielégíti  $A$  és  $B$  megfelelő választása esetén:

$$(29) \quad \Phi = (Ar + Br^{-2}) \cos \vartheta.$$

Amint már láttuk, (29) kielégíti a gömbkoordinátákban felírt Laplace-egyenletet:

A határfeltételek szerint:

$$[H_r]_{r=a} = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_{r=a} = (A - 2Ba^{-3}) \cos \vartheta.$$

Innen

$$B = \frac{Aa^3}{2},$$

$$H_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{r} (Ar + Br^{-2}) \sin \vartheta,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H_r = A \cos \vartheta = H_0 \cos \vartheta,$$



tehát

$$A = H_0 .$$

Végül :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H_\vartheta = A \sin \vartheta = -H_0 \sin \vartheta .$$

A felületi áram :

$$|\mathbf{i}_f| = [|\mathbf{H}_\vartheta|]_{r=a} = \frac{3}{2} H_0 \sin \vartheta .$$

Végül a veszteség :

$$(30) \quad W = \frac{1}{2 \gamma \delta^2} \int_V |\mathbf{i}_f|^2 dV = \frac{a^2}{2 \gamma \delta} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{i}_f|^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^2 \mu_0 \omega H_0^2 \delta .$$

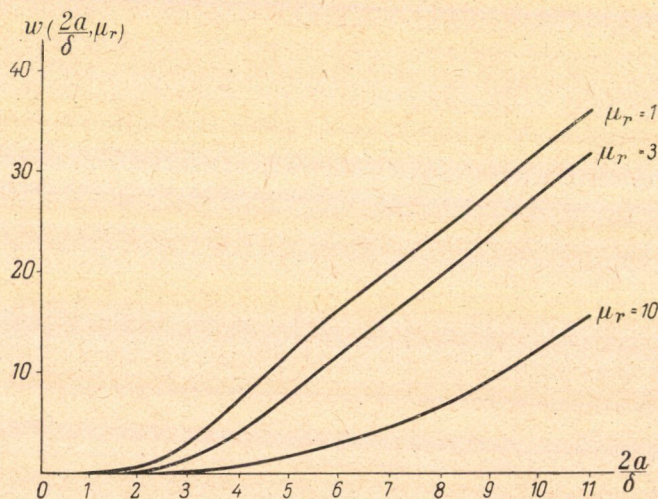
A (30) képletet az eredeti (28) veszteségből is megkaphatjuk, ha érvényesítjük az  $a/\delta \gg 1$  feltételt. Ekkor a képletben szereplő hiperbolikus függvények exponenciális függvényekkel helyettesíthetők, ezek mellett a trigonometrikus függvények elhanyagolhatók. Ily módon a

$$W = \frac{3 \mu_0 \omega a \delta H_0^2 \left( a e^{\frac{2a}{\delta}} - \delta e^{\frac{2a}{\delta}} \right)}{2 e} = \frac{3 \mu \omega a (a - \delta) \pi H_0^2}{2} \approx \frac{3 \mu \omega a^2 \pi H_0^2}{2}$$

eredményre jutunk.

Ezzel a külső homogén mágneses térbe helyezett tömör fémgömbben fellépő örvényáramveszteség problémáját teljesen megoldottuk.

Végül köszönetet mondok PÁL SÁNDORNAK és FÉNYES TAMÁSNAK a cikk kidolgozásában nyújtott értékes támogatásukért.



2. ábra

(Beérkezett : 1956. VII. 31.)



## IRODALOM

- [1] FREUD G.: „Körkeresztmetszetű vezetőkben fellépő áramkiszorításról.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 467—478.
- [2] H. HENNIGER: „Massenkernwerkstoffe für die Hochfrequenztechnik.” *Nachrichtentechnik* 6 (1956) 171—179.
- [3] F. SAMMER: *Schwingungskreise mit Eisenkernspulen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.
- [4] SIMONYI K.: *Elméleti villamosságtan*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
- [5] N. J. KOTSCHIN—I. A. KIBEL—N. W. ROSE: *Theoretische Hydromechanik*. Akademie Verlag, Berlin, 1954.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОТЕРИ ТОКОВ FOUCAULT  
В ПЛОТНОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ШАРЕ

G. KARDOS

Резюме

В настоящей работе автор решает следующую проблему:

Однородный металлический шар с постоянной пермеабилитивностью расположен в синусоидально изменяющемся во времени, однородном магнитном пространстве; какова будет потеря Joule, т.е. потеря токов Foucault индуцированного внешним магнитным полем тока в этом шаре?

Принимая во внимание тот факт, что индуцированные в шаре токи оказывают влияние на первоначальное магнитное поле и изменяют его, автор, исходя из уравнений Maxwell, вычисляет электромагнитное поле в шаре и вне его. Автор, не вычисляя силу индуцированного в шаре тока, с помощью свойств вектора Poynting—Умова, используя тангенциальные компоненты электрического и магнитного поля на поверхности шара, определяет потерю индуцированных токов Foucault.

В заключение, автор отдельно исследует граничный случай тока малой и высокой частоты.

DE LA PERTE DE COURANT D'INDUCTION DANS UNE SPHÈRE  
CONDUCTRICE

G. KARDOS

Résumé

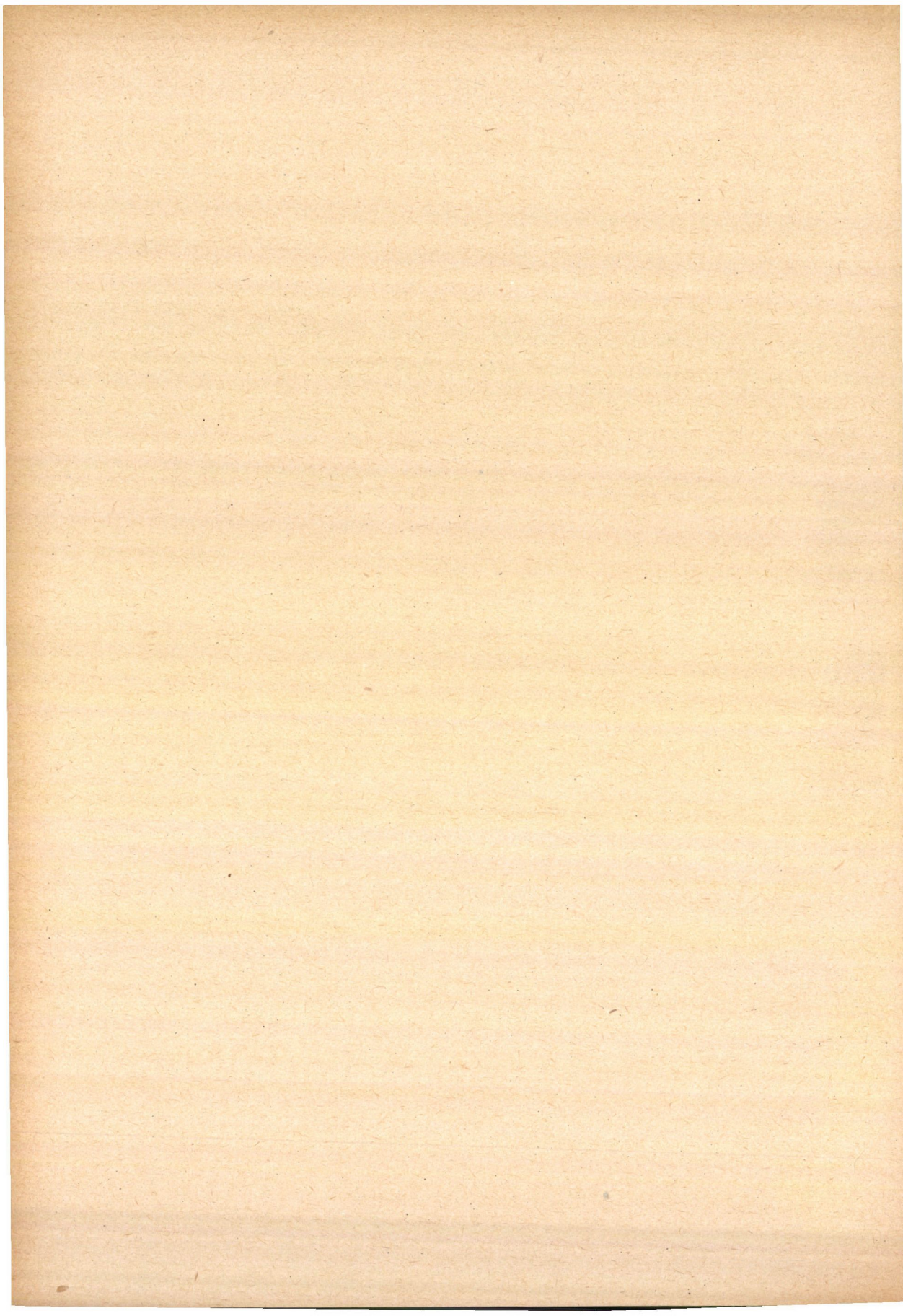
Dans ce travail, l'auteur calcule l'effet Joule produit par les courants d'induction dans une sphère de métal homogène et de perméabilité constante placée dans un champ magnétique homogène et fonction sinusoidale du temps.

Ce problème, déjà résolu dans le cas de deux dimensions par G. FREUD [1], est traité ici sous trois dimensions. Jusqu'ici, ce problème n'a été résolu qu'approximativement, cf. [1], [2], [3]. En effet, il n'était pas tenu compte du fait que les courants induits dans le conducteur influent de leur côté sur le champ magnétique primitif et le déforment.

L'auteur donne ici la solution exacte du problème. A partir des équations différentielles de Maxwell, il calcule respectivement les champs électrique et magnétique à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère conductrice, puis se basant sur ces résultats, il détermine l'effet Joule dans cette sphère. Enfin, il examine les cas limites de basse et de haute fréquence.

Cette question prend de l'importance au point de vue électrotechnique au cas où de petits corps conducteurs sphériques sont soumis à de fortes inductions.







# LINEÁRIS INTEGRÁLEGYENLETEK SAJÁTÉRTÉK NÉLKÜLI MAGJAIRÓL

FENYŐ ISTVÁN

A lineáris integrálegyenletek elméletében régóta ismeretes az a tétel, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a  $D[-\infty < x \leq b, y \leq b < \infty]$  négyzetben értelmezett  $K(x, y)$  magnak ne legyen sajátértéke, az, hogy

$$A_n = \int_a^b K_n(x, x) dx = 0, \quad n = 3, 4, \dots$$

legyen, ahol  $K_n(x, y)$  a  $K$  mag  $n$ -edik iterálja. J. CAUCKY [1] azt is bebizonyította, hogy az előbbi feltétel  $n = 2$ -től érvényes. Ezek a bizonyítások, bár nem nehezek, mégis elég mély tételeket használnak fel a transzcendens egészfüggvények nem-számairól.

A következőkben e tételnek igen egyszerű, mélyebb segédeszközöket nem igénylő bizonyítását adjuk.

1°. Elfajult magok esetén a tétel szinte triviális: ezek  $D(\lambda)$  Fredholm-féle determinánsa  $\lambda$  racionális egész függvénye. Ha tehát a mag sajátérték nélküli, akkor a  $D(\lambda) = 0$  egyenletnek nincs megoldása. Mivel  $D(0) = 1$ , ezért ez csakis úgy lehetséges, ha  $D(\lambda) \equiv 1$ . Másrészt viszont

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = 0 = \int_a^b R(x, x, \lambda) dx = A_1 + A_2 \lambda + A_3 \lambda^2 + \dots,$$

ami csakis úgy lehet, ha  $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = 0$ . Azt kaptuk tehát, hogy elfajult magoknál az előbbi feltétel  $n = 1$ -től érvényes.

2°. Fredholm-típusú<sup>1)</sup> magok esetén a tétel bizonyítása a következőképpen történhet. Minden Fredholm-típusú  $K(x, y)$  mag négyzetesen approxi-

<sup>1)</sup> Ezen — mint általában — olyan magot értünk, melyre

$$\lim_{x' \rightarrow x} \int_a^b |K(x', y) - K(x, y)|^2 dy = \lim_{y' \rightarrow y} \int_a^b |K(x, y') - K(x, y)|^2 dx = 0.$$



málható  $M(x, y)$  elfajult maggal úgy, hogy

$$\int_a^b |K(x, y) - M(x, y)|^2 dy < \varepsilon \quad (a \leq x \leq b)$$

legyen, tetszőlegesen kicsiny  $\varepsilon > 0$  esetén. A  $K$  mag rezolvense legyen  $\kappa(x, y; \lambda)$ , az őt approximáló  $M$  magé pedig  $\mu(x, y; \lambda)$ . Legyen továbbá

$$|\varphi(x, y; \lambda)| = |(\mu - M) - (\kappa - K)| < \delta(\varepsilon) \quad a \leq x, y \leq b$$

bármely  $\lambda$  értékre, melyekre  $\kappa$  és  $\mu$  léteznek. Azt állítjuk, hogy  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ , ha  $\varepsilon \rightarrow 0$ . A rezolvens mag függvényegyenlete alapján ugyanis

$$\begin{aligned} \kappa(x, y; \lambda) - K(x, y) - \lambda \int_a^b K(x, t) \{ \kappa(t, y; \lambda) - M(t, y) \} dt = \\ = \lambda \int_a^b K(x, t) K(t, y) dt = \lambda K_2(x, y), \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\mu(x, y; \lambda) - M(x, y) - \lambda \int_a^b M(x, t) \{ \mu(t, y; \lambda) - M(t, y) \} dt = \lambda M_2(x, y).$$

Vonjuk ki ezt a két egyenletet egymásból:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y; \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t, y; \lambda) dt = \\ = -\lambda(K_2 - M_2) + \lambda \int_a^b \{ K(x, t) - M(x, t) \} \{ \mu(t, y; \lambda) - M(t, y; \lambda) \} dt. \end{aligned}$$

A Bunyakovszkij—Schwarz-féle egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} |K_2 - M_2|^2 &\leq \int_a^b |K(x, t) - M(x, t)| |K(t, y) - M(t, y)| dt \leq \\ &\leq c_1 \int_a^b |K(x, t) - M(x, t)|^2 dt < c_1 \varepsilon, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \{ K(x, t) - M(x, t) \} \{ \mu(t, y; \lambda) - M(t, y) \} dt \right| \leq \\ \leq c_2 \int_a^b |K(x, t) - M(x, t)|^2 dt \leq c_2 \varepsilon. \end{aligned}$$



Vagyis

$$\left| \varphi(x, y; \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t, y; \lambda) dt \right| \leq \lambda(c_1 + c_2) \varepsilon .$$

De a feltevés szerint  $\lambda$  a  $K$ -nak reguláris értéke, ezért közismert tétel alapján  $|\varphi(x, y; \lambda)| < \delta$ .

Ezek előrebocsátása után approximáljuk a  $K$  magot sajátérték nélküli elfajult  $M$  maggal. Az előbb bebizonyított állítás szerint a

$$\int_a^b \{\mu(x, x; \lambda) - M(x, x)\} dx - \int_a^b \{\kappa(x, x; \lambda) - K(x, x)\} dx$$

transzcendens egész függvény az 1<sup>o</sup> alatt igazolt állítás figyelembevételével a

$$z(\lambda) = A_2 \lambda + A_3 \lambda^3 + \dots$$

függvénnyel azonos. Ámde  $|z(\lambda)| < \varepsilon$  akármilyen adott  $\varepsilon > 0$  mellett, ami persze csakis úgy lehet, ha  $A_2 = A_3 = A_4 = \dots = 0$ . *Q. e. d.*

3<sup>o</sup>. Ha a  $K$  mag folytonos és sajátérték nélküli, akkor  $A_1$  is 0. Folytonos mag tudniillik egyenletesen approximálható  $M$  sajátérték nélküli elfajult magokkal, de akkor egy ismert approximációs tétel szerint (lásd: [2])  $|\mu - \kappa|$  is tetszőleges kicsivé tehető. 2<sup>o</sup> alapján

$$\int_a^b \kappa(x, x; \lambda) dx = A_1 ,$$

1<sup>o</sup> alapján pedig

$$\int_a^b \mu(x, x; \lambda) dx = 0 .$$

Ezért tehát  $|A_1|$  bármely  $\varepsilon > 0$  számnál kisebb, vagyis  $A_1 = 0$ . Nem folytonos magoknál ez természetesen nem állhat fenn, például:

$$K(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{ha } 0 \leq x < y \leq 1. \end{cases}$$

Ez a mag sajátérték nélküli, és mégis

$$\int_0^1 K(x, x) dx = \int_0^1 dx = 1 .$$

Sőt nem folytonos magoknál  $A_1$  értéke a sajátértékek számára és nagyságára semmilyen befolyással nem lehet, mert az  $y = x$  pontok halmaza a  $D$  négyzet nullmértékű részhalmaza, ezen pedig a  $K$  mag értékeinek önkényes megváltoztatása a  $K$  mag integrálegyenlet-elméleti viselkedésén semmit sem változtat. Annál érdekesebb az, hogy ha a mag folytonos és sajátérték nélküli, akkor első nyoma is eltűnik.



4°. A sajátérték nélküli magok második nyomának eltűnéséről szóló tétel HOSTINSKY [3] egy tételének felhasználásával különösen egyszerűen bizonyítható, ha feltesszük, hogy az

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = 0$$

homogén elsőfajú integrálegyenletnek van az

$$\int_a^b \varphi^2(x) dx = 1$$

feltételnek eleget tevő megoldása. Ez esetben tekintsük az

$$L(x, y) = K(x, y) + \varphi(x) \varphi(y)$$

magot, melynek csakis egy sajátértéke van, tudniillik 1; HOSTINSKY említett tétele szerint tehát

$$\begin{aligned} \int_a^b L_2(x, x) dx &= \int_a^b \int_a^b \{K(x, t) + \varphi(x) \varphi(t)\} \{K(t, x) + \varphi(t) \varphi(x)\} dx dt = \\ &= \int_a^b K_2(x, x) dx + 1 = 1, \end{aligned}$$

tehát

$$\int_a^b K_2(x, x) dx = 0.$$

*Q. e. d.*

(Beérkezett : 1956. VII. 31. — Átdolgozva : 1956. VIII. 14.)

#### IRODALOM

- [1] J. CAUCKY : *Contribution a la théorie de l'équation de Fredholm*. «Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk» (No. 6) Brno, 1926.
- [2] L. V. KANTOROVICS—V. I. KRÜLOV : *A felsőbb analízis közelítő módszerei*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953. (p. 160., (16))
- [3] B. HOSTINSKY : *Sur l'équation de Fredholm*. «Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk» (No. 1.) Brno, 1921.



О ЯДРАХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,  
НЕ ИМЕЮЩИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

I. FENYŐ

## Резюме

Работа дает новое, совершенно элементарное и простое доказательство следующей теоремы: для того, чтобы определенное в некотором квадрате ядро типа Fredholm  $K(x, y)$  линейного интегрального уравнения не имело собственных значений, необходимо и достаточно выполнения условия  $A_n = 0$ ,  $n \geq n_0$ , где числа  $A_n$  означают следы ядра  $K$ . И, наоборот, если  $K$  не имеет собственных значений, то  $A_n = 0$  при  $n \geq 2$ . Если  $K$  непрерывно, то  $A_n = 0$  при  $n \geq 1$ . Непосредственным следствием этой теоремы является фундаментальная теорема о существовании собственных чисел у симметричных ядер. Ибо, если  $K$  симметрично, то

$$A_2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x, y) dx dy > 0$$

(если  $K$  не равно тождественно нулю), и значит, в силу предыдущего,  $K$  имеет собственное число.

ÜBER DIE KERNE LINEARER INTEGRALGLEICHUNGEN WELCHE  
KEINE EIGENWERTE BESITZEN

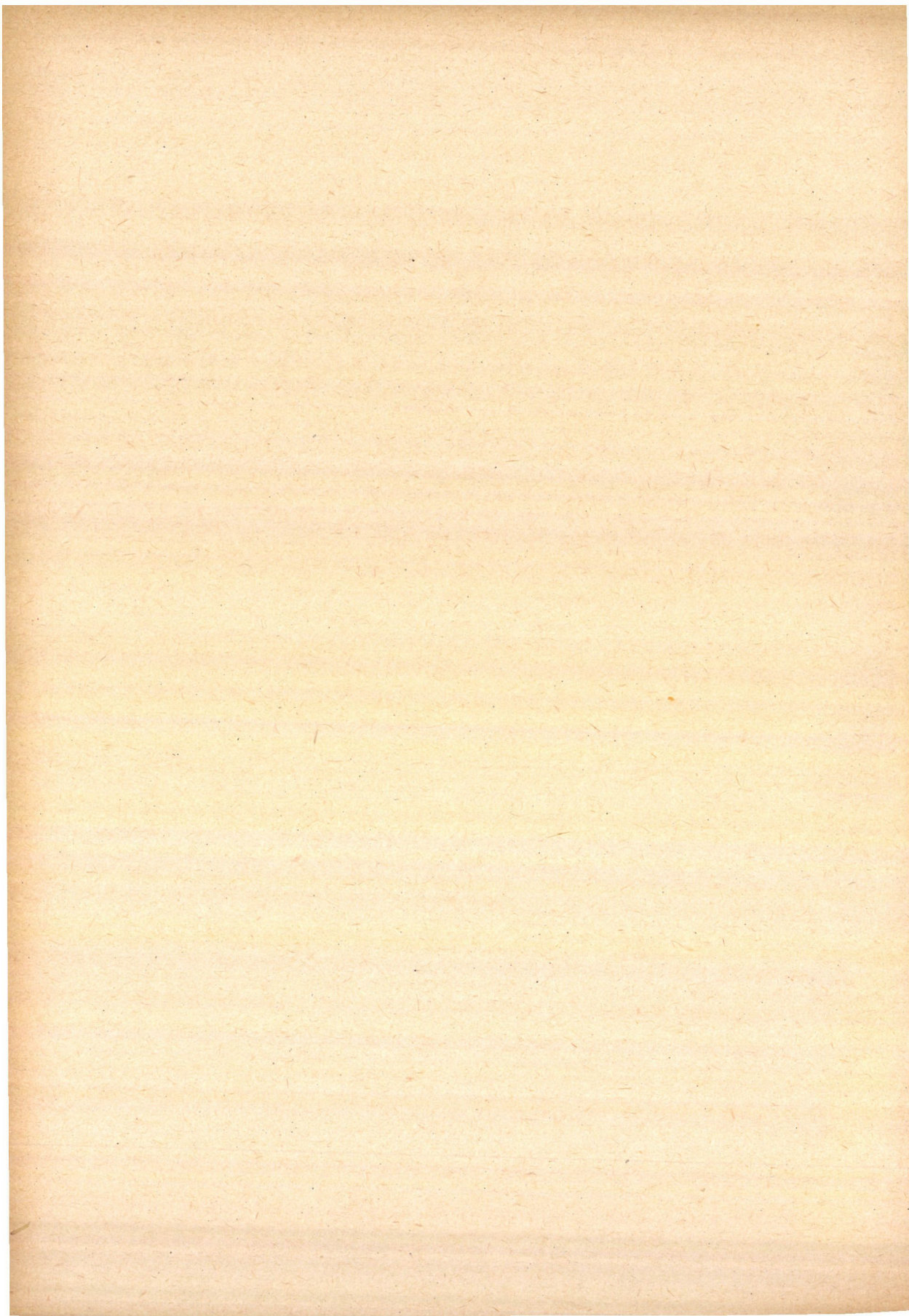
I. FENYŐ

## Zusammenfassung

Es wird ein neuer, elementarer und kurzer Beweis des Satzes mitgeteilt, wonach die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein, in einem endlichen Quadrat definierter Kern eigenwertfrei sei, ist das Verschwinden aller Spuren  $A_n$ ,  $n \geq n_0$ . Ist der Kern eigenwertfrei, so ist  $A_n = 0$ ,  $n \geq 2$ . Falls der Kern stetig ist, verschwindet auch die erste Spur.

Eine unmittelbare Folge des bewiesenen Satzes ist die klassische Behauptung, wonach jeder symmetrischer Kern mindestens einen Eigenwert besitzt.







## A HŐVEZETÉS DIFFERENCIÁLEGYENLETÉNEK MAXIMUM-ELVÉRŐL, II.

ADLER GYÖRGY

Jelen dolgozat folytatása az [1] alatti cikknek. Ezen cikkben Tyihonov tételének egy élesítését adtuk meg, mely szerint egy hővezető test hőszigetelt peremén a kezdeti időpont kivételével nem léphet fel hőmérsékleti maximum, illetve minimum.

A következőkben ezen élesítésnél többet mondó tételt bizonyítunk be (1. tétel), nevezetesen azt, hogy a hőmérsékleti minimum (illetve maximum) helyén és pillanatában a hőmérsékleti függvénynek bármely a belső normálissal hegyesszöget bezáró irányban vett deriváltja határozottan pozitív (illetve negatív). A Tyihonov-tétel fentebb kimondott élesítése ezen 1. tétel következménye.

Ezután bebizonyítunk egy maximum-tételt a hőmérsékleti függvény gradiensére vonatkozóan (2. tétel). Végül pedig megadjuk a Tyihonov-tételnek bizonyos összetett hővezető rendszerre vonatkozó kiterjesztését (3. tétel).

FREUD GÉZA [2] dolgozatában bebizonyította a Tyihonov-tétel fenti kiterjesztését az egydimenziós esetben, egyszerűbb hővezető rendszerre vonatkozóan. Az 1. tétel felhasználásával lényeges egyszerűsítést sikerült elérni FREUD GÉZA bizonyításának gondolatmenetében.

Tyihonov tétele a következő (lásd: [5]):

A  $V(P, t)$  függvény<sup>1)</sup> tegyen eleget az  $n$ -dimenziós tér  $R$  korlátos tartományában a hővezetés

$$(1) \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} = a^2(P) \frac{\partial V}{\partial t} \quad a^2(P) \neq 0$$

differentiálegyenletének  $0 < t \leq T$  esetén, és az  $R$  tartomány  $S$  peremén is legyen folytonos a zárt  $0 \leq t \leq T$  intervallumban. Ekkor  $V(P, t)$  maximumát, illetve minimumát az  $S$  peremen, vagy pedig a  $t = 0$  kezdeti időpillanatban felveszi.

Fennáll a következő erősebb tétel is (lásd: L. NIRENBERG [4]):

A  $V(P, t)$  függvény tegyen eleget a hővezetés (1) differentiálegyenletének az  $R$  tartományban  $0 < t \leq T$  esetén. Ha  $V(P, t)$  az  $R$  tartománybeli maxi-

<sup>1)</sup>  $P$ -vel jelöljük az  $n$ -dimenziós tér egy tetszőleges pontját.



*mumát (illetve minimumát) az  $R$  belső  $P_0$  pontjában  $t = t_0 > 0$  esetén felveszi, akkor a  $t \leq t_0$  értékekre  $V(P, t) \equiv V(P_0, t_0)$ .*

A továbbiakban ez utóbbi tételt *erős Tyihonov-tétel* néven fogjuk idézni.

Legyen  $P_0$  az  $R$  tartomány határának olyan pontja, mely azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy  $R$  tartalmazza egy olyan  $\Gamma$  hipergömb belsejét, melynek  $P_0$  a határán van. Ekkor fennáll a következő

**1. tétel:** *A nem azonosan konstans  $V(P, t)$  függvény tegyen eleget az  $n$ -dimenziós tér egy korlátos  $R$  tartományában a hővezetés*

$$\Delta V = a^2(P) \frac{\partial V}{\partial t} \quad a^2(P) \neq 0$$

*differencegyenletének  $0 < t \leq T$  esetén, és vegye fel minimumát az  $S$  perem  $P_0$  pontjában  $t = t_0 > 0$  esetén. Ekkor*

$$\liminf \frac{V(P, t_0) - V(P_0, t_0)}{\overline{PP_0}} > 0,$$

*midőn  $P \rightarrow P_0$  egy  $P_0$ -ból kiinduló, a  $\Gamma$  gömb  $P_0$  pontbeli belső normálisával hegyesszöget bezáró  $l$  félsugar mentén.*

#### Bizonyítás:

A  $\Gamma$  hipergömb belsejében rajzolható egy olyan  $r_0$  sugarú,  $C_0$  centrumú hipergömb, melynek határa az  $R$  tartomány határával az egyetlen közös  $P_0$  pontot tartalmazza.

Az általánosság megszorítása nélkül legyen

$$\min V(P, t) = V(P_0, t_0) = 0.$$

Tekintsük a  $\overline{PC_0} = r_0$ ,  $\overline{PC_0} = r_0/2$  hipergömbökkel határolt tartományt.  $h$  legyen ebben a tartományban harmonikus függvény a következő peremfeltételekkel:

$$h(P) = 0 \quad \overline{PC_0} = r_0,$$

$$h(P) = 1 \quad \overline{PC_0} = r_0/2.$$

A  $V$  függvényre vonatkozó erős Tyihonov-tételből következik, hogy elég kicsiny  $\varepsilon > 0$  mellett az

$$u = V - \varepsilon h$$

függvény  $t = t_0$ -ra a fenti hipergömbökkel határolt tartományban és annak határán pozitív, az egyetlen  $P_0$  pont kivételével, ahol zérus. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} & \liminf \frac{u(P, t_0) - u(P_0, t_0)}{\overline{PP_0}} = \\ & = \liminf \frac{V(P, t_0) - V(P_0, t_0)}{\overline{PP_0}} - \varepsilon \liminf \frac{h(P, t_0) - h(P_0, t_0)}{\overline{PP_0}} \geq 0 \quad (P \in l). \end{aligned}$$



Minthogy itt

$$\liminf \frac{h(P, t_0) - h(P_0, t_0)}{PP_0} > 0 \quad (P \in l)$$

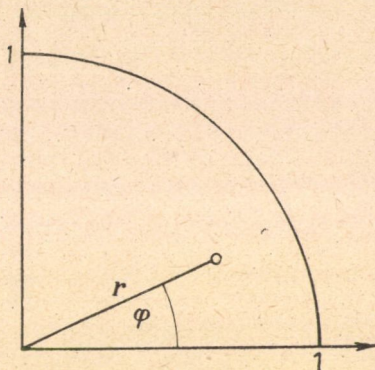
(lásd: E. HOPF [3]), következik az állítás.

Ezen tétel bizonyos értelemben már nem javítható. Ugyanis általában nem igaz a tétel olyan kerületi pontban, mely a tartománynak csúcsa. (Egy ilyen csúcsban természetesen nem beszélhetünk belső normálisról, és így a belső normálissal hegyesszöget bezáró irány helyébe a csúcsból a tartomány belseje felé mutató irány lép.) Pl. a  $h = r^2 \sin 2\varphi$  harmonikus függvény (mely egyben eleget tesz a hővezetés differenciálegyenletének is), a  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  tartományban minimumát a  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$  peremeken veszi fel, és az origóban

$$\frac{\partial h}{\partial l} = \frac{\partial h}{\partial r} = 0,$$

ahol  $l$  tetszőleges, az origóból a körcikk belsejébe mutató irány.

Másik példaként említjük a hővezetés időtől is függő



$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t} \quad a^2 = \text{konst.}$$

differenciálegyenletét kielégítő

$$V = \cos \frac{\pi}{2} x \cdot \cos \frac{\pi}{2} y \cdot e^{-\frac{\pi^2}{2a^2} t}$$

függvényt, mely a

$$-1 \leq x \leq +1$$

$$-1 \leq y \leq +1$$

tartományban minimumát a tartomány peremén veszi fel, és bármely csúcspontban tetszőleges belső irányban vett deriváltja zérus.

**Megjegyzés.** Ezen 1. tételből már következik az [1] dolgozat II. tétele is.<sup>2)</sup> Ugyanis az 1. tétel szerint a minimum helyén a  $\partial V / \partial n$  normális derivált pozitív, és így a perem azon részén, ahol a  $\partial V / \partial n = 0$  feltételt írtuk elő, minimum nem léphet fel.

<sup>2)</sup> Itt természetesen feltesszük, azt hogy az [1] dolgozat II. tételében szereplő  $R$  tartomány eleget tesz a fenti 1. tételben kirótt feltételnek, viszont nem szükséges, hogy ezen [1] dolgozat (3) differenciálegyenletében szereplő  $a^2$  együtttható konstans legyen.



**2. tétel:**  $A$   $V(P, t)$  függvény tegyen eleget az  $n$ -dimenziós tér  $R$  korlátos tartományában a hővezetés

$$(4) \quad \Delta V = a^2 \frac{\partial V}{\partial t} \quad (a^2 > 0, \text{ konst.})$$

differenciálegyenletének  $0 < t \leq T$  esetén, és  $\text{grad } V$  legyen folytonos az  $R$  tartomány  $S$  peremén is. Ekkor  $|\text{grad } V|$  maximumát az  $S$  peremen, vagy pedig a  $t = 0$  kezdeti időpillanatban felveszi.

**Bizonyítás:**

Legyen  $|\text{grad } V|$  legnagyobb értéke  $t = 0, P \in R + S$ , illetve  $0 < t \leq T, P \in S$  esetén  $M$ . Tegyük fel, hogy  $|\text{grad } V|$   $M$ -nél nagyobb maximumát  $= t_0 > 0$  esetén a  $P_0 \in R$  belső pontban veszi fel. Legyen ez a maximum

$$|\text{grad } V(P_0, t_0)| = M + \varepsilon.$$

Jelöljük  $\text{grad } V(P_0, t_0)$  irányát  $e$ -vel. Vegyünk fel egy új  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  derékszögű koordinátarendszert, melynek  $y_1$  tengelye az  $e$  iránnyal párhuzamos. Ez lineáris koordináta-transzformációt jelent, melynél a hővezetés (4) differenciálegyenlete a következőbe megy át:

$$(4^*) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial y_n^2} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Tehát a transzformált  $V$  függvény szintén eleget tesz a hővezetés differenciálegyenletének. Tekintettel arra, hogy tetszőleges  $l$  irány esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\left| \frac{\partial V(P, t)}{\partial l} \right| \leq |\text{grad } V(P, t)|,$$

és  $P = P_0, t = t_0$  esetén

$$\left| \frac{\partial V}{\partial y_1} \right| = |\text{grad } V|,$$

nyilvánvaló, hogy  $|\text{grad } V|$ -vel együtt  $|\partial V / \partial y_1|$  is a  $P_0$  pontban,  $t = t_0$  esetén veszi fel legnagyobb értékét. Minthogy azonban  $\partial V / \partial y_1$  is kielégíti a (4\*) egyenletet, és feltétel szerint az  $S$  peremen folytonos, alkalmazhatjuk rá a Tyihonov-tételt, mely szerint

$$\left| \frac{\partial V}{\partial y_1} \right| \leq M \quad (P \in S, \text{ illetve } t = 0)$$

folytán  $|\partial V / \partial y_1|$  az  $R$  tartomány belső  $P_0$  pontjában nem veheti fel az  $M + \varepsilon$  értéket. Ez ellentmondás, tehát az a feltevés, hogy  $|\text{grad } V|$  maximumát a tartomány belső pontjában  $t > 0$  esetén veszi fel, lehetetlenség. Q. e. d.

A  $V(P, t)$  függvény tegyen eleget a hővezetés (1) egyenletének az  $R$  korlátos tartományban  $0 < t \leq T$  esetén, és legyen folytonos a tartomány



$S$  peremén is  $0 \leq t \leq T$  esetén. Az  $R$  tartomány  $S$  határa álljon az  $S_1$ ,  $S_2$  és  $S_3$  részekből.  $S_2$  és  $S_3$  minden pontjában létezzék a normális, továbbá  $S_2$  és  $S_3$  bármely  $P_0$  pontja rendelkezze azzal a tulajdonsággal, hogy  $R$  tartalmazza egy olyan hipergömb belsejét, melynek  $P_0$  a határán van.  $V(P, t)$ -re a következő peremfeltételeket írjuk elő:

$$(5) \quad V(P, t) = V_0(t), \quad \text{ha } P \in S_1;$$

$$(6) \quad Z(P, t) - V(P, t) = -c \frac{\partial V(P, t)}{\partial n}, \quad \text{ha } P \in S_2 \quad (c > 0);$$

$$(7) \quad A \frac{dU}{dt} + B \int_{S_3} \{U(t) - V(P, t)\} df = Q(t) \quad (A, B > 0) \left. \vphantom{\int_{S_3}} \right\} \text{ha } P \in S_3$$

$$(8) \quad \frac{\partial V(P, t)}{\partial n} = -c_1 \{U(t) - V(P, t)\} \quad (c_1 > 0)$$

( $n$  a belső normális).

(5) jelentése nyilvánvaló. (6) azt fejezi ki, hogy az  $S_2$  perem mentén a hővezető test egy  $Z(P, t)$  hőmérsékletű testtel érintkezik, és a lineáris hőátadási törvény érvényes. (7) és (8) azt jelenti, hogy a test az  $S_3$  perem mentén egy  $U(t)$  hőmérsékletű hőtartállyal érintkezik, mellyel időegység alatt  $Q(t)$  hőmennyiséget közlünk. (A hőtartály hőmérséklete helytől független.)

**3. tétel.** Ha minden  $0 \leq t \leq T$  időpontban  $V_0(t) \geq 0$ ,  $Q(t) \geq 0$ , és  $Z(P, t) \geq 0$ , továbbá  $U(0) \geq 0$ ,  $V(P, 0) \geq 0$ , akkor minden  $P \in R$ ,  $0 \leq t \leq T$  értékre:

$$V(P, t) \geq 0.$$

### Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy  $V(P_0, t_0) = c < 0$ . Ekkor a Tyihonov-tételből következik, hogy egy  $0 < t_1 \leq t_0$  értékre és  $P \in S$  pontra  $V(P, t_1) = c$ . Kell, hogy legyen egy olyan legkisebb  $t_2$ ,  $0 < t_2 \leq t_1$ , melyre létezik olyan  $P^* \in S$ , hogy

$$(9) \quad V(P^*, t_2) = c$$

továbbá

$$V(P, t) > c,$$

ha  $0 \leq t < t_2$ . Kimutatjuk, hogy ez lehetetlenség.

1°. (5)-ből következik, hogy  $P^* \in S_1$  nem lehet.

2°. Tegyük fel, hogy  $P^* \in S_2$ .  $t_2$  definíciójából és az 1. tételből következik, hogy

$$(10) \quad \frac{\partial V(P^*, t_2)}{\partial n} > 0.$$



(6)-ot felírjuk  $P = P^*$ ,  $t = t_2$  esetére :

$$Z(P^*, t_2) - V(P^*, t_2) = -c \frac{\partial V(P^*, t_2)}{\partial n},$$

és így (9)-ből és (10)-ből következik, hogy

$$Z(P^*, t_2) < c,$$

ami a feltételekkel ellenkezik.

3°. Tegyük fel, hogy  $P^* \in S_3$ . Ekkor (8)-ból a 2°. alatti megfontolásokkal adódik, hogy

$$(11) \quad U(t_2) < c.$$

Minthogy  $U(0) \geq 0$ , (11)-ből következik egy olyan  $0 < t_3 < t_2$  létezése, melyre

$$(12) \quad U(t_3) = c, \quad U'(t_3) \leq 0.$$

(7)-et felírjuk  $t = t_3$ -ra :

$$A \frac{dU(t_3)}{dt} + B \int_{S_3} \{U(t_3) - V(P, t_3)\} df = Q(t_3).$$

(12)-ből és  $Q(t_3) \geq 0$ -ból következik, hogy  $V(P, t_3) < c$  bizonyos értékekre, ami ellentmond  $t_2$  és  $t_3$  választásának. Q. e. d.

(Beérkezett : 1956. VII. 24.)

#### IRODALOM

- [1] ADLER GY.—FREUD G.: „A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elvéről, I.” *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 157—165.
- [2] FREUD G.: „Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel, I.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1955) 369—394.
- [3] E. HOPF : „A remark in linear elliptic differential equations of second order.” *Proceedings of the American Mathematical Society* **5** (1952) 791—793.
- [4] L. NIRENBERG : „A strong maximum principle for parabolic equations.” *Communications on Pure and Applied Mathematics* **6** (1953) 167—177.
- [5] A. H. ТИХОНОВ—А. А. САМАРСКИЙ : *Уравнения математической физики*. Гостехиздат, Москва, 1951. (pp. 184—187.)

#### О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, II.

GY. ADLER

#### Резюме

Настоящая работа является продолжением статьи где дано одно обострение теоремы Тихонова. Теорема I. настоящей работы содержит утверждение, более сильное чем это обострение, а именно следующее :



Пусть  $P_0$  есть точка границы области  $R$ , обладающая тем свойством, что  $R$  содержит внутренность такого гипершара  $\Gamma$ , на границе которого находится точка  $P_0$ . Тогда имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть не тождественно постоянная функция  $V(P, t)$  в некоторой ограниченной области  $R$   $n$ -мерного пространства при  $0 < t \leq T$  удовлетворяет уравнению теплопроводности (1) и принимает свой максимум в точке  $P_0$  границы  $S$  при  $t = t_0 > 0$ . Тогда

$$\liminf \frac{V(P, t_0) - V(P_0, t_0)}{PP_0} > 0,$$

если  $P \rightarrow P_0$  вдоль любого, исходящего из  $P_0$  направления  $l$ , которое образует угол  $< \pi/2$  с внутренней нормалью шара  $\Gamma$  в точке  $P_0$ .

После этого доказывается одна теорема о максимуме градиента функции температуры.

**Теорема 2.** Пусть функция  $V(P, t)$  удовлетворяет в ограниченной области  $R$   $n$ -мерного пространства при  $0 < t \leq T$  дифференциальному уравнению (4) а  $\text{grad} V$  непрерывен и на границе  $S$  области  $R$ . Тогда  $\text{grad} V$  принимает свой максимум на границе или в начальный момент времени  $t = t_0$ .

Наконец, в **Теореме 3** дается распространение теоремы Тихонова на некоторую теплопроводную систему, являющуюся обобщением теоремы из работы [2] Г. ФРЕУД, доказанной для одномерного случая и более простой теплопроводной системы. В принципе доказательства, используя теорему 1., удалось добиться значительного упрощения в доказательстве Г. ФРЕУД.

## SUR LE PRINCIPE DU MAXIMUM DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR, II.

GY. ADLER

### Résumé

L'article est la suite du travail [1], dans lequel nous avons généralisé le théorème de Tyhonoff.

Le Théorème 1 de l'article présent contient une affirmation qui dit encore davantage que [1], notamment la suivante :

Soit  $P_0$  un point de la frontière du domaine qui a la propriété de contenir l'intérieur d'une hypersphère  $L$ , laquelle possède  $P_0$  sur sa frontière. Dans ce cas on peut formuler le théorème suivant :

**Théorème 1.** La fonction  $V(P, t)$  non identiquement constante satisfait à l'équation (1) de la chaleur dans le domaine borné  $R$  de l'espace à  $n$ -dimensions pour  $0 < t \leq T$ , et prend son minimum au point  $P_0$  de la frontière  $S$  pour  $t = t_0 > 0$ . Alors

$$\liminf \frac{V(P, t_0) - V(P_0, t_0)}{PP} > 0$$

quand  $P \rightarrow P_0$  sur une demi-droite de point de départ  $P_0$ , qui forme un angle aigu avec le normal intérieur de la sphère  $\Gamma$  au point  $P_0$ .

Ensuit nous démontrons un théorème du maximum pour le gradient de la fonction de calorique :

**Théorème 2.** La fonction  $V(P, t)$  satisfait à l'équation de la chaleur (4) dans le domaine borné  $R$  de l'espace à  $n$ -dimensions pour  $0 < t \leq T$ . Supposons  $\text{grad} V$  continu sur la frontière du domaine aussi. Dans ce cas  $|\text{grad} V|$  prend son maximum ou bien sur la frontière  $S$ , ou bien au moment initial  $t = 0$ .

Enfin dans le **Théorème 3** nous donnons une extension du théorème de Tyhonoff se rapportante à un certain système composé de conducteurs de chaleur, laquelle est une généralisation du théorème de G. FREUD figurant dans le travail [2] énoncé dans le cas d'une seule dimension pour un système plus simple. En ce qui concerne le principe de la démonstration, nous sommes arrivés à simplifier les raisonnements de la démonstration de G. FREUD par le Théorème 1.







## A HŐVEZETÉS DIFFERENCIÁLEGYENLETÉNEK MAXIMUM-ELVÉRŐL, III.

FREUD GÉZA

Az alábbiakban néhány kiegészítést szeretnénk fűzni előző eredményeinkhez ([1], [2]). Dolgozatunk három paragrafusból áll, ezek mindegyike egy-egy külön egységet alkot. Az 1. §-ban új bizonyítást adunk a maximum-elvre; ez az új bizonyítás bizonyos esetekben a maximum-elvnek az előző két dolgozatban tárgyalt kiterjesztésére is felhasználható. A 2. §-ban az első dolgozat I. tételének (amely a kétdimenziós esetre vonatkozik) élesítését adjuk: az idézett helyen feltételezzük, hogy  $V(x, y, t)$  az  $S^*$ -on kétszer differenciálható, míg itt megmutatjuk, hogy egyszeri folytonos differenciálhatóság elégséges. A 3. §-ban a maximum-elvnek két, fizikailag várható következményét bizonyítjuk.

### 1. §. Új bizonyítás a maximum-elvre

Az  $(x, y, z)$  tér  $R$  tartományában, melynek pereme,  $\bar{R} - R = S$ , véges sok Ljapunov-felület egyesítése, a  $t_0 < t \leq t_1$  intervallumban  $V(x, y, z, t)$  tegyen eleget a hővezetés differenciálegyenletének:

$$(1) \quad \Delta V = a^2 \frac{\partial V}{\partial t},$$

ahol  $0 < a = \text{konst.}$

A  $V(x, y, z, t)$  függvény legyen az  $\bar{R} \times [t_0, t_1]$  halmazon folytonos,  $x, y, z$  függvényében folytonosan differenciálható, és az  $R \times (t_0, t_1]$  halmazon a helykoordináták függvényében kétszer, az idő szerint egyszer folytonosan differenciálható.

**1. tétel:**  $V(x, y, z, t)$  egyetlen  $(x_2, y_2, z_2, t_2) \in R \times (t_0, t_1]$  értékrendszerre sem vehet fel nagyobb értéket, mint az  $\{S \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_0\}\}$  halmazon felvett maximum.

Ez tehát nem más, mint Tyihonov ismert tétele, de arról az eddig ismertektől lényegesen eltérő bizonyítást adunk.

#### Bizonyítás:

Legyen

$$\max_{\{S \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_0\}\}} V(x, y, z, t) = m,$$



és feltételezzük (tételünk állításával ellentétben), hogy

$$V(x_2, y_2, z_2, t_2) = M > m, \quad \text{bár} \quad (x_2, y_2, z_2) \in R, \quad t_2 > t_0,$$

Legyen  $m < \mu < M$ ,  $G$  legyen azon  $(x, y, z, t) \in R \times (t_0, t_2]$  négydimenziós pontok halmaza, melyekre  $V(x, y, z, t) > \mu$ , és  $G(\tau)$  (ahol  $t_0 < \tau \leq t_2$ ) a  $G$ -nek az a részhalmaza, melynek pontjaira  $t = \tau$ . Ismeretes, hogy  $V(x, y, z, t)$  az  $R \times (t_0, t_1]$  halmazon a helykoordináták analitikus és az időnek akárhányszor differenciálható függvénye, tehát  $G(\tau)$  pereme,  $H(\tau)$ , minden  $t_0 < \tau \leq t_2$  értékre véges sok pont tetszőleges kis környezetének kizárásával Ljapunov-felületté tehető (lásd: [1] dolgozat 2. segédtetele). Így, mint első közleményünkben részleteztük, a  $V$  függvényre érvényes a Green-képlet, azaz figyelemmel (1)-re:

$$\iiint_{G(\tau)} \frac{\partial V}{\partial t} dx dy dz = a^2 \iint_{H(\tau)} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} df,$$

tehát

$$(2) \quad \iiint_G \frac{\partial V}{\partial t} dx dy dz dt = a^2 \int_{t_0}^{t_2} d\tau \iint_{H(\tau)} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} df.$$

Végezzük el most a (2) baloldalán kijelölt integrálást úgy, hogy először  $t$  szerint integrálunk rögzített  $(x, y, z)$ -re, és azután integrálunk a helykoordináták szerint. Vegyük figyelembe, hogy a  $t$  szerinti integrálás alsó határán  $G$  definíciója következtében  $V = \mu$ , és az integrálás felső határa  $(x, y, z)$ -től függetlenül  $t = t_2$ , kivéve olyan szakaszokat, ahol az alsó és felső határon is  $V = \mu$ , amelyek járuléka ennek következtében zérus. Így

$$(3) \quad \iiint_G \frac{\partial V}{\partial t} dx dy dz dt = \iiint_{G(t_2)} \{V(x, y, z, t_2) - \mu\} dx dy dz.$$

Mivel  $G$ -ben  $V > \mu$ , továbbá  $V$  folytonos, és  $V(x_2, y_2, z_2, t_2) > \mu$ , tehát (3) jobboldalán határozottan pozitív szám áll. Másrészt  $H(\tau)$ -n  $V = \mu$ , és  $G(\tau)$ -ban  $V > \mu$ , tehát (mivel  $\partial V / \partial \mathbf{n}$  a külső normális menti differenciálást jelent)  $H(\tau)$ -n mindenütt  $\partial V / \partial \mathbf{n} \leq 0$ , és így (2) jobboldala nem lehet pozitív. Mivel (2) és (3) baloldala azonos, feltevésünk ellentmondásra vezetett, és ezzel tételünket bebizonyítottuk. Megmutatjuk, hogy ugyanezt az elvet a maximum-elv kiterjesztésére is fel lehet használni.

**2. tétel.** Legyen az  $S$  perem  $S^*$  nyílt résztartománya olyan, hogy létezzék  $\text{grad } V$  még az  $(R \cup S^*) \times (t_0, t_1]$  halmazon is, legyen ott folytonos, és az  $S^* \times (t_0, t_1]$  halmazon legyen  $\partial V / \partial \mathbf{n} \leq 0$ . Létezzék továbbá egy olyan  $R_1 \subset R$  tartomány, amely  $S^*$ -ot elválasztja  $(R - R_1)$ -től, és  $\partial V / \partial t$  az  $R_1 \times (t_0, t_1]$  halmazon korlátos. Akkor  $V(x, y, z, t)$  egyetlen  $(x_2, y_2, z_2, t_2) \in S^* \times (t_0, t_1]$  értékrendszerre sem vehet fel nagyobb értéket, mint az  $\{(S - S^*) \times (t_0, t_1]\} \cup \{R \times \{t_0\}\}$  halmazon felvett maximuma.



**Bizonyítás:**

Legyen most

$$\max_{\{(S-S^*) \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_0\}\}} V(x, y, z, t) = m,$$

és tegyük fel (tételünk állításával ellentétben), hogy egy  $(x_2, y_2, z_2) \in S^*$ ,  $t_2 > t_0$  értékrendszerénél  $V(x_2, y_2, z_2, t_2) = M > m$ , és legyen ismét  $m < \mu < M$  mellett  $G$  az a tartomány, amelyben  $t \leq t_2$ , és  $V > \mu$ ,  $G(\tau) = G \cap \{\tau\}$ .

A tett megszorítások következtében az

$$\iiint_{G(\tau)} \frac{\partial V}{\partial t} dx dy dz$$

integrál minden  $\tau \in (t_0, t_1]$  értékre létezik, és  $\tau$  szerint a Riemann-féle értelemben integrálható.

Vegyük fel egy  $G_1$  zárt tartományt úgy, hogy  $G \subset G_1 \subset R \times (t_0, t_1]$ , és válasszuk meg a  $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_2$  beosztást olyan sűrűre, hogy

$$(4) \quad \bigcup_{k=1}^n G(\tau_k) \times (\tau_{k-1}, \tau_k] \subset G_1$$

legyen, ami lehetséges, mert  $V$  a  $G_1$ -en folytonos.

Tekintsük most az

$$\begin{aligned} & \iiint_{G(\tau_n)} V(x, y, z, \tau_n) dx dy dz - \iiint_{G(\tau_0)} V(x, y, z, \tau_0) dx dy dz = \\ (5) \quad & = \sum_{k=1}^n \left\{ \iiint_{G(\tau_k)} V(x, y, z, \tau_k) dx dy dz - \iiint_{G(\tau_{k-1})} V(x, y, z, \tau_{k-1}) dx dy dz \right\} = \\ & = \sum_{k=1}^n \iiint_{G(\tau_k)} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} V_t(x, y, z, t) dx dy dz dt + \\ & + \sum_{k=1}^n \left\{ \iiint_{G(\tau_k) - G(\tau_{k-1})} V(x, y, z, \tau_{k-1}) dx dy dz - \iiint_{G(\tau_{k-1}) - G(\tau_k)} V(x, y, z, \tau_{k-1}) dx dy dz \right\} \end{aligned}$$

identitást. Ennek felírásánál felhasználtuk, hogy  $V_t$  az adott feltételek teljesülése esetén még  $G_1$ -ben is integrálható, és az integráció tartománya az első  $\Sigma$  tagjaiban (4) miatt  $G_1$ -be esik.

Mivel  $V_t$  feltevéseink következtében  $G_1$ -ben folytonos, (5) utolsó sorának első tagja — a beosztást elég sűrűre választva — tetszőlegesen kis rögzített  $\varepsilon$ -nál kevesebbel tér el az

$$\iiint_G V_t dx dy dz dt$$



integráltól. Tekintsük most (5) utolsó sorának második tagját. Mivel a  $G(\tau)$  tartomány pereme  $\tau$  függvényében folytonosan változik, minden rögzített  $(x, y, z) \in G(\tau_k) - G(\tau_{k-1})$  ponthoz található olyan  $\tau'_k \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$  érték, melyre  $V(x, y, z, \tau'_k) = \mu$ , és így

$$(6) \quad |V(x, y, z, \tau_{k-1}) - \mu| \leq K(\tau_k - \tau_{k-1}),$$

ahol  $K$  a  $V_t$  egy felső korlátja  $G_1$ -en (a tételben  $V_t$ -re eszközölt feltétel miatt ilyen felső korlát létezik).

Legyen most  $R_2$  egy olyan nyílt részhalmaza  $R_1$ -nek, amelynek mértéke az előírt  $\varepsilon$ -nál kisebb, és  $(R - \bar{R}_1)$ -t elválasztja  $S^*$ -tól. Akkor tekintettel (6)-ra, az  $\varepsilon K \Sigma(\tau_k - \tau_{k-1}) = \varepsilon K(t_2 - t_0)$  értéknél kisebb hibát követünk el, ha (5) utolsó sorában az utolsó két összeg minden egyes tagjában az  $R_1$ -re kiterjesztett integrálban az integrandus helyébe  $\mu$ -t írunk. Mivel  $(G_1 - R_1)$ -en a  $V$  függvény már egyenletesen folytonos, a  $\tau_k$  osztáspontokat megfelelően sűrítve, a  $\text{mes}\{[G(\tau_k) - G(\tau_{k-1})] + [G(\tau_{k-1}) - G(\tau_k)]\}$  területek tetszőlegesen kicsivé tehetők, és így — tekintettel (6)-ra — ugyancsak  $\varepsilon$ -nál kisebb hibát követünk el, ha ugyanezen  $\Sigma$  alatt szereplő minden egyes integrálban a teljes integrációs tartományon az integrandusok helyébe  $\mu$ -t helyettesítünk. Elvégezve az  $\varepsilon \rightarrow 0$  határátmenetet, így módon (5)-ből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \iiint_{G(\tau_n)} V(x, y, z, \tau_n) dx dy dz - \iiint_{G(\tau_0)} V(x, y, z, \tau_0) dx dy dz = \\ & = \iiint_G V_t dx dy dz dt + \{\text{mes } G(\tau_n) - \text{mes } G(\tau_0)\} \mu, \end{aligned}$$

illetve (2) felhasználásával, azt is figyelembe véve, hogy  $G(\tau_0) = G(t_0)$  üres:

$$\iiint_{G(t_2)} (V - \mu) dx dy dz = \int_{t_0}^{t_2} d\tau \int_{H(\tau)} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{f}.$$

Itt a baloldal pozitív, a jobboldal pedig nem lehet pozitív, mert  $S^*$ -on  $\partial V / \partial \mathbf{n} \leq 0$ ,  $H(\tau)$ -nak  $S^*$ -hoz nem tartozó részén pedig  $V = \mu$ , és így (ugyanúgy, mint az előbb)  $\partial V / \partial \mathbf{n} \leq 0$ . Ezzel kimutattuk, hogy a  $V(x_2, y_2, z_2, t_2) = M > \mu$  feltétel ellentmondásra vezet, amivel tételünket bebizonyítottuk.

## 2. §. A maximum-elv kiterjesztése kétdimenziós esetben

**3. tétel.** A  $V(x, y, z, t)$  függvény tegyen eleget az  $(x, y)$ -sík Jordan-görbével határolt  $R$  korlátos tartományában  $t \in (t_0, t_1]$  esetén a hővezetés

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t}$$

differenciálegyenletének, ahol  $a = \text{konst.} \neq 0$ , és legyen  $K$  az  $\bar{R} \times [t_0, t_1]$  halmazon folytonos. Legyen az  $R$  tartomány  $S$  peremének  $S^*$  része olyan össze-



függő nyílt rektifikálható Jordan-ív, hogy az  $S$ -et az egységkörre egyrétűen leképező analitikus függvény  $S^*$ -on folytonosan differenciálható.  $\text{grad } V$  legyen az  $(R \cup S^*) \times (t_0, t_1]$  halmazon folytonos, és  $S^*$ -on legyen  $\partial V / \partial \mathbf{n} = 0$ , továbbá egy  $R_1 \subset R$  tartományon, amely  $(R - \overline{R_1})$ -t elválasztja  $S^*$ -tól, legyen

$$\iint_{R_1} \left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| dx dy < \infty.$$

Akkor a  $V$  függvény egyetlen  $(x_2, y_2) \in S^*$  pontban és  $t_2 \in (t_0, t_1]$  időpontban sem vehet fel nagyobb értéket, mint amennyi az  $\{(S - S^*) \times (t_0, t_1]\} \cup \{R \times \{t_0\}\}$  halmazon felvett maximuma.

### Bizonyítás :

Tekintsük azt a  $w = \varphi(z)$  analitikus függvényt, amely a  $z = x + iy$  síkbeli  $R$  tartományt a  $w = u + iv$  sík  $F$  félkörébe viszi át, mégpedig oly módon, hogy az  $F$  félkör  $D$  átmérője az  $S^*$  peremrésznek felel meg, és  $D$  a  $v = 0$  valós tengely  $(-1, +1)$  szakasza legyen,  $\varphi(z)$  inverze legyen  $\Phi(w)$ . Akkor az  $u, v$  változók függvényében  $V(u, v, t) = V(x, y, t)$  a

$$(7) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = a^2 |\Phi'|^2 \frac{\partial V}{\partial t}$$

differenciálegyenletnek tesz eleget  $F$  belsejében,  $\overline{F}$ -on folytonos, végül  $D$ -n  $\partial V / \partial \mathbf{n} = 0$ .

Az

$$\frac{a^2}{4\pi(t' - t)} e^{-\frac{a^2 r^2}{4(t' - t)}}$$

hőpólusfüggvény transzformációjával nyert

$$W(u, v, t; u', v', t') = \frac{a^2}{4\pi(t' - t)} e^{-\frac{a^2 |\Phi(u+iv) - \Phi(u'+iv)|^2}{t' - t}}$$

függvény az  $u', v', t'$  változók függvényében kielégíti a (7) hővezetési egyenletet, és az  $u, v, t$  változók függvényében a

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = -a^2 |\Phi'|^2 \frac{\partial W}{\partial t},$$

egyenletet.

Az  $(x, y)$  koordinátákba való visszatranszformálással kapjuk, hogy minden  $G \subset F$  tartományban

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow t' - 0} \iint_G W(u, v, t) |\Phi'(u + iv)|^2 du dv = \begin{cases} 1, & \text{ha } (u', v') \in G \\ 0, & \text{ha } (u', v') \notin \bar{G}. \end{cases}$$



Ha a  $V(u, v, t)$  és  $W(u, v, t; u', v', t')$  függvényt a  $|w| < 1$  egységkör alsó felére  $v$ -ben, illetve  $v$ -ben és  $v'$ -ben páros függvényként folytatjuk, akkor a  $V(u, v, t)$  függvény a helykoordináták függvényében az egész  $|w| < 1$ , illetve  $|w'| < 1$  körben folytonosan differenciálható,<sup>1)</sup> és annak minden  $D$ -től különböző pontjában kielégíti a (7) differenciálegyenletet. A Green-képlet szerint, ha az integrációs tartomány a  $\varrho < 1$  sugarú  $K_\varrho$  körlemez, illetve  $C_\varrho$  körvonal<sup>2)</sup>:

$$\begin{aligned} & \iint_{K_\varrho} \left( W \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial W}{\partial t} \right) |\Phi'|^2 du dv = \\ & = \frac{1}{a^2} \iint_{K_\varrho} (W \Delta V - V \Delta W) du dv = \frac{1}{a^2} \oint_{C_\varrho} \left( V \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} - W \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \right) ds. \end{aligned}$$

A legelső kifejezésről leolvasható, hogy az a

$$\frac{d}{dt} \iint_{K_\varrho} W V |\Phi'|^2 du dv$$

kifejezéssel egyenlő, tehát  $t$  szerint integrálva:

$$\begin{aligned} & \iint_{K_\varrho} W(u, v, t; u', v', t') V(u, v, t) |\Phi'|^2 du dv = \\ & = \iint_{K_\varrho} W(u, v, t_0; u', v', t') V(u, v, t_0) |\Phi'|^2 du dv + \\ & + \frac{1}{a^2} \int_{t_0}^t \oint_{C_\varrho} \left( V \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} - W \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \right) ds dt \quad (t < t'), \end{aligned}$$

és így — tekintettel (8)-ra —  $t \rightarrow t'$  esetén kapjuk, hogy

<sup>1)</sup> Itt felhasználjuk azt a feltételt, hogy  $S^*$ -on a leképező függvény folytonosan differenciálható.

<sup>2)</sup> Itt felhasználjuk, hogy

$$\Delta V = a^2 \frac{\partial V}{\partial t}$$

abszolút integrálható, és  $du dv = |\varphi'| dx dy < M dx dy$ .



$$\begin{aligned}
 V(u', v', t') = \\
 (9) \quad &= \iint_{K_0} W(u, v, t_0; u', v', t') V(u, v, t_0) |\Phi'|^2 du dv + \\
 &+ \frac{1}{a^2} \int_{t_0}^t \iint_{C_0} \left( V \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} - W \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \right) ds dt.
 \end{aligned}$$

Itt a jobboldalon álló kifejezés minden  $t_0 < t' \leq t_1$  értékre értelmezve van, és mivel  $W$  eleget tesz az egész  $K_0$  körlemezén és minden  $t'$ -re az  $u', v', t'$  függvényében a (7) hővezetési egyenletnek, tehát (9)-ből leolvasható, hogy  $V(u, v, t)$  az egész  $K_0$  kör belsejében (és számunkra az a lényeges, hogy ennek következtében a  $D$  átmérőn is) eleget tesz a (7) hővezetési egyenletnek. Így Tyihonov tételét alkalmazva,  $V$ -nek a  $D$  átmérő  $(-\varrho, +\varrho)$  szakaszán felvett maximuma a  $t_2$  időpillanatban nem lehet nagyobb, mint a  $\{C \times (t_0, t_2)\} \cup \{K_0 \times \{t_0\}\}$  halmazon felvett maximuma. Tekintettel arra, hogy a  $V$  a  $v$ -nek páros függvénye, a maximum meghatározásával a  $K_0 \cap \{v : v > 0\}$  félkörre szorítkozhatunk. A  $\varrho \rightarrow 1$  határátmenetet elvégezve arra az eredményre jutottunk,  $V(u, v, t)$  a  $D$  átmérőn valamely  $t_2 > t_0$  időpillanatban nem vehet fel nagyobb értéket, mint amennyi a  $|w| = 1, v \geq 0$  félkörön  $t_0 \leq t \leq t_2$  mellett felvett maximum, valamint a  $t = t_0$ -ra a  $|w| < 1, v \geq 0$  félkörben felvett maximum közül a nagyobbik. A  $V(u, v, t)$  függvényt az  $x + iy = \Phi(u + iv)$  leképzéssel az  $(x, y)$ -síkra visszatranszformálva, ezzel tételünk állítását kapjuk.

### 3. §. A hővezetés differenciálegyenlete megoldásfüggvényének két tulajdonsága

Az alábbiakban két tételt bizonyítunk be, amelyek a maximum-elv egyszerű következményei:

**4. tétel.** Az  $u(x, t)$  függvény tegyen eleget  $x \in (\alpha, \beta), t \in (t_0, t_1]$  mellett a hővezetés

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t},$$

differenciálegyenletének, legyen a tartomány peremén is folytonos, és  $u(x, t)$  legyen  $x$  függvényében monoton nem-csökkenő,  $u(\alpha, t)$  a  $t$  függvényében monoton nem-növekvő, és  $u(\beta, t)$  a  $t$  függvényében monoton nem-csökkenő; akkor minden rögzített  $t \in (t_0, t_1]$  értékre is  $u(x, t)$  az  $x$  függvényében monoton nemcsökkenő.

#### Bizonyítás:

Az  $u(x, t)$  függvény a  $t_0 \leq t \leq T, \alpha \leq x \leq \beta$  tartomány háromágú peremén minimumát az  $(\alpha, T)$ , maximumát pedig a  $(\beta, T)$  pontban veszi fel, tehát a maximum-elv következtében

$$u(\alpha, T) \leq u(x, T) \leq u(\beta, T) \quad \alpha < x < \beta, \quad t_0 < T \leq T_1;$$



ennek következtében  $h$  tetszőleges értéke mellett a

$$v(x, t) = u(x + h, t) - u(x, t)$$

függvény, amely eleget tesz a hővezetés differenciálegyenletének, az  $\alpha \leq x \leq \beta - h$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  tartomány háromágú peremén nemnegatív, és így ezen tartományon belül is nemnegatív. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

**5. tétel.** *A  $V(x, y, z, t)$  függvény legyen az  $\bar{R} \times [t_0, t_1]$  halmazon a helykoordináták szerint kétszer, az idő szerint egyszer folytonosan differenciálható,  $t = t_0$ -ra legyen a helykoordináták függvényében szubharmonikus, továbbá  $R$  minden perempontján legyen a  $t$  idő függvényében monoton nem-csökkenő, akkor  $V$  a helykoordináták függvényében minden későbbi  $t \in (t_0, t_2]$  időpontban is szubharmonikus.*

### Bizonyítás:

$t = t_0$ -ra a szubharmonicitás következtében  $\Delta V \geq 0$ , tehát a hővezetési egyenletből  $\partial V / \partial t \geq 0$ . Ugyanez teljesül a tartomány peremén minden  $t \in [t_0, t_1]$  időpontra; mivel  $V$ -vel együtt  $\partial V / \partial t$  is eleget tesz az  $R \times (t_0, t_1]$  halmazon a hővezetési egyenletnek, tehát  $\partial V / \partial t$  ezen tartomány belsejében nemnegatív, és így a hővezetési egyenlet szerint  $\Delta V \geq 0$ . Q. e. d.

(Beérkezett: 1956. VII. 31.)

### IRODALOM

- [1] ADLER GY. — FREUD G.: „A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elvéről, I.” *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 157–165.
- [2] ADLER GY.: „A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elvéről, II.” *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 429–435 (az előző dolgozat).

### О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, III.

G. FREUD

#### Резюме

Пусть  $V(x, y, z, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) теплопроводности ( $0 < \alpha = \text{const.}$ ) если,  $t_0 < t \leq t_1$  и точка  $(x, y, z)$  находится в некоторой области  $R$  пространства  $(x, y, z)$ , граница  $\bar{R} - R = S$  которая есть соединение поверхностей типа Ляпунова конечного числа.

Пусть функция  $V(x, y, z, t)$  непрерывна и непрерывно дифференцируема по  $x, y, z$  в  $\bar{R} \times (t_0, t_1]$ . Далее, она непрерывно дифференцируема по координатам места и один раз непрерывно дифференцируема по времени в  $R \times (t_0, t_1]$ .

**Теорема 1:** Не существует такой система  $(x_2, y_2, z_2, t_2) \in R \times (t_0, t_1]$ , чтобы  $V(x_2, y_2, z_2, t_2)$  приняла бы значение, большее чем максимум на  $\{S \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_0\}\}$ . Это — известная теорема Тихонова; но наше доказательство отлично от известных.



**Теорема 2:** Пусть открытое подмножество  $S^*$  границы  $S$  таково, что  $\text{grad } V$  существует и непрерывно тоже на  $(R \cup S^*) \times (t_0, t_1]$ . Пусть  $\partial V / \partial n \leq 0$  на  $S^* \times (t_0, t_1]$ . Далее пусть существует область  $R_1 \subset R$ , которая отделяет  $S^*$  от  $R - R_1$ , и  $\partial V / \partial t$  ограничена в  $R_1 \times (t_0, t_1]$ . Тогда не существует такой системы  $(x_2, y_2, z_2, t_2) \in S^* \times (t_0, t_1]$ , для которой  $V(x, y, z, t)$  приняла бы значение, большее чем максимум на  $\{(S - S^*) \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_1\}\}$ .

Основа доказательств обеих теорем тождество

$$\iiint_{G(t_2)} (V - \mu) dx dy dz = \int_{t_0}^{t_1} d\tau \int_{H(\tau)} \frac{\partial V}{\partial n} df,$$

где

$$\mu = \text{const} > m = \max_{\{S \times (t_0, t_1]\} \cup \{R \times \{t_1\}\}} V(x, y, z, t),$$

$G(t_2)$  область, состоящая из точек  $V(x, y, z, t) > \mu$ , и  $H(\tau)$  поверхность, состоящая из точек  $V(x, y, z, \tau) = \mu$ .

**Теорема 3.** Пусть функция  $V(x, y, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) теплопроводности в области  $R$ -плоскости  $(x, y)$  ограниченной кривыми Жордана  $t \in (t_0, t_1]$ ,  $a = \text{const} \neq 0$  и  $V$  непрерывна на  $\bar{R} \times (t_0, t_1]$ . Пусть часть  $S^*$  границы  $S$  области  $R$  такая связная открытая дуга Жордана что аналитическая функция, отображающая  $S$  на единичный круг, однолистка, непрерывно дифференцируема на  $S^*$ . Пусть  $\text{grad } V$  непрерывен на  $(R \cup S^*) \times (t_0, t_1]$ ,  $\partial V / \partial n = 0$  на  $S^*$  и

$$\iint_{R_1} \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| dx dy < \infty$$

в области  $R_1 \subset R$ , отделяющей  $R - R_1$  от  $S^*$ . Тогда не существует такая точка  $(x_2, y_2) \in S^*$  и такой момент времени  $t_2 \in (t_0, t_1]$ , что величины функции  $V$  в этих точках были бы больше, чем ее максимум на  $\{(S - S^*) \times (t_0, t_1]\} \cup \{R \times \{t_0\}\}$ .

Теорема доказывается при помощи конформного отображения и формулы (9)

**Теорема 4.** Пусть функция  $u(x, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) теплопроводности для  $x \in (a, \beta)$ ,  $t \in (t_0, t_1]$ , непрерывна и на границе области и  $u(x, t_0)$ , как функция от  $x$ , монотонно неубывающая, а  $u(\beta, t)$  как функция  $t$ , монотонно возрастающая. Тогда эта функция, как функция от  $x$ , монотонно неубывающая также для всех фиксированных  $t \in (t_0, t_1]$ .

**Теорема 5.** Пусть функция  $V(x, y, z, t)$  два раза непрерывно дифференцируема по координатам места и один раз непрерывно дифференцируема по времени в  $\bar{R} \times (t_0, t_1]$ . Пусть далее, она, как функция координат, субгармонична для  $t = t_0$  (как функция времени  $t$ ) монотонно неубывающая во всех краевых точках от  $R$ . Тогда  $V$  как функция координат мест, будет субгармонична также для всех будущих точек времени  $t \in (t_0, t_1]$ .

## SUR LE PRINCIPE DU MAXIMUM DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR, III.

G. FREUD

### Résumé

Nous supposons que la fonction  $V(x, y, z, t)$  satisfait à l'équation (1) de la chaleur dans la région  $R$  de l'espace  $(x, y, z)$  limitée par le contour  $S = \bar{R} - R$  composé de surfaces de Lyapounoff en nombre fini et dans l'intervalle  $t_0 < t \leq t_1$ , où  $0 < a =$  = constante.



De plus, nous faisons sur  $V(x, y, z, t)$  les hypothèses suivantes :

- 1°.  $V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$  sont continues dans  $\bar{R} \times (t_0, t_1]$  ;
- 2°.  $\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$  sont continues dans  $\bar{R} \times (t_0, t_1]$ .

**Théorème 1.**  $V(x, y, z, t)$  ne peut prendre, pour aucun système des valeurs  $(x_2, y_2, z_2, t_2) \in \bar{R} \times (t_0, t_1]$ , une valeur plus grande que son maximum pris sur  $\{S \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_0\}\}$ .

Cela n'est autre chose que le théorème connu de Tyhonoff, mais nous en donnons une démonstration essentiellement différente de celles qui sont connues jusqu'ici.

**Théorème 2.** Soit  $S^*$  un domaine partiel, ouvert du contour  $S$  tel que  $\text{grad } V$  existe et soit continu même sur  $(R \cup S^*) \times (t_0, t_1]$  et que  $\partial V / \partial n \leq 0$  sur  $S^* \times (t_0, t_1]$ . Supposons ensuite qu'il existe une région  $R_1 \subset R$  qui sépare  $S^*$  de  $S$  et telle que  $\partial V / \partial t$  soit bornée dans  $R_1 \times (t_0, t_1]$ . Dans ce cas  $V(x, y, z, t)$  ne peut prendre, pour aucun système des valeurs  $(x_2, y_2, z_2, t) \in S^* \times (t_0, t_1]$  une valeur plus grande que son maximum pris sur  $\{(S - S^*) \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_1\}\}$ .

C'est l'identité

$$\iiint_{G(t_2)} (V - \mu) dx dy dz = \int_{t_0}^{t_2} d\tau \int_{H(\tau)} \frac{\partial V}{\partial n} df$$

qui est à la base de la démonstration de tous les deux théorèmes, où

$$\mu = \text{constante} > m = \max_{\{S \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_0\}\}} V(x, y, z, t),$$

$G(t_2)$  est la domaine des points où  $V(x, y, z, t) > \mu$  et  $H(\tau)$  est le domaine des points de la surface  $V(x, y, z, t) = \mu$ .

**Théorème 3.** Supposons que la fonction  $V(x, y, t)$  satisfait à l'équation (1) de la chaleur dans le domaine borné  $R$  limité par les courbes de Jordan du plan  $(x, y)$  et quand  $t \in (t_0, t_1]$  où  $a = \text{constante} \neq 0$ , et que  $V(x, y, t)$  est continue dans  $R \times (t_0, t_1]$ . Soit  $S^*$  une partie de la frontière  $S$  du domaine  $R$ ; nous supposons que  $S^*$  est un arc de Jordan ouvert, connexe tel que la fonction analytique, qui réalise la représentation conforme univalente de  $S$  sur le cercle unité, ait sur  $S^*$  une dérivée continue. Soit encore  $\text{grad } V$  continue sur  $(R \cup S^*) \times (t_0, t_1]$  et  $\partial V / \partial n$ . Désignons par  $R_1 \subset R$  un domaine qui sépare  $R - \bar{R}_1$  de  $S^*$  et soit

$$\iint_{R_1} \left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| dx dy < \infty.$$

Dans ce cas la fonction  $V$  ne peut prendre une valeur plus grande, dans aucun point  $(x_2, y_2) \in S^*$  et à aucun instant  $t_2 \in (t_0, t_1]$ , que son maximum pris sur  $\{(S - S^*) \times (t_0, t_1]\} \cup \{\bar{R} \times \{t_0\}\}$ .

La démonstration de ce théorème se fait à l'aide de la représentation conforme et de la formule (9).

**Théorème 4.** La fonction  $u(x, t)$  satisfait à l'équation (1) de la chaleur quand  $x \in (a, \beta)$  et  $t \in (t_0, t_1]$ ; soit  $u(x, t)$  continue même sur la frontière du domaine,  $u(x, t_0)$  fonction non décroissante en  $x$ ,  $u(a, t)$  fonction non croissante en  $t$  et  $u(\beta, t)$  fonction non décroissante en  $t$ . Dans ce cas pour chaque  $t \in (t_0, t_1]$  fixe  $u(x, t)$  est une fonction monotone non décroissante de  $x$ .

**Théorème 5.** La fonction  $V(x, y, z, t)$  possède dans  $\bar{R} \times [t_0, t_1]$  des dérivées continues jusqu'au second ordre en  $x, y, z$  et de premier ordre en  $t$ , elle est subharmonique en fonction de  $x, y, z$  pour  $t = t_0$  et sur chaque point de la frontière de  $R$  elle est une fonction non décroissante de  $t$ . Dans ce cas  $V$  est une fonction subharmonique de  $x, y, z$  à chaque instant ultérieur  $t \in (t_0, t_1]$ .



# KVÁZI-ZSUKOVSKIJ PROFILSOROK ÁRAMLÁSTANI VIZSGÁLATA

KÖVÁRI TAMÁS

## 1. §.

Profilsoron egy egyenes mentén ekvidisztáns módon elhelyezkedő kongruens és azonos állású profilok összességét értjük. (1. ábra.) Tekintsünk egy síkbeli áramlást, amely adott szögben esik be a profilsora. A profilsor megváltoztatja az áramlás irányát, mintegy „megtöri” azt. Visszahatásképpen az áramlás erőt fejt ki a profilsor egyes profiljaira. Tehát a következő kérdések merülnek fel:

1° Hogyan lehet matematikailag zárt alakban megadni az áramlási képet, vagy másképpen, síkbeli áramlásról lévén szó, hogyan lehet meghatározni az áramlás komplex potenciálját?

2° A komplex potenciál ismeretében hogyan lehet adott beesési szög-höz tartozó kilépési szöget kiszámítani?

3° Mekkora lesz az egyes profilokra ható „felhajtóerő”?

A jelen dolgozatban ezekre a kérdésekre válaszolunk.

## 2. §.

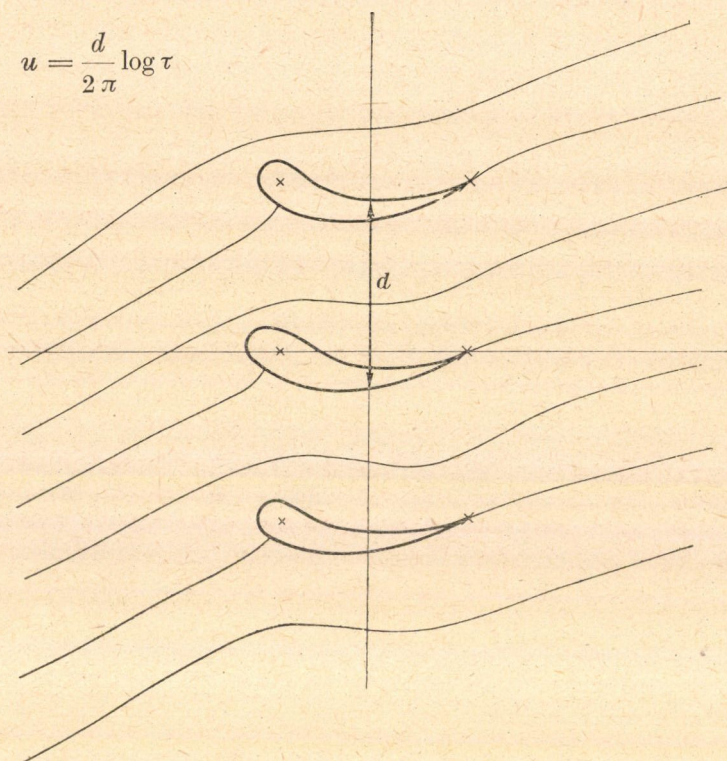
Helyezkedjék el a profilsor az „ $u$ ” komplex sík képzetes tengelye mentén, és legyen a szomszédos profilok egymástól való távolsága:  $d$ . Érkezzék az áramlás a  $\operatorname{Re}(u) < 0$  félsíkból  $\alpha$  szög, és távozzék a  $\operatorname{Re}(u) > 0$  félsíkba  $\beta$  szög alatt (1. ábra).

A

$$(1) \quad \tau = e^{\frac{2\pi}{d} u}$$

leképezés a profilsor valamennyi profilját egyetlen profilba viszi át. (A következőkben végig arra az esetre szorítkozunk, amikor ez a profil Zsukovszkij-profil.) Ilyen módon a profilsor vizsgálata visszavezethető egyetlen profil körüli áramlás vizsgálatára, igaz, hogy ez esetben viszont a  $\tau = 0$ ,  $\tau = \infty$





1. ábra

pontokban egy-egy örvényforrás lép fel. Ezen áramlás meghatározására a konform leképezés módszerét használjuk fel.

Induljunk ki a

$$w = (Q + i\Gamma_1) \log \frac{1}{\zeta - \varrho} + (Q - i\Gamma_1) \log \frac{1}{\zeta - \bar{\varrho}} - \\ - (Q + i\Gamma_2) \log \frac{1}{\zeta - i} - (Q - i\Gamma_2) \log \frac{1}{\zeta + i},$$

komplex potenciálból, amely a  $\zeta = \varrho$ ,  $\bar{\varrho}$ ,  $i$ ,  $-i$  pontokban elhelyezkedő

$$Q + i\Gamma_1, \quad Q - i\Gamma_1, \quad -Q - i\Gamma_2, \quad -Q + i\Gamma_2$$

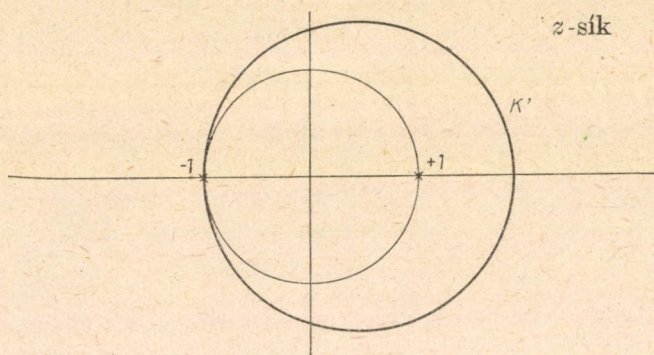
„intenzitású” örvényforrások által létrehozott áramlást írja le. Minthogy  $\Im m(\zeta) = 0$  esetén

$$\arg(\zeta - \varrho) + \arg(\zeta - \bar{\varrho}) = 0,$$

$$\log \left| \frac{\zeta - \bar{\varrho}}{\zeta - \varrho} \right| = 0,$$



ezért  $\mathcal{I}m(\zeta) = 0$  esetén:  $\mathcal{I}m(w) = 0$ . A valós tengely tehát áramvonal.



2. ábra

Alkalmazzuk a

$$z = \frac{\zeta + i}{\zeta - i},$$

lineáris leképezést. Ekkor  $\mathcal{I}m(\zeta) = 0$  a  $|z| = 1$  körbe, a  $\zeta = \varrho$  pont a

$$z = \sigma = \frac{\varrho + i}{\varrho - i},$$

pontba megy át ( $\mathcal{I}m(\varrho) > 0$  esetén  $|\sigma| > 1$ ). A komplex potenciál pedig (egy konstanstól eltekintve) a

$$(2) \quad w = (Q + i\Gamma_1) \log \frac{1}{z - \sigma} + (Q - i\Gamma_1) \log \frac{1}{z - \sigma^{-1}} + (Q - i\Gamma_2) \log \frac{1}{z}$$

komplex potenciálba megy át. Ennek a  $|z| > 1$  áramlási térben a  $z = \sigma$  és  $z = \infty$  pontokban örvényforrások vannak,  $|z| = 1$  az áramlás partvonal. A

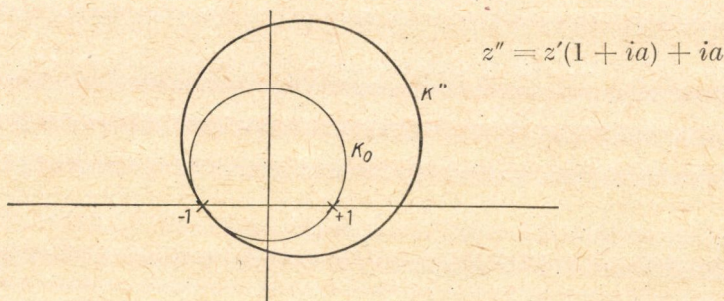
$$(3) \quad z' = \frac{z + \delta}{1 - \delta} \quad (0 \leq \delta < 1)$$

lineáris leképezés a  $|z| = 1$  kört egy nagyobb  $K'$  körbe viszi át, amely a  $|z'| = 1$  kört  $z' = -1$ -ben érinti. A

$$(4) \quad z'' = (1 + ia)z' + ia$$



lineáris leképezés a  $|z'| = 1$  kört egy, a  $z'' = \pm 1$  pontokon átmenő,  $ia$  középpontú  $K_0$  körbe viszi át, a  $K'$  kört pedig egy a  $K_0$ -t tartalmazó, és azt a  $z'' = -1$



3. ábra

pontban érintő  $K''$  körbe (3. ábra). A (3) és a (4) leképezésnek a  $z = -1$  pont fixpontja, a  $z = \sigma$  pont ezzel szemben a

$$z'' = \sigma'' = \frac{\sigma(1 + ia) + \delta + ia}{1 - \delta},$$

pontba megy át. Ha

$$(5) \quad \sigma = \sigma_1 - ia(1 + \sigma_1) \quad [\sigma_1 = \operatorname{Re}(\sigma), \quad |\sigma| > 1],$$

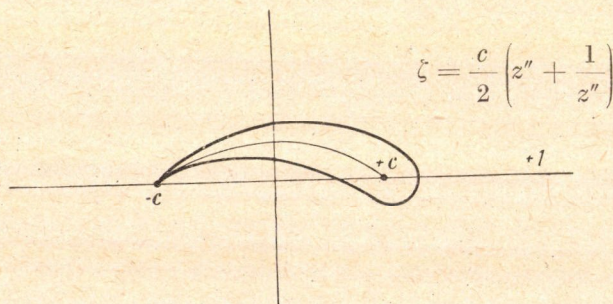
akkor

$$(6) \quad \sigma'' = \frac{\sigma_1 + a^2(1 + \sigma_1) + \delta}{1 - \delta} > \frac{1 + \delta}{1 - \delta}.$$

A

$$(7) \quad \zeta = \frac{c}{2} \left( z'' + \frac{1}{z''} \right)$$

leképezés a  $K_0$  kört egy, a  $-c$  és  $+c$  pontokat összekötő körívbe, a  $K''$  kört egy Z Zsukovszkij-profilba viszi át (4. ábra). A  $\sigma_1$ -et úgy választjuk meg,



4. ábra



hogy a  $z'' = \sigma''$  pont a  $\zeta = 1$  pontba menjen át, azaz :

$$(8) \quad 1 = \frac{c}{2} \left( \sigma'' + \frac{1}{\sigma''} \right),$$

$$(9) \quad \sigma'' = \frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{c}.$$

Ezek után csupán az van hátra, hogy a profilt az  $1/2$  pontra tükrözzük, amit a

$$(10) \quad \tau = 1 - \zeta$$

leképezéssel érünk el. A (3), (4), (7), (10) leképezések összetevéseként adódó

$$\tau = f(z)$$

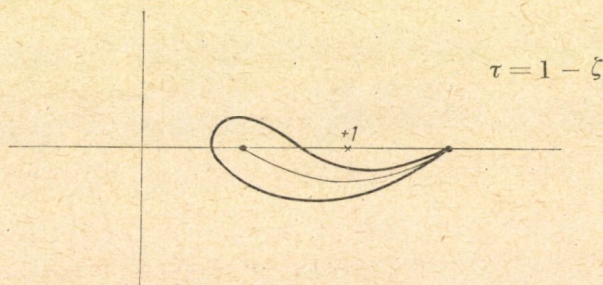
leképezés inverzét, a

$$z = f^{-1}(\tau) = f^{-1} \left( e^{\frac{2\tau}{a} u} \right) = \varphi(u)$$

leképezést behelyettesítve (2)-be, a

$$(11) \quad w = (Q + i\Gamma_1) \log \frac{1}{\varphi(u) - \sigma} + (Q + i\Gamma_1) \log \frac{1}{\varphi(u) - \sigma^{-1}} - \\ - (Q - i\Gamma_2) \log \frac{1}{\varphi(u)},$$

komplex potenciálhoz jutunk. Azt állítjuk, hogy éppen a vizsgált áramlás komplex potenciálja áll előttünk. Tekintve, hogy az előbbi konstrukció a



5. ábra

profilsor körüláramlását biztosítja, csupán az áramlásnak a  $\operatorname{Re}(u) = \pm\infty$ -beli sebességét kell megvizsgálnunk. Mint ismeretes, ha  $V_x$ ,  $V_y$  jelölik a sebesség-komponenseket :

$$-V_x + iV_y = \frac{dw}{du} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\tau} \frac{d\tau}{du} = \frac{dw}{dz} \frac{1}{f'(z)} \frac{2\pi}{a} \tau.$$



Minthogy

$$(12) \quad \frac{dw}{dz} = - (Q + i \Gamma_1) \frac{1}{z - \sigma} - (Q - i \Gamma_1) \frac{1}{z - \bar{\sigma}^{-1}} + (Q - i \Gamma_2) \frac{1}{z},$$

és  $\operatorname{Re}(u) = -\infty$  esetén  $\tau = 0$ ,  $z = \sigma$  és

$$\lim_{z \rightarrow \sigma} (z - \sigma) \frac{dw}{dz} = - (Q + i \Gamma_1), \quad \lim_{z \rightarrow \sigma} \frac{\tau}{z - \sigma} = f'(\sigma),$$

ezért  $\operatorname{Re}(u) \rightarrow -\infty$  esetén

$$-V_x + i V_y \rightarrow -\frac{2\pi}{d} (Q + i \Gamma_1),$$

$$V_x \rightarrow \frac{2\pi}{d} Q = \xi, \quad V_y \rightarrow -\frac{2\pi}{d} \Gamma_1 = \eta_1.$$

Minthogy másrészt  $\operatorname{Re}(u) = +\infty$  esetén  $\tau = \infty$ ,  $z = \infty$  és

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{dw}{dz} = - (Q + i \Gamma_2), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\tau}{z} = f'(\infty),$$

ezért  $\operatorname{Re}(u) \rightarrow +\infty$  esetén

$$-V_x + i V_y \rightarrow -\frac{2\pi}{d} (Q + i \Gamma_2),$$

$$V_x \rightarrow \frac{2\pi}{d} Q = \xi, \quad V_y \rightarrow -\frac{2\pi}{d} \Gamma_2 = \eta_2,$$

Mint látjuk, a  $Q$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  mennyiségek az áramlás  $\infty$ -beli sebesség-komponenseitől függenek:

$$\xi = V_x(\pm \infty) = \frac{2\pi}{d} Q$$

$$(13) \quad \eta_1 = V_y(-\infty) = -\frac{2\pi}{d} \Gamma_1$$

$$\eta_2 = V_y(+\infty) = \frac{2\pi}{d} \Gamma_2$$

(Megjegyezzük, hogy az áramlás forrásmentessége miatt szükségképpen  $V_x(-\infty) = V_y(+\infty)$ . Az áramlás  $\alpha$ , illetve  $\beta$  beesési, illetve kilépési szögét a

$$(14) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\eta_1}{\xi} = -\frac{\Gamma_1}{Q}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\eta_2}{\xi} = -\frac{\Gamma_2}{Q},$$

összefüggésekből lehet meghatározni.)



Megjegyezzük, hogy a  $\delta$  paraméter a  $Z$  profil vastagságától, az  $a$  paraméter a görbületségétől, a  $c$  paraméter a nagyságától függ. Utóbbi onnan látható, hogy  $l$ -el jelölve a profil „fókusz távolságát”,

$$2\pi \frac{l}{d} = \log \frac{1+c}{1-c}.$$

### 3. §.

Az áramlás sebességének nagysága:

$$\left| \frac{dw}{du} \right| = \left| \frac{dw}{dz} \right| \left| \frac{dz}{dz''} \right| \left| \frac{dz''}{d\zeta} \right| \left| \frac{d\zeta}{du} \right|.$$

Mint hogy ennek mindenütt végesnek kell lennie, de ugyanakkor

$$\left[ \frac{dz''}{d\zeta} \right]_{z''=-1} = \left[ -\frac{2}{c} \frac{z''^2}{1-z''^2} \right]_{z''=-1} = \infty,$$

$$\left[ \frac{dz}{dz''} \right]_{z''=-1} \neq 0, \quad \left[ \frac{d\zeta}{du} \right]_{\zeta=-c} \neq 0,$$

tehát szükségképpen:

$$(15) \quad \left[ \frac{dw}{dz} \right]_{z=-1} = 0.$$

(12) alapján tehát:

$$\begin{aligned} 0 &= (Q + i\Gamma_1) \frac{1}{1+\sigma} + (Q - i\Gamma_1) \frac{1}{1+\bar{\sigma}^{-1}} - (Q - i\Gamma_2) = \\ &= Q \left\{ \frac{1}{1+\sigma} + \frac{1}{1+\bar{\sigma}^{-1}} - 1 \right\} + i\Gamma_1 \left\{ \frac{1}{1+\sigma} - \frac{1}{1+\bar{\sigma}^{-1}} \right\} + i\Gamma_2 = \\ &= Q \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{(1+\sigma)(1+\sigma)} - i\Gamma_1 \frac{\sigma\bar{\sigma} - 1}{(1+\sigma)(1+\bar{\sigma})} + i\Gamma_2; \\ 0 &= Q \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{i} - \Gamma_1(\sigma\bar{\sigma} - 1) + \Gamma_2(1+\sigma)(1+\bar{\sigma}) = \end{aligned}$$

$$= (1+\sigma_1) \{ 2aQ - \Gamma_1[\sigma_1 - 1 + a^2(\sigma_1 + 1)] + \Gamma_2(1+a^2)(1+\sigma_1) \},$$

elhasználva (5)-öt. Továbbá (6) alapján:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - 1 + a^2(\sigma_1 + 1) &= (1-\delta)(\sigma'' - 1) - 2\delta, \\ (1+\sigma_1)(1+a^2) &= (1-\delta)(\sigma'' + 1), \end{aligned}$$



tehát folytatólag

$$2aQ - \Gamma_1\{(1-\delta)(\sigma''-1) - 2\delta\} + \Gamma_2(1-\delta)(\sigma''+1) = 0.$$

Itt  $\sigma''$  értékét (9)-ből helyettesítve, és a  $\frac{2\pi}{d} \frac{c}{1-\delta}$  tényezővel szorozva, (13) alapján:

$$(16) \quad \frac{2ac}{1-\delta} \xi + \left(1 - c + \sqrt{1-c^2} - \frac{2\delta c}{1-\delta}\right) \eta_1 - (1 + c + \sqrt{1-c^2}) \eta_2 = 0,$$

illetve (14) alapján:

$$(17) \quad \frac{2ac}{1-\delta} + \left(1 - c + \sqrt{1-c^2} - \frac{2\delta c}{1-\delta}\right) \operatorname{tg} \alpha - (1 + c + \sqrt{1-c^2}) \operatorname{tg} \beta = 0.$$

(16), illetve (17) azt mutatják, hogy a  $\xi$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  (illetve  $\alpha$ ,  $\beta$ ) mennyiségek nem függetlenek egymástól hanem  $\xi$ ,  $\eta_1$  már az  $\eta_2$ -t (illetve  $\alpha$  a  $\beta$ -t) meghatározza. A (17) formula az áramlás „törési törvényének” tekinthető. Speciálisan az  $a = \delta = 0$  esetben

$$(18) \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \sqrt{\frac{1-c}{1+c}},$$

#### 4. §.

Számítsuk ki a felhajtóerőt. Ha  $C$  a kvázi-Zsukovszkij profil kontúrja, a Blasius—Csapligin jól ismert formula alapján a felhajtóerő:

$$P = \frac{1}{2} i \oint_C \left( \frac{dw}{du} \right)^2 du = \frac{1}{2} i \oint_{|z|=1} \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dz}{du} dz,$$

ha a folyadék sűrűségét egységnyinek vesszük. Minthogy az integrandus  $|z| < 1$ -ben egyértékű és meromorf, tehát a reziduum-tétel alapján:

$$(19) \quad P = -\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{Res} \left\{ \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dz}{du} dz \right\}.$$

Tekintettel  $\frac{dw}{dz}$  (12) alatti előállítására, valamint arra, hogy

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du} &= \frac{dz}{dz'} \frac{dz'}{dz''} \frac{dz''}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\tau} \frac{d\tau}{du} = \frac{2\pi}{d} \frac{1-\delta}{1+ia} \frac{z''^2}{z''^2-1} \left( z'' + \frac{1}{z''} - \frac{2}{c} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{d} \frac{1-\delta}{1+ia} \frac{z''(z''-\sigma'')(z-\sigma''^{-1})}{z''^2-1}, \end{aligned}$$



csupán  $z = 0$ ,  $z = \bar{\sigma}^{-1}$ ,  $z'' = 1$  pontbeli reziduumokat kell figyelembe venni. (A  $z = z'' = -1$  pontban nincs pólus, (15) alapján.) Ezen reziduumok meghatározása a  $\delta$ ,  $a$ ,  $c$  paraméterek rögzített értékei mellett semmi nehézséget nem okoz.

A számítást példaképpen abban a legegyszerűbb speciális esetben végezzük el, amikor  $a = 0$ ,  $\delta = 0$ ,  $c$  tetszőleges. Ekkor  $z'' = z$ ,  $\sigma'' = \sigma = \bar{\sigma}$ . A  $z = 0$ -ban elsőrendű pólus van, amelynek reziduuma:

$$\text{Res}(0) = -\frac{2\pi}{d}(Q - i\Gamma_2)^2.$$

A  $z = \bar{\sigma}^{-1} = \sigma^{-1}$  helyen elsőrendű pólus van, amelynek reziduuma:

$$\text{Res}(\sigma^{-1}) = \frac{2\pi}{d}(Q - i\Gamma_1)^2.$$

A  $z = 1$  helyen ugyancsak elsőrendű pólus van, amelynek reziduuma:

$$\begin{aligned} \text{Res}(1) &= \left\{ -(Q + i\Gamma_1) \frac{1}{1 - \sigma} - (Q - i\Gamma_1) \frac{1}{1 - \sigma^{-1}} + (Q - i\Gamma_2) \right\} \frac{2\pi}{d} \left( 1 - \frac{1}{c} \right) = \\ &= - \left( \Gamma_1 \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - \Gamma_2 \right)^2 \frac{2\pi}{d} \left( 1 - \frac{1}{c} \right) = \left( \Gamma_1 \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} - \Gamma_2 \right)^2 \frac{2\pi}{d} \left( \frac{1}{c} - 1 \right) = \\ &= \Gamma_1^2 \frac{2\pi}{d} \frac{4c}{1 + c} = \frac{4\pi}{d} (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2), \end{aligned}$$

felhasználva (9)-et és (18)-at. Tehát, (13)-at felhasználva:

$$\begin{aligned} P &= -\pi \frac{2\pi}{d} \{ -(Q - i\Gamma_2)^2 + (Q - i\Gamma_1)^2 + 2(\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2) \} = \\ &= -\frac{d}{2} \left( \frac{2\pi}{d} \right)^2 \{ \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2 - 2iQ(\Gamma_1 - \Gamma_2) \} = \\ &= \frac{d}{2} \{ \eta_2^2 - \eta_1^2 - 2i\xi(\eta_1 - \eta_2) \} = P_x - iP_y, \end{aligned}$$

$$P_x = \frac{d}{2} (\eta_2^2 - \eta_1^2) = -\frac{c}{1 + c} d \eta_1^2; \quad P_y = d \xi (\eta_1 - \eta_2) = d \left( 1 - \sqrt{\frac{1 - c}{1 + c}} \right) \xi \eta_1.$$

Az általános esetben is  $P$  mint a  $\xi$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  sebesség-komponensek homogén kvadratikus alakja adódik.

A fenti eredmények a Ganz Vagon és Gépgyár egy megbízásával kapcsolatban jöttek létre, amelyet FREUD GÉZA osztályvezető kezdeményezésére az Intézet Differenciálegyenletek-osztálya számára végeztem.

(Beérkezett: 1956. VI. 25.)



ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЯДОВ ПРОФИЛЕЙ  
КВАЗИ-ЖУКОВСКОГО ТИПА

Т. КÖVÁRI

## Резюме

Под рядом профилей понимается множество расположенных вдоль прямой равноотстоящих конгруэнтных и одинаково расположенных профилей. Рассмотрим плоскостной поток, который под некоторым углом падает на ряд профилей. Ряд профилей изменяет направление потока, а поток оказывает силовое влияние на профили. В настоящей статье (для специальных, похожих на профили Жуковского профилей) находится комплексный потенциал потока, величина изменения направления потока и «подъемная сила», действующая на профили.

## HYDRODYNAMICAL INVESTIGATION OF QUASI-ŽUKOWSKY PROFILE-ROWS

Т. KÖVÁRI

## Summary

We consider an infinity of profiles, which are equidistantly arranged along a straight line. This arrangement we call a profile-row. Let us consider a flow in the plane, which falls with a given angle on the profile-row. The profile-row changes the direction of the flow, on the other hand the flow exerts force on the profiles. In the present paper we determine (in case of special profiles, similar to the Žukowsky-type) the complex potential of the flow, the change in the direction and the lifting force.



# ÚJ KÉSZÜLÉK SÍKBELI PROJEKTÍV TRANSZFORMÁCIÓ VÉGREHAJTÁSÁRA

HORVÁTH FERENC

## Bevezetés

Nomogramok tervezésénél gyakran szükséges olyan projektív transzformáció alkalmazása, amely a Descartes-féle koordinátarendszert projektív koordinátarendszerbe viszi át. Egy nomogram Descartes-koordinátarendszerbeli pontjainak transzformálása projektív koordinátarendszerbe — az alkalmasan választott transzformációs formula segítségével — hosszadalmas számítási feladatot jelent, különösen bonyolultabb, többváltozós függvénykapcsolat ábrázolása esetén. Egy előző dolgozatban [1] felvetettük annak lehetőségét, hogy a nomogramok projektív transzformációját mechanikus úton, készülék, úgynevezett perspektrográf segítségével hajtsuk végre, mely esetben a számítási munkát megtakaríthatjuk. A dolgozatban egy ilyen készüléket ismertetünk. Előnye, hogy hosszadalmas számítási munkát takarítunk meg, mert viszonylag rövid idő alatt kiválaszthatjuk a nomogramnak a követelményeknek legjobban megfelelő transzformált alakját, és a nomogramnak ily módon megválasztott, kivitelezésre szánt transzformált alakját a készülék segítségével fel is rajzolhatjuk. Ez esetben célszerűnek mutatkozik készülékünk kísérőtűjének meglevő derékszögű koordinátográfunk rajzolótűjéhez való illesztése.

## 1. §. A készülék és működése

Legyen  $E$  a  $\Sigma$  síkon az  $(x, y)$  koordinátarendszerben az egymáshoz  $\alpha$  szög alatt mereven illesztett  $k_1, k_2$  rudak csúcspontja (1. ábra). Az  $\alpha$  mindenkor az  $x$  és  $y$  koordinátaegyenesek által bezárt szög. Az  $R_1$  és  $R_2$ , illetve  $R_3$  és  $R_4$  az  $S$  sín vájatában gördülő  $M_1$ , illetve  $M_2$  késes kerék két-két egymásbaépített (emeletes) csapja. Az egymásba épített csapok közül az alsó rész ( $R_1, R_3$ ) tetszőleges helyzetben rögzített, míg a felső csap ( $R_2, R_4$ ) szabadon forog.

A  $k_1$  és  $k_2$  rúd az  $S$  sínnel közbezárt  $\beta_1$ , illetve  $\beta_2$  szög irányában keresztül csúszhat az  $R_1$ , illetve  $R_3$  csapon. A  $\beta_1$  és  $\beta_2$  szög beállítása az  $R_1$ , illetve  $R_3$  csap rögzítésével történik az  $(x, y)$  koordinátarendszer  $\Sigma$  síkbeli helyzetének megfelelően.

A  $\Sigma'$  síkon az  $A'_1$ , illetve  $A'_2$  rögzített pont körül forgó csapokat jelent, amelyeknek  $h$  összekötő egyenese párhuzamos az  $S$  sínnel. Az  $R_2$  és  $R_4$  forgó







csaphoz rögzítve van a  $Q_1$ , illetve  $Q_2$  rúd egyik vége, míg a másik az  $A_1'$ , illetve  $A_2'$  forgócsapon keresztül csúszhat. A  $Q_1$  és  $Q_2$  rudak egymást az  $E'$  közös forgócsapostól csúszkán áthatolva keresztezik, így az  $E'$  mindkét rúdon egyszerre és külön-külön is — a rudak mozgásától függően — csúszhat.

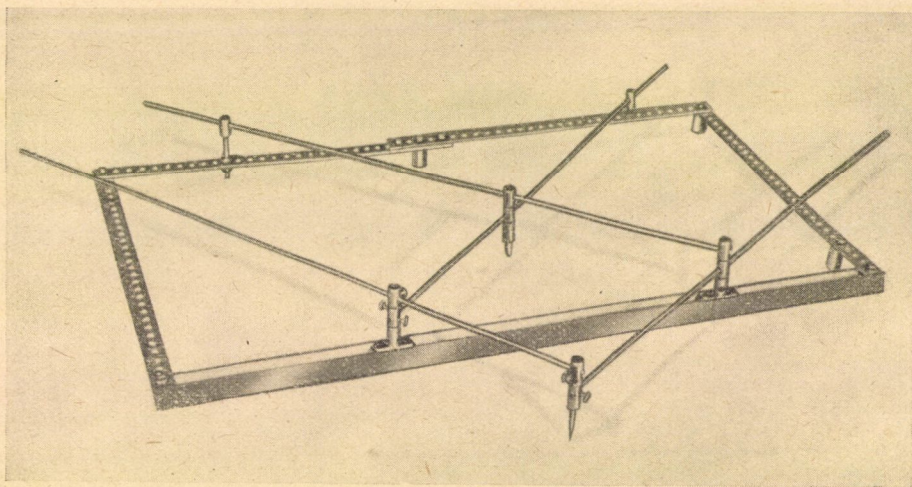
Helyezzünk az  $E$ -be kísértőtűt, az  $E'$ -be pedig rajzolóűtűt, és kísérvük figyelemmel a készülék mozgását.

Az  $E$  kísértőtű elmozdításával a  $k_1$ , illetve  $k_2$  rúd az  $S$  sínhez képest rögzített  $\beta_1$ , illetve  $\beta_2$  szög alatt csúszik keresztül az  $R_1$ , illetve  $R_3$  csapon, miközben ez a mozgás az  $M_1$ , illetve  $M_2$  kérés kerekeket az  $S$  sínen elmozdulásra kényszeríti. Az  $E$  kísértőtűnek az  $S$  sínhez való közeledésével az  $M_1$  és  $M_2$  kérés kerekek egymáshoz közelednek, ellenkező esetben távolodnak.

Az  $M_1$  és  $M_2$  kerekek elmozdulásával a  $Q_1$  és  $Q_2$  rúd az  $R_2$ , illetve  $R_4$  csappal együtt elfordul, és az  $E'$  közös csúszkát elcsúsztatja. Ugyanekkor a  $Q_1$  és  $Q_2$  rudak az  $A_1'$ , illetve  $A_2'$  rögzített forgó csapokon keresztül csúsznak, mivel az  $A_1'R_2$ , illetve  $A_2'R_4$  távolság a mozgásnak megfelelően változott.

Rögzítsük az  $(x, y)$  koordinátarendszert a  $\Sigma$  síkon, és feleltessük meg a leképezés vizsgálatánál  $E$ -nek a  $\Sigma'$  sík  $E'$  pontját.

Csúsztaskuk végig  $A_1$  irányában az  $E$  kísértőtűt, akkor csak az  $M_2$  kerék mozdul el, ami a  $Q_2$  rudat  $A_2'$  körül való forgatásra és azon keresztül átcsúszásra kényszeríti. Ezzel egyidejűleg a forgó  $Q_2$  rúd az  $E'$  csúszkát a nyugvó  $Q_1$  rúdon  $A_1'$  irányában elcsúsztatja. A  $\Sigma$  sík  $A_1 = (1, 0, 0)$  ideális (végtelen távoli) pontjának ezek szerint a  $\Sigma'$  síkon az  $A_1'$  pont a megfelelője. Ugyanígy belátható, hogy az  $A_2 = (0, 1, 0)$  ideális pontnak a  $\Sigma'$  síkon az  $A_2'$  pont felel meg. Ha az  $E$  pont az  $S$  sínre illeszkedik, akkor a képével,  $E'$ -vel egybeesik.



2. ábra

A készülék modellje a 2. ábrán látható. Elkészítéséért ezúton fejezem ki köszönetemet ELTER JÁNOSNAK, a Magyar Tudományos Akadémia Csillag-



vizsgáló Intézete technikusának. A modellel való kísérletezés tapasztalatai alapján kívánjuk a készüléket végleges formájában elkészíteni, figyelembe véve a precíziós kivitelezés technikai követelményeit. Ezért itt a végleges mechanikai konstrukcióra vonatkozó elképzeléseinkre részletesen nem térünk ki.

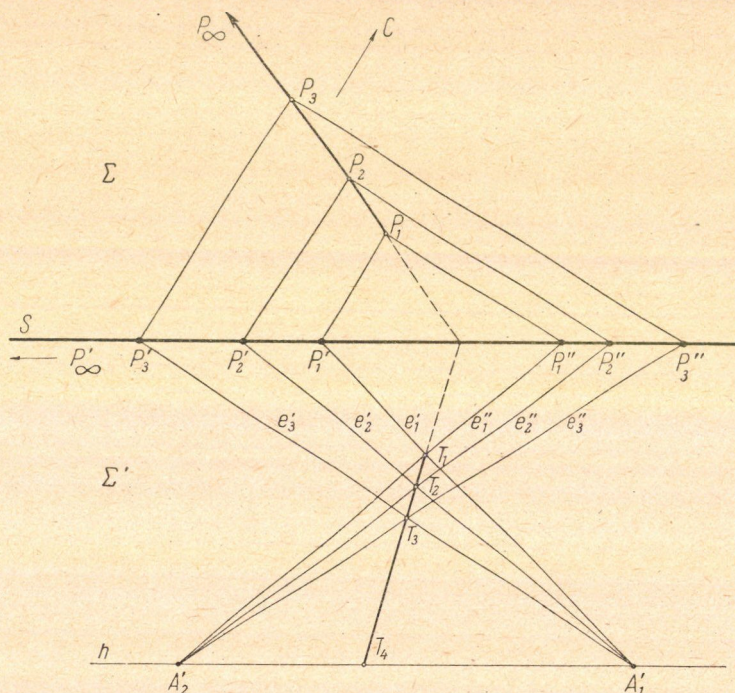
## 2. §. A készülék által megvalósított projektív leképezés igazolása

Látható, hogy a  $\Sigma$  tárgysík derékszögű négyszög-hálózata a  $\Sigma'$  síkon Moebius-rácsba megy át, hiszen a készülék működése éppen a Moebius-rács ismert szerkesztési eljárásának felel meg. A készülék leképezése projektív, sőt perspektív is, azaz a megfelelő tárgy- és képpontokat összekötő egyenesek közös  $O$  pontba, a perspektivitás centrumába futnak össze.

Az utóbbi állításra a teljesség kedvéért rövid bizonyítást adunk.

Először megmutatjuk, hogy a  $\Sigma$  tárgysík bármely egy egyenesben fekvő három  $P_1, P_2, P_3$  pontjának egy egyenesben fekvő  $T_1, T_2, T_3$  képpont-hármas felel meg.

Vegyünk fel a  $\Sigma$  síkon egy egyenesben fekvő  $P_1, P_2, P_3$  ponthármas, tartójuk végtelen távoli pontját jelöljük  $P_\infty$ -nel. Szerkesszük meg a készülék működési elvének megfelelő  $T_1, T_2, T_3$  képponthármas (3. ábra). A készülék



3. ábra

három különböző helyzetének megfelelően az  $M_1$  és  $M_2$  késes kerék három-három különböző helyzetet vesz fel, jelöljük ezeket így:  $P'_1, P'_2, P'_3$ , illetve  $P''_1, P''_2, P''_3$ , a  $Q_1$  és  $Q_2$  rúd három-három különböző helyzetének meg-



felelő egyenesek pedig legyenek  $e'_1, e'_2, e'_3$ , illetőleg  $e''_1, e''_2, e''_3$ . Jelölje továbbá a  $T_1T_2$  egyenesnek az  $e'_3$ -n fekvő pontját  $T'_3$ , az  $e'_3$ -n fekvő pontját  $T''_3$ , az  $A'_1A'_2$ -n fekvő pontját pedig  $T_4$ . Feladatunk: bebizonyítani, hogy

$$T'_3 \equiv T''_3 \equiv T_3.$$

A szerkesztésből világos, hogy a  $(P_1P_2P_3P_\infty)$  kettősviszony megegyezik a  $(T_1T_2T'_3T_4)$  kettősviszonnyal, hiszen a  $P_1, P_2, P_3, P_\infty$  pontnégyesnek a  $C$  végtelen távoli pontból az  $S$  egyenesre vetített  $P'_1, P'_2, P'_3, P'_\infty$  képe azonos a  $T_1, T_2, T'_3, T_4$  pontnégyesnek az  $A'_1$ -ből vetített képével.

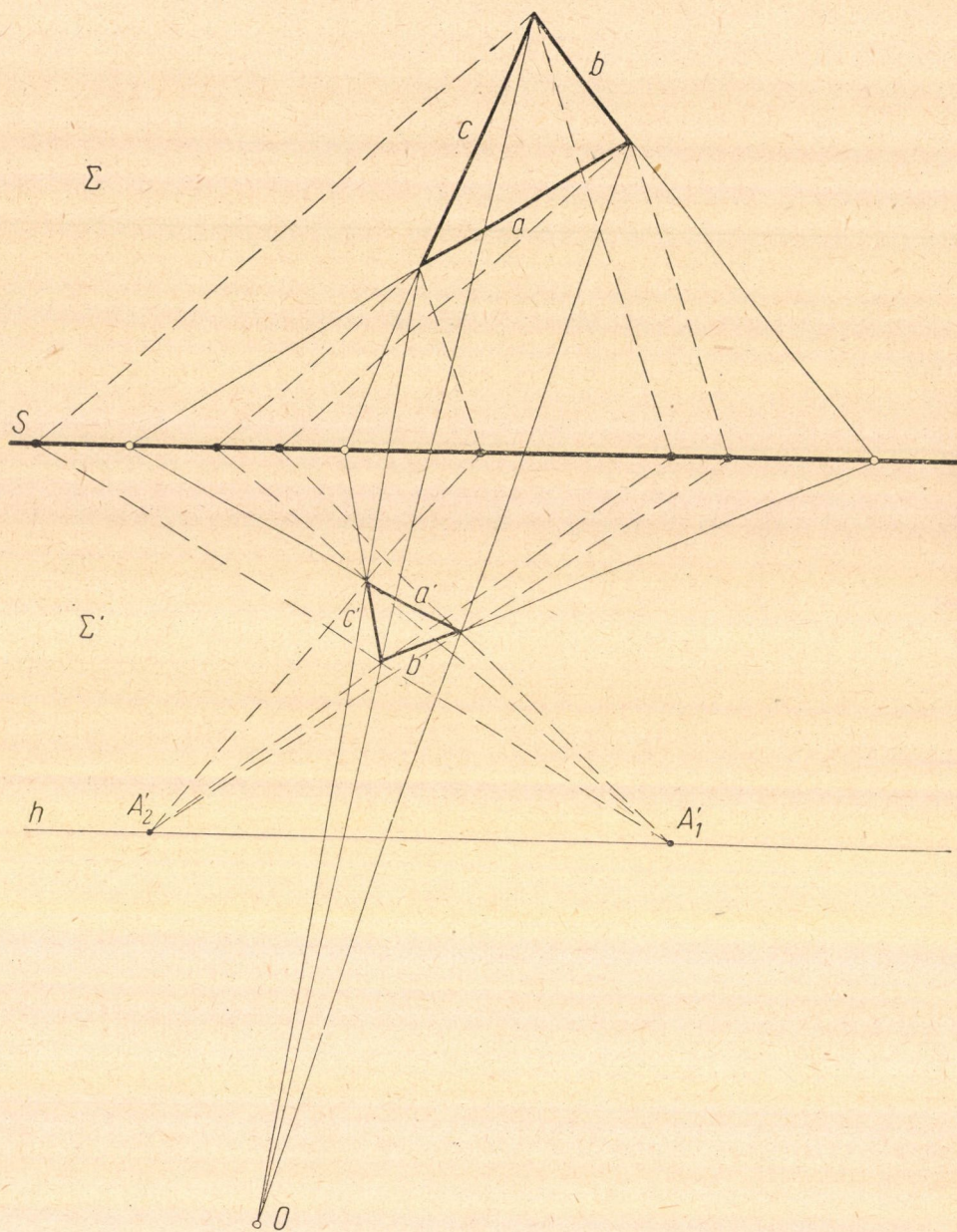
Hasonlóképpen látható be, hogy  $(P_1P_2P_3P_\infty) = (T_1T_2T''_3T_4)$ , ennél fogva  $(T_1T_2T'_3T_4) = (T_1T_2T''_3T_4)$ , és így  $T'_3 \equiv T''_3$ , de ekkor  $e'_3, e''_3$  és  $T_1T_2$  közös pontban metszik egymást, vagy más szóval:  $T_3$  (az  $e'_3$  és  $e''_3$  metszéspontja) rajta fekszik a  $T_1T_2$  egyenesen.

A bizonyításból is látható, hogy az  $A'_1, A'_2$  csapokkal meghatározott egyenest gondosan párhuzamosra kell állítanunk az  $S$  sínnel, különben a leképezés nem lesz egyenes-tartó.

Mivel pedig az  $S$  egyenesen fekvő pontok képpontjaikkal egybeesnek, ezért minden, a  $\Sigma$  tárgysíkon fekvő,  $a, b, c$  oldalú háromszögnek és a  $\Sigma'$  síkbeli,  $a', b', c'$  képének megfelelő  $aa', bb', cc'$  oldalpárja az  $S$  sínen metszi egymást (4. ábra). A leképezés már bizonyított egyenes-tartó voltából és a Desargues-tételből következik, hogy van egy  $O$  perspektív centrum, amelyet a háromszögek megfelelő csúspontjait összekötő egyenesek közös metszéspontja jelöl ki:

(Beérkezett: 1956. VII. 28. — Átdolgozva: 1956. VIII. 15.)





4. ábra



## IRODALOM

- [1] HORVÁTH FERENC: „Nomogrammok kivitelezése.” A *Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 343–352.

ПРОЕКТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ДЕКАРТА  
В ПЛОСКОСТИ С ПОМОЩЬЮ НОВОГО ИНСТРУМЕНТА

F. HORVÁTH

Резюме

При планировании номограмм часто необходимо проективное преобразование системы координат Декарта. Чтобы избежать вычислений, найти преобразованную форму номограммы и, приключая к координатографу, окончательно построить номограмму, был сконструирован описываемый в работе инструмент. Принцип его действия построен на графическом преобразовании квадратной решетки в решетку Моебиуса. В ходе доказательства используется перспективность и теорема Декарта.

NEUES GERÄT ZUR PROJEKTIVEN TRANSFORMATION EINES EBENE  
KOORDINATENSYSTEMS

F. HORVÁTH

Zusammenfassung

Bei der Konstruktion von Nomogrammen ist oft die Transformation des Koordinatensystems nötig. Das in der Arbeit beschriebene Gerät dient zur Vermeidung von Kalkulationen zur experimentellen Bestimmung der Gestalt von Nomogrammen, und — indem es man zum Koordinatograph schaltet — zur Bestimmung der endgültigen Gestalt von Nomogrammen.

Das Gerät beruht auf der graphischen Transformation von quadratischen Gittern in Moebiussche Gitter. Bei dem Beweise werden die Perspektivität und der Desarguesche Satz benutzt.



ROMANIA  
ROMANIA ACADEMY  
BIBLIOTHECA



# INDEX

J. EGERVÁRY: On a generalized inverse for matrices .....	315
A. BRÓDY—A. RÉNYI: On the regulation of prices .....	325
J. MOGYORÓDI—G. NÉMETH: On probabilistic problems connected with the process of slowing down of neutrons in nuclear reactors .....	337
A. PRÉKOPA—P. RÉVÉSZ: Mathematical treatment of the rearrangement of linear methylsilicone oils, II. ....	349
G. OROSZ—L. TAKÁCS: Über gewisse mathematische Probleme der Dokumen- tationssysteme mit zufallsartig gewählten superponierten Koden .....	357
A. HEPPES—P. RÉVÉSZ: A new generalization of the method of Latin squares and orthogonal Latin squares and its application to the design of experi- ments .....	379
Ö. ÉLTETŐ: On the estimation of the standard deviation based on range and quasi-ranges .....	391
Á. FONTÁNYI—K. SARKADI—É. VAS: Ergänzung zur Arbeit über »Anwendung der Theorie der geordneten Stichproben in der statistischen Qualitäts- kontrolle« .....	399
G. KARDOS: De la perte de courant d'induction dans une sphere conductrice	405
I. FENYŐ: Über die Kerne linearer Integralgleichungen welche keine Eigenwerte besitzen .....	423
GY. ADLER: Sur le principe du maximum de l'équation de la chaleur, II. ....	429
G. FREUD: Sur le principe du maximum de l'équation de la chaleur, III. ....	437
T. KÓVÁRI: Hydrodynamical investigation of quasi-Zukowsky profile-rows ...	447
F. HORVÁTH: Neues Gerät zur projektiven Transformation eines ebenen Koordi- natensystems .....	457



## СОДЕРЖАНИЕ

J. EGÉRVÁRY: Обобщение обратной матрицы .....	315
A. BRÓDY—A. RÉNYI: О проблеме регулирования цен .....	325
J. MOGYORÓDI—G. NÉMETH: О некоторых теоретико-вероятностных проблемах связанных с процессом замедления нейтронов, происходящих в атомных реакторах .....	337
A. PRÉKOP—P. RÉVÉSZ: Математическое исследование перегруппировки линейных метилсиликоновых масел, II .....	349
G. OROSZ—L. TAKÁCS: О математических вопросах документационных систем с налагающимися случайными кодами .....	357
A. HERPES—P. RÉVÉSZ: Одно обобщение метода латинских квадратов и его применения .....	379
Ö. ELGETŐ: Об оценке дисперсии на основании размаха выборки и урезанного размаха выборки .....	391
A. FONTÁNYI—K. SÁRKADI—É. VAS: Добавление к работе «Применение теории вариационных рядов при статистическом контроле качества» .....	399
G. KARDOS: Об определении потери токов Foucault в плотном металлическом шаре .....	405
I. FENYŐ: О ядрах линейных интегральных уравнений, не имеющих собственных значений .....	423
G.Y. ADLER: О принципе максимума для дифференциального уравнения теплопроводности, II. ....	429
G. FREUD: О принципе максимума для дифференциального уравнения теплопроводности, II. ....	437
T. KÖVÁRI: Гидродинамическое исследование рядов профилей квази-Жуковского типа .....	447
F. NOVÁTH: Проективное преобразование системы координат Декарта в плоскости с помощью нового инструмента .....	457



✓Mm-  
307.801

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI  
KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

I. ÉVFOLYAM, 4. FÜZET  
1956

★

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ I., ВЫПУСК 4.  
1956

★

PUBLICATIONS  
OF THE  
MATHEMATICAL INSTITUTE  
OF THE  
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME I., FASC. 4  
1956



1957

2



## TARTALOMJEGYZÉK

NICOLESCU, M.: Elliptikus vagy hiperbolikus típusú differenciálegyenletek megoldásainak szerkezete .....	465
TURÁN P.: Megjegyzés a kvázi-analitikus függvényosztályok elméletéhez.....	481
MEDGYESSY P.: Stabilis valószínűség-sűrűségfüggvényekre fennálló parciális differenciálegyenletek és alkalmazásaik .....	489
RÉNYI A.: A Poisson-folyamat egy jellemzése.....	519
PALÁSTI I.—RÉNYI A.: A Monte-Carlo módszer mint minimax stratégia.....	529
L. ZIERMANN M.: Néhány mezőgazdasági kérdés valószínűségszámítási vizsgálata, I. ....	547
BÉRES E.—LOVASS-NAGY V.—SZABÓ J.: Ciklikus szimmetriával bíró térbeli rácsos tartók rúderőinek meghatározása hipermatrixok alkalmazásával.....	559
BÉRES E.: Centráliszimmetriával bíró térbeli keretek számítása hipermatrixok alkalmazásával .....	577
RÓZSA P.: A matrix-számítás alkalmazása rudak és lemezek sztatikájában.....	593
SZABÓ J.: A mátrixelmélet alkalmazása egyes szilárdságtani problémákat leíró parciális differenciálegyenletek közelítő megoldásánál.....	623
A Matematikai Kutató Intézet szemináriumai 1956-ban elhangzott előadások kivonatai .....	633
Az Intézet munkatársainak az Intézet munkájának eredményeit tartalmazó, 1956 január 1. óta másutt megjelent vagy sajtó alatt levő dolgozatainak jegyzéke	645



A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI  
KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

I. ÉVFOLYAM, 4. FÜZET  
1956

★

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ I., ВЫПУСК 4.  
1956

★

PUBLICATIONS  
OF THE  
MATHEMATICAL INSTITUTE  
OF THE  
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME I., FASC. 4  
1956



1957



# A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»  
CÍMŰ KIADVÁNYSOROZAT FOLYTATÁSA

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD  
TECHNIKAI SZERKESZTŐ: LIPTÁK TAMÁS  
A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET  
BUDAPEST, VI., NÉPKÖZTÁRSASÁG ÚTJA 31. I.

A MATEMATIKAI KUTATÓINTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb, főként a matematika gyakorlati alkalmazásaival kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden évfolyama 4 füzetből áll, és kb. 30 nyomdai iv terjedelmű. A dolgozatok vagy magyarul jelennek meg két világnyelven írott részletes kivonattal, vagy valamelyik világnyelven, magyar és még egy világnyelven írt kivonattal. Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük a szerkesztőséghez fordulni.

A folyóirat „A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei” című kiadványsorozat folytatása, melynek 3 kötete jelent meg [I. kötet (1952); II. kötet (1953); III. kötet (1954)].

## ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ПРОДОЛЖЕНИЕ ИЗДАНИИ  
«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»  
(ТРУДЫ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ)

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI  
ТЕХНИЧЕСКИЙ РЕДАКТОР: TAMÁS LIPTÁK  
АДРЕС РЕДАКЦИИ: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
BUDAPEST, VI., NÉPKÖZTÁRSASÁG ÚTJA 31. I.

В ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие статьи по преимуществу связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала выходит в 4 выпусках, в 30 печатных листах приблизительно. Статьи опубликованы или на венгерском языке с подробным резюме на двух мировых языках, или на каком-то мировом языке с резюме на венгерском и каком-то другом языке. Заказы при нимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21.). Текущий счет № 45-790-057-50-032. По поводу отношения обмена просим обращаться непосредственно к редакции.

Журнал является продолжением издания «A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei» от которого вышли в свет 3 тома [том I. (1952); том II. (1953); том III. (1954)].

## PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

CONTINUING THE SERIES  
«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»  
(PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DE L'ACADÉMIE  
DES SCIENCES DE HONGRIE)

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI  
TECHNICAL EDITOR: TAMÁS LIPTÁK  
ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE  
BUDAPEST, VI., NÉPKÖZTÁRSASÁG ÚTJA 31.

THE PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of the scientific work of the Institute and other papers, especially on the practical applications of mathematics. The journal is published quarterly, 4 issues are forming one volume, consisting of about 30 printed lists. The papers appear in Hungarian with abstracts in two world-languages or in a world-language with abstracts in Hungarian and in an other world-language. For subscription please write to the trade organization „Kultúra” (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21.). Cheque No. 45-790-057-50-032. For establishing exchange relations please write to the editor.

The journal continues the series „A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei” of which 3 volumes were published [Vol. I. (1952); Vol. II. (1953); Vol. III. (1954)].



# LA STRUCTURE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE ELLIPTIQUE OU DU TYPE PARABOLIQUE<sup>1)</sup>

MIRON NICOLESCU<sup>2)</sup>

## 1. §.

L'un des problèmes qui passionnait le plus les jeunes chercheurs en mathématiques de Roumanie, il y a un quart de siècle, c'était le problème d'étendre, d'une manière quelconque, la notion de fonction monogène d'une variable complexe. Je dois avouer que ce fut une de mes préoccupations comme candidat au doctorat. Ces préoccupations se sont manifestées dans les efforts d'obtenir une transformation ponctuelle de l'espace à quatre dimensions en lui-même, qui puisse conserver le plus possible des propriétés de la transformation conforme. C'est comme ça que je suis arrivé, dans l'un des chapitres de ma Thèse de 1928, au système différentiel suivant

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_4} + \frac{\partial u_4}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_4}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_4} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= -\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_4}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_4} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_4}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

Mais je n'ai pas su trop que faire de ce système, après avoir mis en évidence le fait que les fonctions  $u_1, u_2, u_3, u_4$  qui vérifient un tel système sont nécessairement des fonctions harmoniques des quatre variables  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . De sorte que j'ai abandonné cette direction de recherches (bien à tort, car quelques années plus tard ce système devait reparaitre dans les recherches de R. FUETER et de mon collègue MOISIL sur les quaternions monogènes), et j'ai pris un autre chemin. Cette nouvelle direction m'a été suggérée par quelques observations bien simples :

<sup>1)</sup> Conférence tenue à l'Institut Mathématique de l'Académie des Sciences de Hongrie le 24 janvier 1955.

<sup>2)</sup> Professeur à l'Université de Bucarest.



Tout d'abord, bien des propriétés importantes des fonctions analytiques complexes, et des familles de telles fonctions, sont en réalité des propriétés de leurs composantes réelles et se retrouvent pour les fonctions harmoniques de trois ou plusieurs variables. Deuxièmement, j'ai observé que la démonstration de ces propriétés, qui se fait habituellement (même dans les traités récents), à l'aide de la formule bien connue de Poisson, peut se faire plus simplement, en partant de la propriété d'invariance par médiation sphérique, mise en évidence par GAUSS. Troisièmement, j'ai constaté que cette propriété d'invariance caractérise, dans des conditions très générales (mises en évidences par E. E. LEVI, VOLTERRA et TONELLI) les fonctions harmoniques d'un nombre arbitraire de variables.

D'autre part, en mécanique des fluides et en résistance des matériaux, se présentaient d'une manière très naturelle les fonctions appelées depuis *biharmoniques*, c'est-à-dire les solutions de l'équation de Laplace deux fois itérée :

$$\Delta \Delta u = \Delta^2 u = 0 .$$

Tout cela m'a donné l'idée d'une étude systématique de la classe des fonctions vérifiant l'équation itérée  $p$  fois ( $p > 1$ ) :

$$(1) \quad \Delta^p u = 0 ,$$

c'est-à-dire des fonctions polyharmoniques, dans l'espoir de retrouver, dans leur structure, quelque chose de la structure des fonctions harmoniques. Mais, comme dans le dernier cas, l'équation différentielle (1) ne pouvait pas donner directement des renseignements sur la structure interne des fonctions qu'elle définit. Il fallait se rappeler que dans le cas des fonctions analytiques, comme dans le cas des fonctions harmoniques, c'était une propriété intégrale, l'intégrale de CAUCHY dans le premier, l'intégrale de POISSON ou de GAUSS dans le second, qui constituait la base de toute recherche. Donc, le succès de toute recherche concernant la structure des fonctions polyharmoniques dépendait de la résolution préalable du problème suivant : Peut-on caractériser une fonction polyharmonique par une propriété intégrale, analogue à la propriété exprimée par le théorème de GAUSS ?

J'ai donné une réponse affirmative à ce problème dans les années 1931—1932. Je rappelle ici, brièvement, le résultat obtenu :

Si  $D$  est un domaine de l'espace euclidien à  $n$  dimensions, désignons par  $D_\varrho$  le domaine de  $D$  après la suppression de l'ensemble des points des sphères de rayon  $\varrho$  centrées sur la frontière de  $D$ . Soit  $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(P)$  une fonction définie sur  $D$ , sommable sur ce domaine. Soit encore  $S_r(P)$  la sphère de rayon  $r$ , ayant pour centre le point  $P$ . Nous désignerons par

$$\mu_0(u; P; r)$$

la moyenne des valeurs de  $u$  sur  $Fr S_r(P)$ .

Il faut remarquer que cette moyenne s'exprime par une intégrale  $(n - 1)$ -uple et que, par suite du théorème bien connu de FUBINI, elle peut



ne pas exister (avoir de sens) pour une infinité de valeurs de  $r$ , de mesure (linéaire) nulle.

Introduisons maintenant la suite des moyennes  $\{\mu_s(u; P; r)\}$  définie par récurrence de la manière suivante

$$\mu_s(u; P; r) = \frac{n}{r^n} \int_0^r \varrho^{n-1} \mu_{s-1}(u; P; \varrho) d\varrho \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Il est évident que pour  $s > 0$  la restriction concernant l'existence de  $\mu_0$  disparaît, puisqu'un ensemble de mesure nulle n'a pas d'influence sur le procès d'intégration.

Posons encore

$$V\left(1, \frac{n}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+2p-2}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{n}{n+2} & \dots & \frac{n}{n+2p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \left(\frac{n}{n+2}\right)^{p-1} & \dots & \left(\frac{n}{n+2p-2}\right)^{p-1} \end{vmatrix}$$

et désignons par

$$V\left(\mu(u; P; r), \frac{n}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+2p-2}\right)$$

le déterminant obtenu du précédent en substituant à la première colonne la suite

$$\mu_0(u; P; r), \mu_1(u; P; r), \dots, \mu_{p-1}(u; P; r).$$

Le résultat fondamental que j'ai obtenu peut se formuler comme il suit :

**1.** La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $u(P)$ , définie sur  $D$ , sommable sur ce domaine, soit polyharmonique d'ordre  $p$  à l'intérieur de ce domaine, est qu'il existe un nombre positif  $\zeta^*$  tel que, pour tout  $\varrho \leq \varrho^*$  on ait, en chaque point du domaine  $D_\varrho$

$$(2) \quad u(P) = \frac{V\left(\mu(u; P; r), \frac{n}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+2p-2}\right)}{V\left(1, \frac{n}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+2p-2}\right)}$$

dès que  $r \leq \zeta$ .

Il est visible que cette caractérisation *intégrale* des fonctions polyharmoniques d'un ordre quelconque  $p \geq 1$ , constitue bien une extension



de la caractérisation des fonctions harmoniques par la relation de GAUSS.

Grâce au théorème précédent, l'étude de la structure des fonctions polyharmoniques est considérablement facilitée. Voici quelques conséquences de ce théorème :

2. Une fonction polyharmonique, bornée dans tout l'espace, est nécessairement une constante.

3. L'espace des fonctions polyharmoniques d'ordre  $\leq p$  est compact par rapport à la convergence uniforme.

4. Si une série de fonctions polyharmoniques d'ordre  $\leq p$  converge uniformément sur la frontière d'un domaine normal et s'il en est de même des  $p-1$  séries formées avec les laplaciens successifs, alors la série converge uniformément à l'intérieur (vers une fonction polyharmonique d'ordre  $\leq p$ , en vertu de 3.).

5. Si une série de fonctions polyharmoniques d'ordre  $\leq p$  complètement sousharmoniques dans  $D$ , converge en un point  $P \in \text{Int } D$ , alors cette série converge uniformément dans  $D$ .

Le dernier énoncé a besoin d'une explication. J'appelle fonction complètement sousharmonique dans  $D$ , toute fonction vérifiant dans ce domaine les relations

$$u \geq 0, \quad \Delta u \leq 0, \quad \Delta^2 u \geq 0, \dots, \Delta^p u = 0.$$

Vous reconnaissez dans la proposition 2. l'extension du théorème bien connu de LIOUVILLE, dans la proposition 3. l'extension d'un théorème de WEIERSTRASS, dans les deux dernières propositions l'extension de deux théorèmes célèbres de HARNACK. Tous ces résultats sont maintenant d'un usage courant. L'ensemble des résultats connus jusqu'en 1936 a été consigné dans le fascicule [1].

Il est évident que, depuis 1936 et jusqu'à l'heure actuelle, l'ensemble de nos connaissances sur les fonctions polyharmoniques a considérablement augmenté. J'ai moi-même attaqué en 1940 le problème du comportement d'une fonction polyharmonique autour d'un point singulier isolé  $P_0$ , obtenant le résultat suivant :

6. Si  $n$  est impair, ou bien si  $n$  est pair et  $p < n/2$ , alors  $u(P)$  peut s'écrire sous la forme suivante

$$(3) \quad u(P) = \sum_{k=0}^{p-1} \varrho^{2k} u_k(P),$$

où  $\varrho = \overline{PP_0}$  et les fonctions  $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$  sont harmoniques en tout point du domaine, sauf au point  $P_0$ ;

7. Si  $n$  est pair et  $p \geq n/2$ , alors on a

$$(4) \quad u(P) = \sum_{k=0}^{p-1} \varrho^{2k} u_k(P) + \log \varrho \cdot \sum_{k=0}^{n-p/2} \varrho^{2k} U_{p-n/2+k}(P),$$

où  $\varrho$  et les  $u_k$  ont la même signification que plus haut, et les  $U$  sont des polynômes harmoniques de degré égal à l'indice correspondant.



On a bien voulu donner à la formule (4) le nom de formule de PICONE—NICOLESCU puisque PICONE l'avait trouvé, dans un cas très particulier ( $n = p = 2$ ) (mais ceci, je l'ignorais). Quant à la formule (3), elle conserve, dans le cas singulier traité, le même aspect qu'une formule bien connue, la soit disant formule d'ALMANSI.

En 1954, un de mes élèves, S. TELEMAN a montré que :

**8.** *Si le second membre de la relation (2) est indépendant, en chaque point, de  $r \leq \varrho$  (et cela pour tout  $\varrho > 0$ ), alors la fonction  $u$  coïncide presque partout dans  $D$  avec une fonction polyharmonique d'ordre  $p$ . (Voir : [4].)*

## 2. §.

Les succès obtenus dans l'étude des fonctions polyharmoniques m'ont conduit à m'occuper aussi des équations du type parabolique.

Premièrement, j'ai étudié l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

en démontrant, indépendamment de A. TYCHONOFF l'unicité de la solution du problème de CAUCHY, avec la loi suivante de croissance pour les données sur l'axe des  $x$  :

$$|f(x)| < Me^{Kx^2}.$$

Dans le Mémoire [2] j'ai réussi à étendre aux solutions de l'équation de la chaleur le théorème bien connu de LIOUVILLE. Voici l'énoncé de cette extension :

**9.** *Supposons que dans le demi-plan  $t \leq t_0 - \varepsilon$  ( $t_0$  quelconque), le rapport  $u(x, t)/\delta^\alpha$ , où  $\delta$  est la distance du point  $(x, t)$  à la droite  $t = t_0$ ,  $\alpha$  et  $\varepsilon$  deux nombres positifs, reste borné. Alors  $u(x, t)$  est nécessairement un polynôme, de degré  $E(\alpha)$  en  $t$ .*

En particulier, si  $0 \leq \alpha < 1/2$ ,  $u$  est nécessairement une constante.

Pendant 13 ans, ces recherches n'ont pas eu de suite. En 1950 j'ai commencé à m'occuper de l'équation itérée

$$\left( \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{(p)} = 0 \quad \left( \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right).$$

Par différence avec l'équation  $\Delta^p u = 0$  qui définit les fonctions polyharmoniques, cette dernière équation n'avait pas fait jusqu'à présent l'objet d'une étude systématique.

Les résultats obtenus ont été tellement nombreux, que j'ai dû donner un nom spécial aux solutions de l'équation précédente, à savoir le nom de «fonctions polycaloriques d'ordre  $p$ ». J'ai appelé, aussi, fonction calorique toute solution de l'équation de la chaleur.



J'ai exposé, pendant quelques années, les résultats obtenus, dans des cours de spécialisation, à la Faculté de Mathématiques de l'Université. A la fin, je me suis décidé à les rassembler dans le Mémoire [3].

Je prends la liberté d'exposer ici les principaux résultats de ce Mémoire ainsi que des problèmes non résolus.

Pour éviter les longueurs, j'introduirai les notations

$$\square = \triangle - \frac{\partial}{\partial t}; \quad \sqcup = \triangle + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Les notations  $\square$ ,  $\sqcup^{(p)}$  s'entendent d'elles-mêmes.

Dans le premier chapitre de ce Mémoire, je montre que toute fonction  $u(x, t)$ , polycalorique d'ordre  $p$  dans un certain domaine, peut s'écrire d'une seule manière sous la forme

$$u = u_0 + (t - t_0) u_1 + \dots + (t - t_0)^{p-1} u_{p-1},$$

$u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$  étant des fonctions caloriques.

Une conséquence importante de cette décomposition est que toute fonction polycalorique est analytique par rapport aux variables spatiales et de classe II au sens de HOLMGREN par rapport à  $t$  (la variable temporelle).

Un second problème important concernant les fonctions polycaloriques d'ordre  $p$  est résolu dans le chapitre II : on sait que si l'on impose à la solution de l'équation  $\square u = 0$  de prendre, pour  $t \rightarrow t_0$ , les valeurs  $\varphi(x)$  soumises à la condition

$$|\varphi(x)| < M e^{Kx^2},$$

cette solution s'obtient par la formule bien connue de POISSON

$$(5) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} d\xi.$$

Je me suis proposé de résoudre le problème analogue pour l'équation  $\square^{(p)} u = 0$ . Seulement, il y a plusieurs extensions possibles, dont voici les deux les plus importantes :

1°. On peut demander à déterminer la fonction  $u(x, t)$  polycalorique d'ordre  $p$  dans la bande

$$0 < t < t_1,$$

connaissant les valeurs que la suite

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^{p-1} u}{\partial t^{p-1}}$$

prend sur l'axe des  $x$ .



2°. On peut demander à déterminer la fonction  $u(x, t)$  connaissant les valeurs que prend la suite

$$u, \quad \square u, \quad \square^2 u, \quad \dots, \quad \square^{p-1} u,$$

sur l'axe des  $x$ .

J'ai résolu les deux problèmes, en donnant leur solution effective.

Pour le premier problème, le résultat est le suivant

10. Si les fonctions

$$\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \quad \dots, \quad \varphi_{p-1}(x)$$

vérifient les conditions suivantes

1°.  $\varphi_k(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots, p-1$  est de classe  $C^{2(p-k+1)}$  ;

2°. Il existe deux constantes positives  $M$  et  $K$  telles que

$$\left| \frac{d^i \varphi_k(x)}{dx^i} \right| < M e^{Kx^2} \quad (i = 0, 1, \dots, 2p+2; \quad k = 0, 1, \dots, p-1),$$

alors il existe une fonction  $u(x, t)$  et une seule, polycalorique d'ordre  $p$  dans la bande

$$0 < t < \frac{1}{4K},$$

et telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \varphi_0(x),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} = \varphi_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, p-1).$$

Cette solution peut s'exprimer symboliquement par la formule

$$\begin{aligned} u(x, t) = & u(\varphi_0) + \frac{t}{1!} \left[ u(\varphi_1) - \frac{\partial u(\varphi_0)}{\partial t} \right] + \frac{t^2}{2!} \left[ u(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t} \right]^{(2)} + \dots \\ & \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \left[ u(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t} \right]^{(p-1)}. \end{aligned}$$

J'ai désigné, par  $u(\varphi)$  la fonction calorique se réduisant, pour  $t \rightarrow 0$ , à  $\varphi(x)$ . Le sens du symbole  $\left[ u(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t} \right]^{(k)}$  devient alors très clair :

$$\begin{aligned} \left[ u(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t} \right]^{(k)} = & u(\varphi_k) - \binom{k}{1} \frac{\partial u(\varphi_{k-1})}{\partial t} + \binom{k}{2} \frac{\partial^2 u(\varphi_{k-2})}{\partial t^2} - \dots \\ & \dots + (-1)^k \frac{\partial^k u(\varphi_0)}{\partial t^k}. \end{aligned}$$



Je dois avouer que j'ai eu à vaincre d'assez grandes difficultés de calcul pour montrer que la fonction ainsi construite vérifie bien les conditions initiales.

La résolution du second problème est bien plus facile. J'énonce ici le résultat obtenu :

11. Soient

$$f_0(x), f_1(x), \dots, f_{p-1}(x)$$

$p$  fonctions continues sur la droite réelle, telles que

$$|f_i(x)| < M e^{Kx^2} \quad (i = 0, 1, \dots, p-1),$$

$M$  et  $K$  étant deux constantes positives. Il existe une fonction  $u(x, t)$  et une seule polycalorique d'ordre  $p$  dans la bande  $(0, 1/4K)$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f_0(x); \quad \lim_{t \rightarrow 0} \square^s u(x, t) = f_s(x) \quad (s = 1, 2, \dots, p-1).$$

Cette fonction est donnée par la formule

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, t) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} d\xi,$$

où

$$F(x, t) = f_0(x) - \frac{t}{1} f_1(x) + \frac{t^2}{2!} f_2(x) - \dots + (-1)^{p-1} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} f_{p-1}(x).$$

Ce second problème paraît moins important que le premier problème, au point de vue des applications éventuelles en Physique. En échange, il requiert une importance théorique spéciale, par le fait qu'il nous conduit d'une façon très naturelle à une notion nouvelle que j'ai appelée *l'analyticité parabolique*.

J'appelle dans le Mémoire cité, fonction paraboliquement analytique toute fonction qui, dans la bande  $0 < t < 1/4K$  peut se mettre sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_n(x, t),$$

où les  $u_n(x, t)$  sont des fonctions caloriques, vérifiant la loi de croissance

$$|u_n(x, t)| < M e^{Kx^2} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

J'ai pu montrer qu'une fonction paraboliquement analytique peut s'écrire d'une seule manière sous la forme précédente.



Je passerai sur les chapitres consacrés aux problèmes de frontière auxquels donne lieu la considération des fonctions polycaloriques d'ordre  $p$ , pour arriver plus rapidement à l'étude de la structure des fonctions polycaloriques, définies dans une bande infinie.

Le modèle créé antérieurement pour les fonctions polyharmoniques exigeait qu'on trouvât, ici aussi, une caractérisation intégrale, et non pas différentielle, des fonctions polycaloriques d'ordre  $p$ . Il fallait, premièrement, construire une fonctionnelle qui puisse jouer le même rôle que la moyenne circulaire dans la théorie des fonctions harmoniques et polyharmoniques. J'avais déjà construit cette fonctionnelle, dans mon Mémoire de 1937, mais je n'ai pu alors en tirer toutes les riches conséquences que j'en ai tirées depuis 1950.

Voici comment j'ai procédé : La formule de POISSON

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-t_0)}} \frac{u(\xi, t_0)}{\sqrt{t-t_0}} d\xi$$

exprime, comme on sait bien, les valeurs de la fonction calorique  $u(x, t)$  dans la bande

$$t_0 < t < t_0 + \frac{1}{4K}$$

au moyen des valeurs que cette fonction prend sur la droite  $t = t_0$ . Faisons, dans la formule précédente, le petit changement de variable  $t = t_0 + h$ . La formule devient

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}} u(\xi, t-h) d\xi$$

et sous cette nouvelle forme elle met en évidence une propriété nouvelle des fonctions caloriques, une propriété d'invariance tout-à-fait analogue à la propriété exprimée par le théorème de GAUSS. Elle exprime que le second membre est indépendant de  $h$  et j'ai pu montrer en 1937, que cette propriété caractérise les fonctions caloriques.

C'est cette propriété qui m'a conduit à étudier la fonctionnelle représentée par l'intégrale précédente, dans le cas général où  $u$  n'est plus une fonction calorique, mais une fonction quelconque. Voici le résultat surprenant obtenu :

**12.** Désignons par  $v([u]; h)$  le second membre de l'égalité précédente, c'est-à-dire posons

$$v([u]; h) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}} \frac{u(\xi, t-h)}{\sqrt{h}} d\xi.$$

Faisons encore les hypothèses suivantes :



1°. La fonction  $u$  possède seulement les dérivées partielles nécessaires pour la formation de l'opérateur  $\square^{(p)}u$  et ces dérivées sont continues dans la bande considérée  $(0, t_1)$ .

2°. Il existe deux nombres positifs  $M$  et  $K$ , avec  $K < 1/4t_1$ , tels que

$$|D^m u| < M e^{Kx^2} \quad (m = 1, 2, \dots, 2p) .$$

Dans ces conditions, il existe un nombre  $\varepsilon_p(h)$ , tendant vers zéro avec  $h$ , tel que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4h}} \frac{u(\xi, t-h)}{\sqrt{h}} d\xi &= u(x, t) + \frac{h}{1!} \square u(x, t) + \\ &+ \frac{h^2}{2!} \square^2 u(x, t) + \dots + \frac{h^p}{p!} [\square^p u(x, t) + \varepsilon_p(h)] . \end{aligned}$$

$$\text{Si } \square^{p+1}u(x, t) \equiv 0, \text{ alors } \varepsilon_p(h) \equiv 0.$$

Ce développement où au second membre les opérateurs itérés  $\square u$ ,  $\square^2 u$ , ... apparaissent tout naturellement nous a donné l'idée d'une caractérisation intégrale des fonctions polycaloriques, en utilisant la même voie que j'avais suivie jadis pour les fonctions polyharmoniques. À cet effet, j'ai introduit la suite de fonctionnelles définies par récurrence de la façon suivante :

$$\mu_0(u; h) = v([u]; h) ,$$

$$\mu_s(u; h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h h' \mu_{s-1}(u; h') dh' \quad (s = 1, 2, \dots) .$$

Donnons encore une définition : Nous dirons que la fonction  $u$ , polycalorique d'ordre  $p$  dans la bande  $(0, t_1)$ , est à croissance complètement régulière dans cette bande, si l'on a dans cette bande

$$|u(x, t)| < M e^{Kx^2} ,$$

$$|\square^m u(x, t)| < M e^{Kx^2} \quad (m = 1, 2, \dots, p-1) ,$$

$M$  et  $K$  ayant les significations connues.

Avec cette définition, on peut énoncer le résultat fondamental suivant :

**13.** Toute fonction  $u(x, t)$  polycalorique d'ordre  $p$  dans la bande  $(0, t_1)$ , à croissance complètement régulière dans cette bande, vérifie, en tout point de la bande, la relation de moyenne



$$(6) \quad u(x, t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \dots & \frac{2}{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} & \dots & \left(\frac{2}{p+1}\right)^{p-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mu_0(u; h) & 1 & \dots & 1 \\ \mu_1(u; h) & \frac{2}{3} & \dots & \frac{2}{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{p-1}(u; h) & \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} & \dots & \left(\frac{2}{p+1}\right)^{p-1} \end{vmatrix}$$

Inversement, si  $u(x, t)$  est sommable dans la bande considérée, si l'on a

$$|u(x, t)| < Me^{Kx^2}$$

et si la relation (6) est vérifiée en chaque point de cette bande, alors  $u$  est nécessairement une fonction polycalorique d'ordre  $p$ , à croissance complètement régulière dans la bande considérée.

Une fois en possession d'un tel théorème de moyenne, il était possible d'envisager une étude de la structure des fonctions polycaloriques et des familles de telles fonctions. J'énoncerai ici quelques propriétés obtenues :

14. Si la fonction  $u(x, t)$  polycalorique d'ordre  $p$  dans le demi-plan  $t \leq t_1$ , à croissance complètement régulière dans ce demi-plan, est bornée dans ce demi-plan, alors elle se réduit nécessairement à une constante.

15. L'ensemble des fonctions polycaloriques d'ordre  $\leq p$  dans une bande  $(0, t_1]$ , est compact dans toute bande  $[\varepsilon, t_1]$  ( $\varepsilon > 0$ ), par rapport à la convergence uniforme.

16. Tout ensemble de fonctions polycaloriques d'ordre  $\leq p$ , également bornées dans  $[\varepsilon, t_1]$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , est compact dans cette bande.

17. Si la suite de fonctions  $\{u_n(x, t)\}$ , polycaloriques d'ordre  $\leq p$  dans la bande  $[0, t_1]$ , converge uniformément sur l'axe des  $x$ , s'il en de même des suites

$$\{\square u_n\}, \dots, \{\square^{p-1} u_n\}$$

et si les fonctions de cette suite sont à égale croissance complètement régulière (j'entends par là qu'il existe deux nombres positifs  $M$  et  $K < 1/4t_1$ , indépendants de  $n$ , tels que l'on ait

$$|\square^k u_n(x, t)| < Me^{Kx^2} \quad \begin{pmatrix} n = 1, 2, \dots \\ k = 0, 1, \dots, p-1 \end{pmatrix}$$

dans la bande considérée), alors les suites

$$\{u_n\}, \{\square u_n\}, \dots, \{\square^{p-1} u_n\}$$

convergent uniformément dans toute bande  $[\varepsilon, t]$  ( $\varepsilon > 0$ ) vers

$$u, \square u, \dots, \square^{p-1} u,$$

$u$  étant une fonction polycalorique d'ordre  $\leq p$ .



Vous rencontrez à nouveau ici les principales propriétés des fonctions et des familles de fonctions harmoniques, cette fois-ci étendues aux fonctions polycaloriques.

J'ai pu aussi étendre aux fonctions polycaloriques, comme je l'avais fait jadis pour les fonctions polyharmoniques, la notion de fonctions sous-harmoniques, introduite dans la science par le prof. F. RIESZ. Dans la classe des fonctions  $u$ , ayant les dérivées partielles nécessaires à la formation de  $\square^p u$ , les fonctions sous-caloriques d'ordre  $p$  sont caractérisées par l'inégalité

$$(-1)^p \square^p u(x, t) \leq 0.$$

J'arrêterai là l'exposition des résultats obtenus.

Il me reste à faire quelques remarques d'ordre général sur des problèmes encore non résolus dans cette théorie.

Il y a tout d'abord le problème de la soit dite «analyticité parabolique». Dans un travail antérieur, j'avais défini «l'analyticité hyperbolique». Il y a, enfin, l'analyticité classique des fonctions de variables réelles. La confrontation de ces trois notions fait ressortir une base commune aux trois espèces d'analyticité, que je voudrais souligner ici, comme première conclusion de ma conférence.

Dire qu'une fonction d'une variable réelle est analytique en un certain intervalle, c'est dire que cette fonction est développable, en chaque point de cet intervalle en une série convergente de puissances d'une certaine fonction, en l'espèce  $x$  ou  $x - a$ , les coefficients étant des solutions de l'équation

$$\frac{du}{dx} = 0.$$

Dire qu'une fonction de deux variables réelles est hyperboliquement analytique, c'est dire que cette fonction est développable en une série convergente de puissances d'une certaine fonction, en l'espèce  $(x - a)(y - b)$ , les coefficients de cette série étant des solutions de l'équation

$$Du = 0.$$

L'analyticité parabolique d'une fonction  $u(x, t)$  a été définie plus haut comme la propriété d'être développable en une série convergente de puissances d'une certaine fonction, à savoir  $t - a$ , les coefficients étant des solutions de l'équation

$$\square u = 0.$$

Il semblerait qu'il manque un chaînon à notre chaîne. Qu'est-ce que pourrait bien être l'analyticité elliptique? Mais ce chaînon a déjà été forgé en 1937 par mon collègue N. CIORANESCU qui a montré que toute fonction *analytique* réelle de deux variables peut être développée en une série de puissances de la fonction particulière

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$



les coefficients étant des solutions de l'équation

$$\Delta u = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire des fonctions harmoniques, et réciproquement.

Vous voyez donc que dans chaque cas la fonction particulière  $f$  qui intervient dans le développement en série par ses puissances successives est telle que l'équation  $f = 0$  constitue l'ensemble des lignes caractéristiques de l'opérateur différentiel considéré, tandis que les coefficients du développement sont des solutions de l'équation obtenue en égalant cet opérateur à zéro. Cela suggère un problème général, à savoir le problème d'une analyticité par rapport à un opérateur différentiel donné, mettons un opérateur linéaire, problème qui engloberait les quatre cas particuliers signalés plus haut.

Enfin, un autre problème qui mériterait d'être approfondi, serait le problème des singularités des classes de fonctions présentées ici.

Je ne puis terminer cette conférence sans remercier de tout coeur mes collègues mathématiciens de Budapest, et aussi ceux de Szeged, dont l'accueil si chaleureux m'a fait presque oublier que j'ai passé la frontière de mon pays. Je conserverai de mon séjour, hélas si brève à Budapest, et à Szeged, l'image précieuse et réconfortante d'une ardeur toujours jeune, d'une application très sérieuse au travail de la recherche mathématique. C'est là, je pense, l'enseignement le plus précieux que j'ai reçu ici, et que je ne tarderai pas de transmettre à mes collègues roumains.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. NICOLESCU : *Les fonctions polyharmoniques*. Hermann, Paris, 1936. („Actualités Scientifiques et Industrielles”)
- [2] M. NICOLESCU : «Sur l'équation de la chaleur». *Commentarii Mathematici Helvetici* **10** (1937-38) 3 — 17.
- [3] M. NICOLESCU : «L'équation itérée de la chaleur.» *Studii si cercetari Matematice* **5** (1954) 243 — 332.
- [4] S. TELEMAN : «La méthode de la projection orthogonale et les deux premiers problèmes de la théorie de l'élasticité.» *Bulletin Scientifique de l'Académie de R. P. R.* **7** (1955) 105 — 125.

ELLIPTIKUS VAGY HIPERBOLIKUS TÍPUSÚ PARCIÁLIS DIFFERENCIÁL-  
EGYENLETEK MEGOLDÁSAINAK SZERKEZETE

M. NICOLESCU

## Kivonat

A dolgozat a szerzőnek az iterált Laplace-féle differenciálegyenlet és az iterált hővezetési differenciálegyenlet megoldásaira vonatkozó, már közel harminc éve folyó vizsgálatairól nyújt vázlatos áttekintést.

Az első paragrafus poliharmonikus függvényekkel foglalkozik. Az  $n$ -változós  $u$  függvényt  $p$ -edrendű poliharmonikus függvénynek nevezzük, ha kielégíti a

$$\Delta Pu = 0$$



differenciálegyenletet. E differenciálegyenlet teljesülése helyett lehet az  $n$ -változós  $p$ -edrendű poliharmonikus függvényeket egy integrális tulajdonsággal is jellemezni. Ez az integrális tulajdonság általánosítása a közönséges harmonikus függvényekre vonatkozó GAUSS-féle gömbi átlagérték-tételnek (lásd az 1. tételt). E jellemzés birtokában sikerült számos, harmonikus függvényekre vonatkozó tételt (pl. LIOUVILLE tételét, HARNACK-féle tételeket) poliharmonikus függvényekre kiterjeszteni (lásd a 2.—5. tételeket).

Két további tétel a poliharmonikus függvények szinguláris hely körüli kifejtésének pontos alakját adja meg (a 6. és 7. tétel).

Az első paragrafus a poliharmonikus függvények integrális jellemzésére vonatkozó tétel egy, S. TELEMANTÓL származó élesítésével zárul (lásd a 8. tételt).

A második paragrafus az úgynevezett polikalorikus függvények elméletével foglalkozik. Egy  $u(x_1, \dots, x_n, t)$  függvényt  $p$ -edrendű polikalorikus függvénynek nevezzünk, ha  $u$  kielégíti a

$$\square^p u \equiv \left( \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right)^p u = 0$$

differenciálegyenletet.

Erre a differenciálegyenletre vonatkozó két kerületérték-probléma explicite megoldható. Mindkét esetben  $u$ -t a  $0 < t < t_1$  sávon keressük. Az első esetben adva van  $u, \partial u / \partial t, \dots, \partial^{p-1} u / \partial t^{p-1}$ ; a második esetben  $u, \square u, \dots, \square^{p-1} u$ . A kapott megoldások a jól ismert Poisson-formula általánosítását jelentik (lásd a 10. és 11. tételt).

Az  $n$  hely-változós  $p$ -edrendű polikalorikus függvények is jellemezhetők integrális tulajdonsággal (lásd a 13. tételt). Ez az integrális jellemzés megint számos olyan tételhez vezet el, amelyek harmónikus függvényekre vonatkozó tételek analogonjai (lásd a 14.—17. tételeket).

## СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ИЛИ ГИПЕРВОЛИЧЕСКОГО ТИПА

M. NICOLÉSCU

### Резюме

Работа дает схематический обзор почти тридцатилетних исследований автора относительно решений полигармонического уравнения и итерированного уравнения теплопроводности.

Первый параграф занимается полигармоническими функциями. Функция  $u$   $n$  переменных называется полигармонической функцией  $p$ -ого порядка, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta^p u = 0$$

Вместо выполнения этого дифференциального уравнения можно характеризовать полигармонические функции  $n$  переменных  $p$ -ого порядка также некоторым интегральным свойством. Это интегральное свойство есть обобщение относящейся к гармоническим функциям теоремы GAUSS о шаровом среднем значении. (см. Теорему 1.) С помощью этой характеристики удалось распространить на полигармонические функции ряд теорем, относящихся к гармоническим функциям (например, теорему LIOUVILLE, теоремы HARNACK) (см. Теоремы 2.—5.)

Две дальнейшие теоремы дают точную форму разложения полигармонических функций в окрестности сингулярной точки (Теоремы 6. и 7.).

Первый параграф заканчивается данным S. TELEMAN обострением теоремы, относящейся к интегральной характеристике гармонических функций (Теорема 8.).



Второй параграф занимается теорией так называемых поликалорических функций. Функция  $u(x_1, \dots, x_n, t)$  называется поликалорической функцией  $p$ -ого порядка, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\square^p u \equiv \left( \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right)^p u = 0.$$

Относящиеся к этому уравнению две граничные задачи могут быть решены явным образом. В обоих случаях  $u$  ищется в полосе  $0 < t < t_1$ . В первом случае даны  $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{p-1} u}{\partial t^{p-1}}$ , во втором случае  $u, \square u, \dots, \square^{p-1} u$ . Полученные решения являются обобщением хорошо известной формулы Poisson (см. Теоремы 10. и 11.).

Поликалорические функции  $n$  переменных места  $p$ -ого порядка также могут характеризоваться интегральным свойством (см. теорему 13.). Эта интегральная характеристика снова приводит к ряду теорем, являющихся аналогами теорем, относящихся к гармоническим функциям (см. Теоремы 14.—17.).







# REMARK ON THE THEORY OF QUASIANALYTIC FUNCTION-CLASSES

PAUL TURÁN

Investigating the solubility and uniqueness-problems of the heat-equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

GEVRAÏ and HADAMARD were led to the following question in 1912:

*What are the necessary and sufficient conditions for the sequence  $M_n$  so that if  $f_1(x)$  and  $f_2(x)$  are infinitely often derivable for  $a \leq x \leq b$  with*

$$(1) \quad \max_{a \leq x \leq b} |f_j^{(n)}(x)| \leq k_j^n M_n, \quad j = 1, 2; \quad n = 0, 1, \dots$$

$$(k_j = k_j(f)) \text{ and with an } a < x_0 < b$$

$$(2) \quad f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0), \quad n = 0, 1, \dots$$

then for  $a \leq x \leq b$

$$f_1(x) \equiv f_2(x)$$

follows?

Clearly the functions analytical for  $a \leq x \leq b$  form such a class, with

$$M_n = n!$$

This question was after the first results of DENJOY completely solved only in 1926 by CARLEMAN.

The problem of quasianalyticity can be formulated more generally as follows. We are asking for possibly large classes  $A$  of functions in  $[a, b]$  with the property that if  $f_1(x)$  and  $f_2(x)$  from  $A$  „in the neighbourhood of  $x = x_0$  ( $a < x_0 < b$ ) identically behave”, then for the whole interval  $a \leq x \leq b$

$$f_1(x) = f_2(x)$$

holds „essentially”. In the class of infinitely often derivable functions (2) is



a possible way of realising the „identical behaviour in the neighbourhood of  $x = x_0$ ”. The necessity of other interpretation of the phrase „identical behaviour in the neighbourhood” emerged from the investigations of S. BERNSTEIN and S. MANDELBROJT; the significance of such classes is indicated by the fact that they contain also nowhere derivable functions. Since our remarks refer to quasianalyticity in MANDELBROJT's sense, we shall confine ourselves to that. In his formulation „identical behaviour of  $f_1(x)$  and  $f_2(x)$  in the neighbourhood of  $x = x_0$ ” means that with a fixed  $\alpha > 0$

$$(3) \quad \liminf_{h \rightarrow +0} e^{h^{-\alpha}} \int_{x_0-h}^{x_0} |f_1(t) - f_2(t)| dt < \infty$$

and the phrase „ $f_1(x)$  is essentially identical with  $f_2(x)$  for  $a \leq x \leq b$ ” means that  $f_1(x) = f_2(x)$  almost everywhere there. MANDELBROJT proved that the class of the functions  $f(x)$  with the period  $2\pi$  having the Fourier-expansion

$$f(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos m_j x + b_j \sin m_j x)$$

forms a quasianalytical class in his sense if

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_j^{-\delta} < \infty$$

with  $\delta < \alpha/(\alpha + 1)$  and this is no longer true (see S. MANDELBROJT and N. WIENER [2]), when  $\delta = \alpha/(\alpha + 1)$ . His theorem was extended to functions

$$(4) \quad f(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos \lambda_j x + b_j \sin \lambda_j x)$$

with increasing  $\lambda$ -sequence by B. J. LEVIN [3].

In MANDELBROJT's theorem the class was characterized by the Fourier-exponents of the function. In this case of Bernstein-quasianalyticity N. LEVINSON [4] proved a theorem, which amounts to a characterisation of the corresponding class by the Fourier-coefficients. So the question arose whether or not a quasianalytical class in MANDELBROJT's sense can be characterized by the Fourier-coefficients of its functions. I solved this problem (see [5], [6]) which is in a sense dual to that of MANDELBROJT, even among the functions (4), in the case when we have a little „weaker” quasianalyticity-definition than MANDELBROJT's. More exactly, I proved the following theorem.

Let  $\alpha > 0$  be fixed and

$$(5) \quad f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{it_j x}$$



with arbitrary real exponents  $t_j$  so that

$$(6) \quad \limsup_{\omega \rightarrow \infty} e^{\frac{2}{a} \omega \log \omega} \sum_{j > \omega} |a_j| < \infty.$$

If for any two functions  $f_1(x)$  and  $f_2(x)$  of this class we have for a real  $x_0$

$$(7) \quad \liminf_{h \rightarrow +0} e^{h^{-a}} \max_{x_0 - h \leq x \leq x_0} |f_1(x) - f_2(x)| < \infty$$

then  $f_1(x) = f_2(x)$  on the whole real axis.

The main tool of my proof was the inequality

$$(8) \quad \max_{a \leq x \leq a+d} \left| \sum_{j=1}^n b_j e^{i\mu_j x} \right| \geq \left( \frac{d}{6(a+d)} \right)^n \left| \sum_{j=1}^n b_j \right|$$

for any real  $\mu_j$ -s, complex  $b_j$ -s and positive  $a$  and  $d$ . To prove the theorem (5)—(6)—(7) with MANDELBROJT's quasianalitycity (3) instead of (7) one would need an inequality similar to (8) but replacing the left side by

$$(9) \quad \int_a^{a+d} \left| \sum_{j=1}^n b_j e^{i\mu_j x} \right| dx$$

a problem of independent interest.

The theorem (5)—(6)—(7) raises the further question whether or not the condition (6) can be relaxed. The aim of this note is to show that (6) cannot be replaced by the weaker condition

$$(10) \quad \limsup_{\omega \rightarrow \infty} e^{\omega^{1-\varepsilon}} \sum_{j > \omega} |a_j| < \infty,$$

however small we choose the positive number  $\varepsilon$ . This shows that our theorem is not far from being best-possible.

To show this it is sufficient to give an  $f_0(x)$  of the form (5) satisfying (10), further

$$(11) \quad \liminf_{h \rightarrow +0} e^{h^{-a}} \max_{-h \leq x \leq 0} |f_0(x)| < \infty$$

and  $f_0(x) \not\equiv 0$ . For this sake we choose fixing our  $a$  the parameter  $\beta$  so large that

$$(12) \quad \beta = 2 \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \quad (> \max(2, a); \quad \beta \text{ is even})$$

and consider

$$(13) \quad f_0(x) = \exp \left( -\frac{1}{\sin^\beta x} \right).$$



Then  $f_0(x) \not\equiv 0$ , is of the form (5) and (11) is obviously fulfilled ; thus we have only to verify (10). Hence we have to investigate the sum

$$(14) \quad \sum_{j > \omega} \left| \int_0^{\pi} \exp \left( -\frac{1}{\sin^{\beta} x} \right) \cos jx \, dx \right| \equiv \sum_{j > \omega} |I_j|.$$

For a fixed index  $j$  we integrate partially  $\mu$  times,  $\mu$  being determined only later. This gives evidently

$$|I_j| \leq \frac{\pi}{j^{\mu}} \max_{0 \leq x \leq \pi/2} \left| \frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}} e^{-\frac{1}{\sin^{\beta} x}} \right|.$$

Using Cauchy's estimation with the circle  $|z-x| = x/40\beta$  we obtain

$$(15) \quad \begin{aligned} |I_j| &\leq \pi \frac{\mu!}{j^{\mu}} \max_{0 \leq x \leq \pi/2} \left\{ \left( \frac{40\beta}{x} \right)^{\mu} \max_{|z-x|=x/40\beta} \exp \left[ -\operatorname{Re} \left( \frac{1}{\sin^{\beta} z} \right) \right] \right\} = \\ &= \pi \frac{\mu!}{j^{\mu}} \max_{0 \leq x \leq \pi/2} \left\{ \left( \frac{40\beta}{x} \right)^{\mu} \max_{|z-x|=x/40\beta} e^{-\frac{\cos(\beta \arg \sin z)}{|\sin z|^{\beta}}} \right\}. \end{aligned}$$

But for  $z = \xi + i\eta$

$$|\arg \sin z| = \left| \operatorname{arc tg} \frac{\cos \xi (e^{\eta} - e^{-\eta})}{\sin \xi (e^{\eta} + e^{-\eta})} \right|;$$

since in our case

$$|\eta| \leq \frac{x}{40\beta}, \quad x \left( 1 - \frac{1}{40\beta} \right) \leq \xi \leq x \left( 1 + \frac{1}{40\beta} \right)$$

and  $0 \leq x \leq \pi/2$ , we have for all positive sufficiently small  $\varepsilon$

$$\left| \cotg \xi \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{e^{\eta} + e^{-\eta}} \right| \leq \frac{1}{\pi} \frac{3\eta}{\xi} \leq 3\pi \frac{x}{40\beta} \frac{1}{x \left( 1 - \frac{1}{40\beta} \right)} < \frac{\pi}{10\beta}.$$

Thus

$$(16) \quad \left| \operatorname{arc tg} \left( \cotg \xi \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{e^{\eta} + e^{-\eta}} \right) \right| \leq \frac{\pi}{10\beta}$$

$$\cos(\beta \arg \sin z) > \frac{1}{2}.$$



Further we have for our  $z$ -s with a suitable positive numerical  $c_1 (> 1)$

$$|\sin z| \leq c_1 |z| \leq c_1 \left(1 + \frac{1}{20\beta}\right) x$$

i. e. from (15) and (16) we have

$$(17) \quad |I_j| \leq \mu! \pi \cdot \left(\frac{40\beta}{j}\right)^\mu \max_{x \geq 0} \left\{ \frac{1}{x^\mu} \exp\left(-\frac{1}{2c_1^\beta \left(1 + \frac{1}{20\beta}\right)^\beta x^\beta}\right) \right\}.$$

Putting

$$\frac{1}{2c_1^\beta \left(1 + \frac{1}{20\beta}\right)} = c_2(\beta)$$

the maximum of the function

$$x^{-\mu} \exp\left(-\frac{c_2(\beta)}{x^\beta}\right)$$

for  $x \geq 0$  is evidently assumed at

$$x = \left(\frac{\beta c_2(\beta)}{\mu}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

and its value is

$$\left(\frac{\mu}{c_2(\beta) \cdot \beta}\right)^{\frac{\mu}{\beta}} e^{-\frac{\mu}{\beta}}.$$

Since roughly

$$\mu! < \mu^\mu,$$

we have from (17)

$$\begin{aligned} |I_j| &\leq \pi \left(\frac{40\beta e^{-\frac{1}{\beta}}}{j}\right)^\mu \mu^\mu \left(\frac{\mu}{\beta c_2(\beta)}\right)^{\frac{\mu}{\beta}} = \\ &= \pi \left(\frac{40\beta e^{-\frac{1}{\beta}}}{\beta^{\frac{1}{\beta}} c_2(\beta)^{\frac{1}{\beta}}}\right)^\mu \cdot \frac{1}{j} \cdot \mu^{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\mu} = \pi \left(\frac{1}{j} e^{c_3(\beta)} \mu^{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\mu}\right)^\mu \end{aligned}$$

with a positive  $c_3(\beta)$ . Now choosing

$$\mu = \mu_0 \equiv \left[ e^{-\frac{2c_3(\beta)}{1+1/\beta}} \cdot j^{\frac{1}{1+1/\beta}} \right]$$



we obtain the estimation

$$|I_j| \leq \pi e^{-c_3(\beta)\mu_0} \leq \pi \exp \left\{ -c_3(\beta) \left( e^{-\frac{2c_3(\beta)}{1+\frac{1}{\beta}} \cdot j^{\frac{\beta}{1+\beta}}} - 1 \right) \right\} =$$

$$= c_4(\beta) \exp \left\{ -c_5(\beta) j^{\frac{\beta}{1+\beta}} \right\} < c_6(\varepsilon) \exp \left\{ -c_7(\varepsilon) \cdot j^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \right\}$$

with positive  $c_6(\varepsilon)$  and  $c_7(\varepsilon)$ . From this (10) evidently follows.

It seems to be possible and would be of interest to construct examples still nearer to our theorem than  $f_0(x)$ . Possibly

$$f_1(x) = e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

would furnish a better example but this would need a more suitable analysis.

#### REFERENCES

- [1] S. MANDELBROJT : *Séries de Fourier et classes quasianalitiques*. Gauthier-Villars, Paris, 1935.
- [2] S. MANDELBROJT—N. WIENER : „Sur les séries de Fourier lacunaires. Théorèmes directs.” *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)* **203** (1936) 34—36. (Errata : p. 359.)
- [3] Б. Я. ЛЕВИН : „О некоторых экстремальных целых функций конечной степени”. *Доклады Академ Наук СССР* **65** (1949) 605—608.
- [4] N. LEVINSON : „A theorem relating nonvanishing and analytic functions.” *Journal of Mathematics and Physics* **16** (1938) 185—190.
- [5] P. TURÁN : „Sur le théorie des fonctions quasianalytiques”. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)* **224** (1947) 1750—1752.
- [6] P. TURÁN : *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.

#### MEGJEGYZÉS A KVÁZI-ANALITIKUS FÜGGVÉNYOSZTÁLYOK ELMÉLETÉHEZ

TURÁN P.

##### Kivonat

A szerző egy régebbi dolgozatában (lásd : [5] és [6]) a következő tételt bizonyította be :

Ha fix  $\alpha > 0$  mellett az

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{it_j x}$$

függvényeknek  $A_\alpha$ -osztálya olyan, hogy

$$(1) \quad \limsup_{\omega \rightarrow \infty} e^{\frac{2}{\alpha} \omega \log \omega} \sum_{j \geq \omega} |a_j| < \infty ,$$

akkor abból, hogy egy valós  $x_0$ -ra

$$\liminf_{h \rightarrow 0} e^{h-\alpha} \max_{x_0-h \leq x \leq x_0} |f_1(x) - f_2(x)| < \infty ,$$

következik, hogy  $f_1(x) = f_2(x)$  minden  $x$ -re.



E dolgozatban a szerző azon kérdéssel foglalkozik, hogy az (1) feltétel mennyire enyhíthető. Mint alkalmas példán megmutatja, (1)-et a nem lényegesen gyengébb

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} e^{\omega^{1-\varepsilon}} \sum_{j \geq \omega} |a_j| < \infty$$

feltétellel helyettesítve, ahol  $\varepsilon$  tetszőleges kis fix pozitív szám, a tétel már nem lesz igaz.

# ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРИИ КЛАССОВ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

P. TURÁN

## Резюме

Автор в одной из своих предыдущих работ (см. [5] и [6]) доказал следующую теорему:

Если при фиксированном  $\alpha > 0$  класс  $A_\alpha$  состоит из функций

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{it_j x}$$

для которых

$$(1) \quad \limsup_{\omega \rightarrow \infty} e^{\frac{2}{\alpha} \omega \log \omega} \sum_{j \geq \omega} |a_j| < \infty$$

то из того, что для некоторого вещественного  $x_0$

$$\liminf_{h \rightarrow +0} e^{h^{-\alpha}} \max_{x_0 - h \leq x \leq x_0} |f_1(x) - f_2(x)| < \infty,$$

следует, что  $f_1(x) = f_2(x)$  при всех  $x$ .

В настоящей работе автор занимается следующим вопросом: насколько может быть ослаблено условие (1)? Как он показывает на подходящем примере, если заменить условие (1) незначительно более слабым условием

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} e^{\omega^{1-\varepsilon}} \sum_{j \geq \omega} |a_j| < \infty$$

где любое сколь угодно малое положительное число, теорема уже не будет верна.







# STABILIS VALÓSZÍNŰSÉG-SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYEKRE FENNÁLLÓ PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK ÉS ALKALMAZÁSAIK

MEDGYESSY PÁL

## Bevezetés

Mint ismeretes, egy  $F(x)$  eloszlásfüggvényt *stabilis*nak nevezünk, ha tetszőleges valós  $a_1 > 0$ ,  $b_1$ ,  $a_2 > 0$ ,  $b_2$  esetén

$$F(a_1x + b_1) * F(a_2x + b_2) = F(ax + b)$$

ahol  $a (> 0)$  és  $b$  az  $a_1, a_2, b_1$  és  $b_2$  értékeitől függő valós állandók, a  $*$  pedig a konvolúció műveletét jelenti.

LÉVY és HINCSIN egy híres tétele szerint ([1], 171. oldal) az így definiált stabilitás szükséges és elégséges feltétele, hogy  $F(x)$  karakterisztikus függvénye,  $\varphi(t)$ ,

$$\varphi(t) = \exp\{i\gamma t - c|t|^\alpha [1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)]\}$$

alakú legyen, ahol  $\alpha, \beta, \gamma, c$  állandók;  $\gamma$  tetszőleges valós szám,  $|\beta| \leq 1$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $c \geq 0$  és

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}, & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log |t|, & \text{ha } \alpha = 1. \end{cases}$$

$c \neq 0$  esetén egy stabilis eloszlásfüggvény minden  $x$  pontban tetszőleges sokszor differenciálható, és a hozzátartozó  $f(x, c)$  „stabilis sűrűségfüggvényt” az

$$\begin{aligned} f(x, c) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \varphi(t) dt = \\ (0.1) \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \exp\{i\gamma t - c|t|^\alpha [1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)]\} dt \end{aligned}$$

inverz Fourier-transzformált adja meg ([1], 189. oldal).



Mivel  $f(x, c)$  explicit alakja jó ideig csak az  $\alpha, \beta, \gamma, c$  paraméterek igen speciális választása esetén volt ismeretes<sup>1)</sup>, az utóbbi időben több szerző foglalkozott  $f(x, c)$  tulajdonságainak, illetve aszimptotikus viselkedésének a (0.1) előállítással támaszkodó vizsgálatával ([2]—[9]). Ennek különös jelentőséget ad, hogy mindmáig igazolatlan az a sejtés, hogy *bármely* stabilis sűrűségfüggvénynek csak egyetlen maximuma van.

Az említett vizsgálatok részben arra is irányultak, hogy bizonyos esetekben (racionális  $\alpha$ ) közönséges differenciálegyenletet találjanak  $f(x, c)$ -re. Ez sikerült is ([5], [7]): a differenciálegyenletek azonban igen bonyolultak és nem is lineárisak.

*Ebben a dolgozatban megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett  $f(x, c)$  mint  $x$  és  $c$  függvénye eleget tesz egy konstans együtthatós lineáris parciális differenciálegyenletnek.* Ennek alkalmazásaként egy új és az eddigieknél ([10]—[13]) szélesebb hatókörű eljárást mutatunk be egy olyan sűrűségfüggvénykeverék komponenseinek meghatározására, amely stabilis sűrűségfüggvények konstans súlyokkal vett szuperpozíciójaként írható fel.

## 1. §.

Eredményünket a következő tétel foglalja magában:

**Tétel:** Az

$$(1.1) \quad f(x, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ i(\gamma - x)t - c|t|^{\alpha} [1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)] \} dt$$

*stabilis sűrűségfüggvény (amelyben  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $c \geq 0$ ,  $|\beta| \leq 1$ ) racionális  $\alpha$  ( $\alpha = m/n$ ,  $(m, n) = 1$ ) esetén és azon feltétel mellett, hogy  $\omega(t, \alpha) = \operatorname{tg}(\pi \alpha/2)$ , ha  $\alpha \neq 1$ , de  $\alpha = 1$ -nél  $\beta = 0$ , eleget tesz egy*

$$K_1 \frac{\partial^{b_1+a_1} f}{\partial c^{b_1} \partial x^{a_1}} + K_2 \frac{\partial^{b_2+a_2} f}{\partial c^{b_2} \partial x^{a_2}} + K_3 \frac{\partial^{b_3+a_3} f}{\partial c^{b_3} \partial x^{a_3}} = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$$

*típusú konstans együtthatós, lineáris parciális differenciálegyenletnek, ahol az  $a_i, b_i, K_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) konstansok  $m, n$  és  $\beta$  bizonyos kifejezései. Az is elérhető, hogy legfeljebb egy vegyes parciális derivált szerepeljen csak.*

Egyes speciális esetekben  $K_1 = 0$  lesz, és elérhető, hogy a differenciálegyenletben megmaradó deriváltak egyike sem vegyes.

### Bizonyítás:

Mivel  $f(x, c)$  valós, integrál-előállításában elég az integrandus valós részét tekinteni. Könnyen belátható, hogy ez egyszersmind páros függvény is: ennek alapján átalakítva az integrált, a következőt kapjuk:

<sup>1)</sup>  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 0$ ;  $\gamma, c \neq 0$  tetszőleges értékeinél pl. a normális sűrűségfüggvényt kapjuk meg.



$$(1.2) \quad f(x, c) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ct^a} \cos\{(x - \gamma)t + Bct^a\} dt,$$

ahol (feltételeink szerint)

$$B = \begin{cases} \beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2), & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ \beta \frac{2}{\pi} \log t & \text{ha } \alpha = 1. \end{cases}$$

Az integrandust deriválva, képezzük formálisan  $f(x, c)$   $x$ , illetve  $c$  szerinti parciális deriváltjait. Az így kapott integrandusok — éppúgy, mint az eredeti — mindig folytonosak, integráljaik pedig egyenletesen konvergensek az éppen szereplő paraméter minden értékénél, következésképpen az integráljel alatti deriválások jogosultak.  $x$  szerint  $a$ -szor,  $c$  szerint  $b$ -szer deriválva  $f(x, c)$ -t összevonás, átalakítás után végülis a következőt kapjuk:

$$(1.3) \quad \frac{\partial^{b+a} f}{\partial c^b \partial x^a} \equiv D(a, b) = \\ = \frac{(-1)^b}{\pi} \int_0^{\infty} (1 + B^2)^{b/2} e^{-ct^a} t^{ab+a} \cos\left\{(x - \gamma)t + Bct^a + \frac{a\pi}{2} - b \operatorname{arc} \operatorname{tg} B\right\} dt.$$

$$(|\operatorname{arctg} B| \leq \pi/2).$$

Ha tudunk találni olyan  $(a_i, b_i)$  számpárokat, hogy a  $D(a_i, b_i)$  kifejezések valamilyen lineáris kifejezése 0 legyen, parciális differenciálegyenletet kapunk  $f(x, c)$ -re.

A koszinuszos tényezőt átalakítva:

$$D(a, b) = \\ = \frac{(-1)^b}{\pi} \int_0^{\infty} (1 + B^2)^{b/2} e^{-ct^a} t^{ab+a} \cos\{(x - \gamma)t + Bct^a\} \cos\left\{\frac{a\pi}{2} - b \operatorname{arc} \operatorname{tg} B\right\} dt - \\ - \frac{(-1)^b}{\pi} \int_0^{\infty} (1 + B^2)^{b/2} e^{-ct^a} t^{ab+a} \sin\{(x - \gamma)t + Bct^a\} \sin\left\{\frac{a\pi}{2} - b \operatorname{arc} \operatorname{tg} B\right\} dt.$$

Az előbbi feltétel teljesüléséhez oly  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$  párokat kell keresnünk, melyeknél az egyes integrálok (amelyek  $x$  és  $c$  függvényei!) csak  $x$ -től és  $c$ -től független faktorokban különböznek egymástól. Ehhez mindenesetre elégséges a következő feltételek teljesülése:

$$(1.4) \quad \alpha b_1 + a_1 = \alpha b_2 + a_2 = \dots$$

és  $B$  nem függ  $t$ -től, vagyis  $\alpha = 1$  esetén  $\beta = 0$ .



Utóbbi ugyanazt az általánosságot biztosítja tárgyalásunknak, mint amelyet az  $f(x, c)$ -re szóló közönséges differenciálegyenlet eddig legáltalánosabb alakjánál ([7]) láthatunk.

*A továbbiakban ezen megszorításokra specializálódunk.* — Ekkor a csupán  $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots$  konstansokat tartalmazó tényezők az integrandusból kiemelhetők, és így ( $i = 1, 2, \dots$ )

$$D(a_i, b_i) = A(a_i, b_i) C(a_i, b_i) - B(a_i, b_i) S(a_i, b_i),$$

ahol

$$A(a_i, b_i) = \frac{(-1)^{b_i} (1 + B^2)^{b_i/2}}{\pi} \cos \left( a_i \frac{\pi}{2} - b_i \operatorname{arc} \operatorname{tg} B \right);$$

$$B(a_i, b_i) = \frac{(-1)^{b_i} (1 + B^2)^{b_i/2}}{\pi} \sin \left( a_i \frac{\pi}{2} - b_i \operatorname{arc} \operatorname{tg} B \right);$$

$$C(a_i, b_i) = \int_0^\infty e^{-ct^a} t^{ab_i + a_i} \cos \{(x - \gamma)t + Bct^a\} dt;$$

$$S(a_i, b_i) = \int_0^\infty e^{-ct^a} t^{ab_i + a_i} \sin \{(x - \gamma)t + Bct^a\} dt.$$

Ha

$$ab_1 + a_1 = ab_2 + a_2 = ab_3 + a_3,$$

akkor

$$C(a_1, b_1) = C(a_2, b_2) = C(a_3, b_3)$$

(és hasonlóan a  $S$  mennyiségekre is). Ezen  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$  értékpárookra felírva a  $D(a_1, b_1), \dots$  stb. kifejezéseket, a három egyenlőségből a  $C$  és  $S$  mennyiségek kiküszöbölhetők.

Ennek a végeredménye

$$(1.5) \quad \sin \left\{ (a_2 - a_3) \frac{\pi}{2} - (b_2 - b_3) \operatorname{arc} \operatorname{tg} B \right\} \neq 0$$

esetén

$$(1.6) \quad \frac{\sin \left\{ (a_2 - a_3) \frac{\pi}{2} - (b_2 - b_3) \operatorname{arc} \operatorname{tg} B \right\}}{(-1)^{b_1} (1 + B^2)^{b_1/2}} D(a_1, b_1) +$$

$$+ \frac{\sin \left\{ (a_3 - a_1) \frac{\pi}{2} - (b_3 - b_1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} B \right\}}{(-1)^{b_2} (1 + B^2)^{b_2/2}} D(a_2, b_2) +$$



$$+ \frac{\sin \left\{ (a_1 - a_2) \frac{\pi}{2} - (b_1 - b_2) \arctg B \right\}}{(-1)^{b_3} (1 + B^2)^{b_3/2}} D(a_3, b_3) \equiv \\ \equiv K_1 \frac{\partial^{b_1+a_1} f}{\partial c^{b_1} \partial x^{a_1}} + K_2 \frac{\partial^{b_2+a_2} f}{\partial c^{b_2} \partial x^{a_2}} + K_3 \frac{\partial^{b_3+a_3} f}{\partial c^{b_3} \partial x^{a_3}} = 0.$$

Ezzel megkaptuk a kívánt parciális differenciálegyenletet; erre azonban, mint lentebb látni fogjuk, még egy megkötés vonatkozik.

Vizsgáljuk meg, mi lesz

$$\sin \left\{ (a_2 - a_3) \frac{\pi}{2} - (b_2 - b_3) \arctg B \right\} = 0$$

esetén. Ez fennáll, ha

$$(a_2 - a_3) \frac{\pi}{2} - (b_2 - b_3) \arctg B = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

vagyis (1.4) mellett még az

$$(1.7) \quad a_2 \frac{\pi}{2} - b_2 \arctg B = a_3 \frac{\pi}{2} - b_3 \arctg B + k\pi$$

relációnak is eleget kell hogy tegyenek az  $(a_2, b_2)$  és  $(a_3, b_3)$  számpárok.

A továbbiakban legegyszerűbben így járhatunk el: Írjuk fel az (1.3) egyenlőséget olyan  $(a, b)$ -nek megfelelő  $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$  értékpárookra, amelyek az

$$\alpha q_1 + p_1 = \alpha q_2 + p_2$$

és

$$(1.8) \quad p_1 \frac{\pi}{2} - q_1 \arctg B = p_2 \frac{\pi}{2} - q_2 \arctg B + k\pi$$

feltételeknek egyaránt eleget tesznek (a  $B$ -re tett korábbi kikötést figyelembe véve!). Az integrandusban  $t$  kitevője mindkét értékpárnál ugyanaz, továbbá

$$\begin{aligned} & \cos \left\{ (x - \gamma) t + Bct^a + p_1 \frac{\pi}{2} - q_1 \arctg B \right\} = \\ & = \cos \left\{ (x - \gamma) t + Bct^a + p_2 \frac{\pi}{2} - q_2 \arctg B + k\pi \right\} = \\ & = (-1)^k \cos \left\{ (x - \gamma) t + Bct^a + p_2 \frac{\pi}{2} - q_2 \arctg B \right\}. \end{aligned}$$

Ezeket figyelembe véve, az  $x$ -et és  $c$ -t tartalmazó integrálok kiküszöbölhetők, s végül is a már csak két tagot tartalmazó

$$(1.9) \quad (-1)^{q_2} (1 + B^2)^{q_2/2} \frac{\partial^{q_1+p_1} f}{\partial c^{q_1} \partial x^{p_1}} - (-1)^{q_1} (1 + B^2)^{q_1/2} (-1)^k \frac{\partial^{q_2+p_2} f}{\partial c^{q_2} \partial x^{p_2}} = 0$$

parciális differenciálegyenletet kapjuk.



Vizsgáljuk most meg közelebbről, milyen értékeket vehetnek fel az  $(a_i, b_i)$ , illetve a speciális esetben a  $(p_i, q_i)$  számpárok. Ez azért fontos, mert kíváncsi, hogy differenciálegyenleteink rendjét (amelyet az előbbi számpárok értékei szabnak meg) a szóba jövő számpárok alkalmas választásával minimalissá tudjuk tenni, vagy legalábbis azt érjük el, hogy minél kevesebb vegyes parciális derivált szerepeljen.

(1.6) fennállása esetén olyan  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$ ,  $(a_3, b_3)$  értékpárok kellenek, amelyek kielégítik az

$$ab_1 + a_1 = ab_2 + a_2 = ab_3 + a_3$$

egyenletrendszer. Ebből mindjárt látható, hogy *csak racionális szám lehet, mondjuk  $m/n$ , ahol  $m$  és  $n$  relatív prímek.* Ezt a megkötést még hozzá kell fűznünk az (1.6) differenciálegyenlethez. Az  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$ , ... párok nyilván nemnegatív egész megoldásai az

$$ay + x \equiv \frac{m}{n}y + x = N \quad (= \text{konst.})$$

határozatlan egyenletnek.

Három különböző megoldás kell; *kössük ki, hogy ezek közt két olyan legyen, amelyeknél  $x$ , illetve  $y$  zérus: ekkor tudniillik (1.6)-ban csak egyetlen vegyes parciális derivált marad* (ami a megoldások szempontjából előnyös). Ekkor egyik megoldásnak  $x = 0$ -át, és ebből következőleg  $y = (n/m)N$ -et kell vennünk, vagyis  $N = Mm$  alakú és  $y = nM$ ; így azonban rögtön megadhatunk  $M + 1$  darab megoldást az  $x = im$ ,  $y = (M - i)n$  ( $i = 0, 1, \dots, M$ ) kifejezésekkel, s ezek közt az előírt másik  $y = 0$ ,  $x = mM$  megoldás is ott van.  $M = 2$ -nél még épp egy (harmadik) megoldás van ezeken kívül,  $x = m$ ,  $y = n$ .  $M = 2$ -nél tehát megkaphatjuk a három kívánt megoldást; ezek:

$x$	0	$m$	$2m$
$y$	$2n$	$n$	0

Ezeket fogjuk tehát az  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$ ,  $(a_3, b_3)$  párokként venni. (1.6) ekkor tehát

$$(1.10) \quad K_1 \frac{\partial^{2n} f}{\partial c^{2n}} + K_2 \frac{\partial^{m+n} f}{\partial c^n \partial x^m} + K_3 \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} = 0$$

alakú lesz. Megjegyezzük, hogy ha nem ragaszkodunk a tiszta parciális deriváltakhoz, esetleg olyan  $x$  és  $y$  megoldásokat is találhatunk, amelyeknél a deriváltak rendje alacsonyabb, mint egyenletünkben. — Ezt az egyenlettípust egyébként jelen problémánktól elvonatkoztatva vizsgálva, az eddigiek alapján mondhatjuk, hogy *egyik* megoldása pl. a kiindulási (1.2) függvény.

(1.9) esetében már bonyolultabb  $(p_1, q_1)$  és  $(p_2, q_2)$  meghatározása. Mint láttuk, fenn kell állnia az (1.8) alatti



$$(1.11) \quad \alpha q_1 + p_1 = \alpha q_2 + p_2$$

$$p_1 \frac{\pi}{2} - q_1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} B = p_2 \frac{\pi}{2} - q_2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} B + k\pi$$

összefüggéseknek.  $\alpha$  megint csak  $m/n$  alakú racionális szám lehet. Mint már korábban rögzítettük,  $B = \beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2) = \beta \operatorname{tg}(\pi m/2n)$ , ha  $m/n \neq 1$  és  $B = 0$ , ha  $m/n = 1$ .

Tekintsük egyelőre (anélkül, hogy az egyikre zérust kötnénk ki) a következő  $(p_1, q_1)$ ,  $(p_2, q_2)$  értékeket, amelyek kielégítik az  $\alpha q_1 + p_1 = \alpha q_2 + p_2$  egyenletet:

$$\begin{aligned} p_1 &= jm & p_2 &= lm \\ q_1 &= (M - j)n & q_2 &= (M - l)n \end{aligned}$$

( $M = 1, 2, \dots$ ;  $j, l = 0, \dots, M$ ;  $j \neq l$ ).

Ezek tartalmazzák azt a gyakorlatban kívánatos esetet is, amidőn az egyes értékpárokon belül mindig van 0.

$p_1, q_1, \dots$  értékeit beírva (1.11) második egyenlőségébe ( $m/n \neq 1$  mellett!) kapjuk, hogy fenn kell állania a következő összefüggésnek:

$$(1.12) \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \beta \operatorname{tg} \frac{\pi m}{2n} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{2k - (j - l)m}{(j - l)n}$$

(a jobboldal a  $[-\pi/2, +\pi/2]$  intervallumban mozoghat csak!).

Mivel csak a  $j - l$  különbség szerepel, vegyünk  $l = 0$ -t és  $j = M$ -et. Ezzel mindjárt teljesül az a megkötés is, hogy a szóhajó értékpáron belül mindig legyen 0.

(1.12) szükséges és  $l = 0$ ,  $j = M$  mellett elégséges feltétel is, így tehát kimondhatjuk:

Ha  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  és  $M = 1, 2, \dots$  valamilyen értékei mellett adott  $\alpha = m/n \neq 1$  és  $\beta$  paramétereknél teljesül az

$$(1.13) \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \beta \operatorname{tg} \frac{\pi m}{2n} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{2k - Mm}{Mn}$$

feltétel, a szereplő  $\alpha$  és  $\beta$  paraméterekkel rendelkező stabilis sűrűségfüggvény az (1.9) differenciálegyenletet fogja kielégíteni. Az ott szereplő paraméterek ekkor:

$$\begin{aligned} p_1 &= Mm & p_2 &= 0 \\ q_1 &= 0 & q_2 &= Mn. \end{aligned}$$

Egyszerűen belátható, hogy  $m/n = 1$  esetén is áll a kritérium, ha ekkor baloldalát 0-nak definiáljuk.



(1.9) ekkor tehát

$$(1.14) \quad (-1)^{Mn} (1 + B^2)^2 \frac{\partial^{Mn} f}{\partial x^{Mm}} - (-1)^k \frac{\partial^{Mn} f}{\partial c^{Mn}} = 0$$

alakú lesz.  $M$ -et és  $k$ -t az (1.13) feltétel teljesülése határozza meg: persze igyekszünk úgy választani meg őket, hogy minél alacsonyabb rendű deriváltakat kapjunk, figyelembe véve, hogy  $|(2k - Mm)/Mn| \leq 1$  kell, hogy legyen. (Ha nem ragaszkodunk tiszta parciális deriváltakhoz, vagyis az általános  $p_1, q_1, p_2, q_2$  megoldásokat használjuk, esetleg alacsonyabb rendű differenciálegyenletet is kaphatunk.)

Rögtön következik, hogy  $\beta = 0$  esetén mindig (1.14) szerepel; ekkor tudniillik a baloldal 0, és a jobboldal 0-t ad pl. bármely páros  $M$ -nél, ha ugyanakkor  $k$ -t  $Mm/2$ -nek választjuk; persze, lehet, hogy esetleg egyes páratlan  $M$ -eknél is.

Differenciálegyenleteinkkel kapcsolatban számos probléma van: a megoldás exisztenciája és unicitásának kérdése, összefüggés a különböző paraméterértékekhez tartozó differenciálegyenletek megoldásai közt, azon  $\alpha$  és  $\beta$  értékek közelebbi meghatározása, amelyek mellett a (1.9) típusra jutunk, és így tovább. Ezekkel a kérdésekkel itt nem fogunk foglalkozni, mert a következőkben ismertetendő alkalmazás szempontjából nincs másra szükségünk, mint a differenciálegyenlet alakjára. Illusztrációként azonban bemutatjuk, milyen a differenciálegyenlet néhány explicite ismert stabilis sűrűségfüggvény esetében:

### 1°. Normális valószínűség-sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Tudjuk, hogy ennél  $\alpha = 2$ ,  $\beta$  tetszőleges,  $c = \sigma^2$  (vesd össze: [1], 178. oldal), tehát  $m = 2$ ,  $n = 1$ ;  $B$  értéke  $\alpha = 2$  folytán mindig 0. Ha minimális deriváltrendet akarunk,  $M = 1$ , és így  $k = 1$ -et kell választanunk, ez kielégíti a feltételeket. A differenciálegyenlet a „hővezetési”:

$$(1.15) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial c} = 0,$$

mint a normális sűrűségfüggvény szereplése alapján várható is volt.

### 2°. Cauchy-féle valószínűség-sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{\sigma}{\pi [(x-m)^2 + \sigma^2]}.$$



Ennél  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $c = \sigma$  (vesd össze [1], 178. oldal),  $B = 0$ , tehát  $m = 1$ ,  $n = 1$ . Itt  $M = 2$ -t és  $k = 1$ -et kell vennünk. A differenciálegyenlet a Laplace-féle lesz:

$$(1.16) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = 0.$$

3°. A Pearson-féle V. típusú valószínűség-sűrűségfüggvény. Alakja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} e^{-\frac{\sigma}{2(x-m)}} (x-m)^{-3/2}, & \text{ha } x > m \\ 0, & \text{ha } x \leq m. \end{cases}$$

Ennél  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = -1$ ,  $c = \sqrt{\sigma}$  (mindez pl. az [1], 178. oldalán közöltek-ből gépiesen levezethető). Így tehát  $m = 1$ ,  $n = 2$ ,  $B = -1$ , vagyis fenn kell állnia a

$$\frac{\pi}{2} \frac{2k - Mm}{Mn} = -\frac{\pi}{4}$$

relációnak. A legkisebb  $M$  és  $k$  érték, mely ezt kielégíti,  $M = 1$  és  $k = 0$ , s így a differenciálegyenlet:

$$(1.17) \quad 2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = 0.$$

## 2. §.

Az (1.9) alatti differenciálegyenletünkre alkalmazási terület a stabilis sűrűségfüggvények konstans súlyokkal vett keveréke felbontásának problémaköre.

Itt a feladat — általánosabb megfogalmazásban — a következő: adva van az

$$(2.1) \quad f(x) = \sum_{k=1}^N A_k f_k(x) \quad (A_k > 0, \text{ konst.})$$

függvény grafikonja, ahol az  $f_k(x)$  függvények *ugyanazon*  $\alpha$ ,  $\beta$  paraméterű karakterisztikus függvénnyel rendelkező stabilis sűrűségfüggvények, amelyekről azonban  $\alpha$  és  $\beta$  értéken kívül semmit sem tudunk. Az  $A_k$  konstansok is ismeretlenek. — Az  $f(x)$  függvény tehát az említett stabilis sűrűségfüggvények konstans súlyokkal vett keveréke. Meghatározandó  $f(x)$  grafikonja alapján  $N$ , a komponensek száma.

[11] dolgozatunkban kimutattuk, hogy a probléma a következő tétel alapján oldható meg:



Az  $f_k(x)$  függvényekre tett kikötések alapján  $f(x)$  karakterisztikus függvénye:

$$(2.2) \quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^N A_k \exp\{i\gamma_k t - c_k |t|^a [1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)]\},$$

ahol a  $(\gamma_k, c_k)$  számpárok mind különbözők, mert különben az összeg egyes tagjait összevonhatnánk. Legyen

$$(2.3) \quad \Psi(x, \lambda_n) = \mathcal{F}^{-1}\{\varphi(t) \exp\{\lambda_n |t|^a [1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)]\},$$

ahol a  $\lambda_n$  értékek  $(n = 1, 2, \dots)$  olyan 0-tól monoton növekedő valós számsorozat tagjai, amelyre  $\lambda_n \rightarrow \min c_k$ ,  $\mathcal{F}^{-1}$  pedig inverz Fourier-transzformáltat jelent. Legyen általában a  $c_k$  értékek között több olyan  $c_a, c, \dots$ , amelyek egyenlők és legkisebbek is, vagyis legyen  $\min c_k = c_a = c_b = \dots$ . Ekkor a  $\Psi(x, \lambda_n)$  függvénysorozat  $n \rightarrow \infty$  esetén olyan függvényhez konvergál, amely az  $x = \gamma_a, x = \gamma_b, \dots$  helyeken Dirac- $\delta$ -függvénné fajult el, egyébként pedig folytonos. (A  $\gamma_a, \gamma_b, \dots$  értékek közt nem lehetnek egyenlők).

$N$  meghatározása ezek után úgy történik, hogy  $f(x)$  karakterisztikus függvénye és fokozatosan nagyobb és nagyobb  $\lambda_n > 0$  paraméterek segítségével sorra képezzük a  $\Psi(x, \lambda_n)$  függvényeket: ha  $\lambda_n$  közel van a  $\min c_k = c_a = c_b = \dots$  értékhez,  $\Psi(x, \lambda_n)$  grafikonja az  $x = \gamma_a, x = \gamma_b, \dots$  helyeken egyre jobban kiemelkedő „tűket” mutat. Ebből a tényből tehát megtudjuk a  $\gamma_a, \gamma_b, \dots$  értékekkel jellemezhető komponensek létezését.

Ha most a „tűket” kihagyjuk a grafikonból, a maradékon újból elvégezhetjük az említett eljárást — itt persze más lesz a  $\min c_k$  —, akkor újabb  $\gamma_k$  értéket kapunk meg, és így tovább. Végül is megkapjuk az összes (egymással nem egyező!)  $\gamma_k, c_k$  számpárokat s így a komponensek számát,  $N$ -et is. A legtöbb esetben ez is elég.

A problémát tehát elvileg megoldottnak tekinthetjük, ha ismerjük a  $\Psi(x, \lambda_n)$  függvényt. Ki fogjuk mutatni, hogy a  $\Psi(x, \lambda_n)$  függvényt egyes esetekben annak alapján is elő tudjuk állítani, hogy  $\Psi(x, \lambda_n)$  eleget tesz bizonyos parciális differenciálegyenletnek.

Ezt így láthatjuk be: Nyilván

$$(2.4) \quad \begin{aligned} & \Psi(x, \lambda_n) = \\ &= \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \exp\{i\gamma_k t - (c_k - \lambda_n) |t|^a [1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)]\} dt. \end{aligned}$$

Az összeg tagjai ugyanolyan típusú függvények, mint a bevezetésben szereplő  $f(x, c)$ , csak itt  $c$  helyett  $c_k - \lambda_n$ ,  $\lambda$  helyett  $\gamma_k$  áll. Ha tehát itt is bevezetjük azokat a megszorításokat és jelöléseket, mint  $f(x, c)$  differenciálegyenletének levezetésekor (vagyis  $\alpha = m/n$ ,  $(m, n) = 1$ , ha  $\alpha \neq 1$ , és  $\beta = 0$ , ha  $\alpha = 1$ ), és  $\lambda_n$  helyett a  $\lambda$  változót vesszük, azt kapjuk, hogy  $\Psi(x, \lambda_n) \equiv \Psi(x, \lambda)$  jobboldalában az egyes integrálok mint  $x$  és  $c_k - \lambda$  függvényei ugyanolyan differenciálegyenletnek tesznek eleget, mint  $f(x, c)$ . A differenciálegyenletben tehát  $c_k - \lambda$



szerinti parciális deriváltak szerepelnek; ezeket azonban visszavezethetjük a  $\lambda$  szerinti deriváltakra, mert (szimbolikusan)

$$(-1)^r \frac{\partial^r}{\partial (c_k - \lambda)^r} = \frac{\partial^r}{\partial \lambda^r}.$$

Ezt felhasználva viszont olyan differenciálegyenletet származtathatunk le az eddigiből, amelynek a  $\Psi(x, \lambda)$  jobboldalában szereplő integrálok, mint  $x$  és  $\lambda$  függvényei tesznek eleget, és nyilván ugyanezt a differenciálegyenletet elégíti ki  $\Psi(x, \lambda)$  is.

A keresett  $\Psi(x, \lambda)$  függvényre tehát parciális differenciálegyenletet adhatunk meg. Ennek segítségével fogjuk meghatározni — egyes esetekben — általunk választott  $\lambda$ -nál a felbontáshoz szükséges  $\Psi$  függvényt ( $\lambda < \min c_k$ !).

A fenti gondolatmenet szerint számolva az (1.6) és (1.9) egyenleteknek megfelelően a következő parciális differenciálegyenleteket kapjuk a  $\Psi(x, \gamma)$  függvényre (a jelölések az (1.6) és (1.9) egyenleteknél használtak):

$$(2.5) \quad (-1)^{b_1} K_1 \frac{\partial^{b_1+a_1} \Psi}{\partial \lambda^{b_1} \partial x^{a_1}} + (-1)^{b_2} K_2 \frac{\partial^{b_2+a_2} \Psi}{\partial \lambda^{b_2} \partial x^{a_2}} + (-1)^{b_3} K_3 \frac{\partial^{b_3+a_3} \Psi}{\partial \lambda^{b_3} \partial x^{a_3}} = 0$$

és

$$(2.6) \quad (1 + B^2)^{q_2/2} \frac{\partial^{q_1+p_1} \Psi}{\partial \lambda^{q_1} \partial x^{p_1}} - (-1)^k (1 + B^2)^{q_1/2} \frac{\partial^{q_2+p_2} \Psi}{\partial \lambda^{q_2} \partial x^{p_2}} = 0.$$

Az alkalmazások szempontjából csak (2.6)-tal foglalkozunk a továbbiakban, ennek is csak az (1.14)-nek megfelelő

$$(2.7) \quad (1 + B^2)^{Mn/2} \frac{\partial^{Mm} \Psi}{\partial x^{Mm}} - (-1)^k \frac{\partial^{Mn} \Psi}{\partial \lambda^{Mn}} = 0$$

alesetével. Világos, hogy a konstansokra itt is ugyanaz a feltétel érvényes, mint (1.14)-nél.

### 3. §.

A  $\Psi(x, \lambda)$  függvényt — természetesen pozitív  $\lambda$  értékekre — a (2.7) differenciálegyenlet alapján kívánva meghatározni, vizsgáljuk először a normális sűrűségfüggvény esetét. Ennél  $m = 2$ ,  $n = 1$ ,  $B$  értéke akármilyen  $\beta$ -nál 0,  $M$ -et 1-nek (és így  $k$ -t is 1-nek) választhatjuk, s így a differenciálegyenlet:

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = 0.$$

$\Psi$  meghatározására számos, (3.1)-re nem támaszkodó analitikus módszer ismertettünk már egyebütt (lásd [10], [11], [12]). Itt viszont bemutatunk



egy (3.1)-ből kiinduló közelítő numerikus eljárást: differenciálegyenletünk helyett tekintsük az ehhez rendelhető

$$(3.2) \quad \frac{\Psi((S+1)h, Rk) - 2\Psi(Sh, Rk) + \Psi((S-1)h, Rk)}{h^2} + \frac{\Psi(Sh, (R+1)k) - \Psi(Sh, Rk)}{k} = 0$$

differenciaegyenletet (tetszőleges  $x, \lambda$  pont helyett, ahol  $\lambda < \min c_k$ , csak a  $h$ , illetve  $k$  távolságra levő  $x = Sh, y = Rk$ ;  $S, R = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  rácspontokban tekintjük a  $\Psi$  függvényt). A numerikus analízisből tudjuk, hogy ha  $h, k \rightarrow 0, S, R \rightarrow \infty$ , de úgy, hogy  $Sh \rightarrow x_0, Rk \rightarrow y_0$ , ennek a differenciaegyenletnek a megoldása az  $(Sh, Rk)$  pontban egyre jobban megközelíti a differenciálegyenlet megoldását az  $(x_0, y_0)$  pontban. A  $\Psi(Sh, 0)$  értéket azonban ismerjük: ez ugyanis  $\Psi(x, 0)$ , vagyis a felbontandó  $f(x)$  függvény értéke az  $Sh$  pontban. Ezekből az értékekből azonban az összes  $\Psi(Sh, k)$  értékeket is kiszámíthatjuk, és így az eljárást megismételve, végül is a minket érdeklő  $\Psi(Sh, Rk)$  ( $R > 0$ ) értékeket: ezzel közelítőleg megkapjuk  $\Psi(x, \lambda)$  értékét  $\lambda = Rk$ -nál, az  $x = Sh$  pontokban, vagyis a felbontáshoz szükséges függvény görbéjének egyes pontjait a  $\lambda = Rk$  paraméter mellett. A felbontás elvégzésére —  $h$  és  $k$  finomításával — ez a módszer is nyilván megfelelő.

Nyilvánvaló, hogy ez az eljárás bármely  $A(\partial'f/\partial x') + B(\partial f/\partial \lambda)$  típusú differenciálegyenlet közelítő megoldására is alkalmazható értelemszerűen, ha kezdeti feltételként  $f(x, 0)$  adott. Egyértelműsége világos.

#### 4. §.

Vegyük észre, hogy az előző problémánál a  $\Psi(Sh, 0)$  értékekből azonnal meghatározhattuk a  $\Psi(Sh, k)$ , majd ezekből a  $\Psi(Sh, 2k), \dots$  értékeket. Ezt az tette lehetővé, hogy (3.1)-ben  $\lambda$  szerint *első* derivált szerepelt csak.

A (2.7) differenciálegyenletek közt (3.1)-en kívül *nincs több*, amelyben  $\lambda$  szerint első derivált szerepelne, mert  $Mn$  értéke csak  $M = n = 1$  esetén lehet 1.

Következő speciális esetként tehát arra kell rátérnünk, amelynél  $m/n \neq 2$  és (2.7)-ban  $Mn = 2$ , vagyis  $\lambda$  szerint *második* parciális derivált szerepel.

Éppúgy, mint (1.14), (2.7) is nyilván akkor áll fenn, ha  $m/n, \beta, k$  és  $M$  eleget tesznek az

$$(4.1) \quad \arctg \left( \beta \operatorname{tg} \frac{\pi m}{2n} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{2k - Mn}{Mn} \quad \left( \begin{array}{l} k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ M = 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

összefüggésnek ( $m/n = 1, \beta = 0$  esetén a baloldalt 0-nak *definíáljuk*).  $Mn$  értéke most feltevés szerint 2;  $m/n$  értékei csak  $1/2, 1/1, 3/2$  lehetnek. Ezekben az esetekben a szóba jövő  $k, M$  és  $\beta$  értékeket ( $m/n = 1$  kivételével, amikor  $\beta = 0$ !) (4.1)-ből kell meghatároznunk, szem előtt tartva, hogy (4.1) jobb-



oldala abszolút értékben nem lehet nagyobb  $\pi/2$ -nél. Egyszerű megfontolással kapjuk, hogy csak a következő értékek fordulhatnak elő:

	I	II	III	IV	V
$m/n$	1/2	1/2	1/1	3/2	3/2
$\beta$	1	-1	0	1	-1
$M$	1	1	2	1	1
$k$	1	0	1	1	2

Az ezeknek megfelelő parciális differenciálegyenletek (2.7) alapján a következők:

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad & 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} = 0 \\
 \text{II.} \quad & 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} = 0 \\
 \text{(4.2) III.} \quad & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} = 0 \\
 \text{IV.} \quad & 2 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} = 0 \\
 \text{V.} \quad & 2 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} = 0
 \end{aligned}$$

(Megjegyezzük, hogy II. esetében Pearson-féle V. típusú, III., esetében Cauchy-féle sűrűségfüggvények konstans súlyokkal vett keverékének felbontásáról van szó. I-nél és IV-nél a keverék komponensei bizonyos transzcendens függvényekkel fejezhetők csak ki; ezek explicit alakja megtalálható [7]-ben.)

Most az I—V. alatti differenciálegyenletek megoldását próbáljuk megadni, annak az alapján, hogy ismerjük a  $\Psi(x, 0)$  függvényt, a felbontandó keverék grafikonját.

Mindjárt arra gondolunk, nem alkalmazhatnánk-e itt is a 3. §-ban leírt-hoz hasonló numerikus közelítő eljárást, mikor is differenciálegyenleteinket differenciaegyenletekkel közelítenénk, s azokat lépéről-lépésre megoldva állítanánk elő az adott  $\lambda$ -hoz ( $\lambda < \min c_k$ ) tartozó közelítő megoldást. — A módszer azonban nem vihető át közvetlenül, mert az I—V. egyenletekben a



$\partial^2 \Psi / \partial \lambda^2$  tagot pl. a 3. §-beli eljárás első lépésének megfelelő  $x = Sh, \lambda = 0$  pontokban centrális differenciákkal közelítő

$$\frac{\Psi(Sh, k) - 2\Psi(Sh, 0) + \Psi(Sh, -k)}{k^2}$$

differenciahányadosban ( $k$  a függőleges rácsponttávolság)  $\Psi(Sh, k)$  és  $\Psi(Sh, -k)$  mindketten ismeretlenek, s így külön-külön nem határozhatók meg, mert (ebben a differenciahányadosban) csak  $\Psi(Sh, 0)$  és az I—V. differenciálegyenletek másik tagjának differenciaegyenlettel való közelítésében szereplő  $\Psi(Sh, 0)$  ( $S = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $h$  a rácsponttávolság) értékek állapíthatók meg a kiindulási grafikon  $x = Sh$  pontokban leolvasott adataiból.

Kimutatjuk azonban:

1° hogy a

$$G(Sh, k) = \frac{1}{2} [\Psi(Sh, k) + \Psi(Sh, -k)]$$

és általában a

$$G(Sh, Rk) = \frac{1}{2} [\Psi(Sh, Rk) + \Psi(Sh, -Rk)] \quad (R > 0, \text{ egész})$$

jelölésekkel az I.—V.-nek megfelelő differenciaegyenletek a 3. §-beli eljárással a  $G(Sh, Rk)$ -ra lépésről-lépésre megoldhatók, és

2° hogy az ekkor kapott megoldással az  $x = Sh, \lambda = Rk$  pontban közelítőleg előállított  $G(x, \lambda) = (1/2) [\Psi(x, \lambda) + \Psi(x, -\lambda)]$  függvény is megfelel a keverékben levő komponensek számának megállapítása céljából ( $\lambda < \min c_k$ ).

A 2° állítás azonnal belátható:  $\Psi(x, -\lambda)$  tudniillik majorálható a

$$\sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(c_k + \lambda)|t|^\alpha} dt = \sum_{k=1}^N A_k \frac{\Gamma(1/\alpha)}{2\pi\alpha(c_k + \lambda)^{1/\alpha}}$$

kifejezéssel, és így, amidőn  $\lambda \rightarrow \min c_k$ ,  $\Psi(x, \lambda)$  a 2. §-ban említett „tűket” mutatja,  $\Psi(x, -\lambda)$  azonban minden  $x$ -re korlátos marad, és így  $(1/2) [\Psi(x, \lambda) + \Psi(x, -\lambda)]$  is mutatni fogja a „tűket”, amelyek segítségével a komponensek számát — a 2. §-ban letárgyalt módon — itt is megállapíthatjuk.

Ez a gyakorlatban természetesen nem ilyen egyszerű, hiszen közelítéseket kell alkalmaznunk, mikor is a „tűk” jelentkezése már nem olyan szembe-tűnő. Mindenesetre állapodjunk meg abban, hogy a keverék komponensei számának megállapításához, kiindulásként  $G(x, \lambda) = (1/2) [\Psi(x, \lambda) + \Psi(x, -\lambda)]$  is elegendő, és a továbbiakban foglalkozunk ennek a  $G(x, \lambda)$  függvénynek a gyakorlati előállításával, a feldolgozandó  $\Psi(x, 0)$  alapján.

Az előállítás egyik módja mindjárt kapcsolódik 1° igazolásához is: Ha az  $x = Sh, \lambda = Rk$  pontra felírt I—V. differenciálegyenletek baloldalában a deriváltakat centrális differenciákkal közelítjük, azok alakja



$$\frac{1}{h^j} \left[ \sum_{i=-(j-1)}^{j-1} a_i \Psi((S+i)h, Rk) \right]$$

( $j = 2$  vagy  $3$ ) lesz, ahol az  $a_i$ -k bizonyos konstansok, melyek értékét a deriváltakat közelítő differenciahányadosok kézikönyvekben közölt képleteiből nyerhetjük. A differenciálegyenletek jobboldalát ugyancsak centrális differenciákkal közelítve a

$$\frac{\Psi(Sh, (R+1)k) - 2\Psi(Sh, Rk) + \Psi(Sh, (R-1)k)}{k^2}$$

eredményre jutunk. Az I—V. differenciaegyenletek megoldását tehát általában a

$$\begin{aligned} \frac{P}{h^j} \left[ \sum_{i=-(j-1)}^{j-1} a_i \Psi((S+i)h, Rk) \right] + \frac{Q}{k^2} [\Psi(Sh, (R+1)k) - 2\Psi(Sh, Rk) + \\ + \Psi(Sh, (R-1)k)] = 0 \end{aligned}$$

( $j = 2$  vagy  $3$ ;  $P, Q$  konstansok) típusú differenciaegyenlet megoldásával közelíthetjük.

Írjuk most fel ugyanezt a differenciaegyenletet az  $x = Sh$ ,  $\lambda = -Rk$  pontra is, és adjuk hozzá az előbbihez. A  $G(Sh, Rk)$  mennyiségek bevezetésével ekkor a

$$\begin{aligned} \frac{P}{h^j} \left[ \sum_{i=-(j-1)}^{j-1} a_i G((S+1)h, Rk) \right] + \frac{Q}{k^2} [G(Sh, (R+1)k) - 2G(Sh, Rk) + \\ (4.3) \quad + G(Sh, (R-1)k)] = 0 \end{aligned}$$

differenciaegyenletet kapjuk,  $G(Sh, 0)$  azonban nem egyéb, mint  $\Psi(Sh, 0)$ , vagyis a felbontandó keverék-függvény értéke az  $x = Sh$  abszcisszaértékeknél ( $S = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  $G(Sh, k)$  pedig  $G(Sh, -k)$ -val egyenlő, így tehát a  $\Psi(Sh, 0)$  értékeket ismerve, egyenletünkben az ismeretlen  $G(Sh, k)$  értéket meghatározhatjuk. Most (4.3) egyenletünket  $Rk = k$ -ra írva fel, az előbb kapott  $G(Sh, k)$  és  $G(Sh, 0)$  értékek segítségével a  $G(Sh, 2k)$ -kat határozhatjuk meg, és így tovább, végül is megkapjuk a  $G(Sh, Rk)$  ( $R > 0$ ) értékeket, amelyek a  $j$  és az  $a_i$ -k alkalmas választásánál az I—V. differenciálegyenletek mindegyikének megadják közelítő megoldásait az  $x = Sh$ ,  $\lambda = -Rk$  ( $> 0$ !) pontokban. Így tehát a felbontandó  $\Psi(x, 0)$  függvény grafikonja ismeretében alkalmasan választott  $h$  és  $k$  értékek mellett előírt  $\lambda = -Rk > 0$  értékhez elő tudjuk állítani közelítőleg azt a  $G(x, \lambda)$  függvényt, amely megállapodás szerint elegendő a keverék komponensei számának megállapításához.

Vegyük észre, hogy eljárásunk alkalmazható bármely

$$A \frac{\partial^r f}{\partial x^r} + B \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (A, B = \text{konst.})$$



típusú parciális differenciálegyenlet esetében is, ha a kezdeti feltételként  $f(x, 0)$  van adva és elegendő az  $f(x, \lambda) + f(x, -\lambda)$  függvényt ismerni. Az eljárás egyértelmősége világos.

Megemlítjük még, hogy az I—V. differenciálegyenleteket kielégítő stabilis sűrűségfüggvény-keverékek közül Cauchy-félék keveréke spektroszkópiái és magfizikai problémáknál fordulhat elő (lásd: [11], 165. oldal), Pearson-féle V.-típusú sűrűségfüggvények, illetve ilyenek keveréke pedig elektromos távvezetékek vizsgálatánál (lásd: [8], 18. oldal). Ugyanezen esetekben persze a szóbanforgó keverék-sűrűségfüggvény felbontására is szükség lehet.

## 5. §.

Bemutatunk még egy „féligenumerikus” módszert a 3., illetve 4. §-ban szereplő differenciálegyenletek és általában az

$$A \frac{\partial^r f}{\partial x^r} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (A = \text{konst.}),$$

illetve

$$B \frac{\partial^s f}{\partial x^s} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad (B = \text{konst.})$$

típusú differenciálegyenletek bizonyos feltételek mellett való megoldására; ez a módszer a 3. és 4. §-ban szereplő differenciálegyenletek megoldásánál jobban beválk, mint az ott közölt numerikus módszerek.

Az említett módszert a következő két egyszerű tételben foglalhatjuk össze:

**1. tétel:**  $a_1 < x < b_1$  esetén legyen  $f(x, y)$  mint  $y$  függvénye analitikus az  $|y| < R_1$  intervallumon, továbbá legyen akárhányszor differenciálható  $x$  szerint, és elégítse ki az

$$(5.1) \quad A_1 \frac{\partial^r f}{\partial x^r} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

differenciálegyenletet  $f(x, 0) = \varphi(x)$  kezdeti feltétel mellett ( $a_1 < x < b_1$ ;  $A_1, r, a_1, b_1$  konstansok). Akkor

$$(5.2) \quad f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} A_1^k \frac{d^k \varphi}{dx^k} \quad (a_1 < x < b_1, |y| < R_1).$$

**2. tétel:**  $a_2 < x < b_2$  esetén legyen  $g(x, y)$  mint  $y$  függvénye analitikus az  $|y| < R_2$  intervallumon, továbbá legyen akárhányszor differenciálható  $x$  szerint, és elégítse ki az

$$(5.3) \quad A_2 \frac{\partial^s g}{\partial x^s} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$



*differenciálegyenletet*  $g(x, 0) = \psi(x)$  *kezdeti feltétel mellett* ( $a_2 < x < b_2$ ,  $A_2, s$ ,  $a_2, b_2$  konstansok). *Akkor a*  $G(x, y) = (1/2) [g(x, y) + g(x, -y)]$  *függvényre fennáll:*

$$(5.4) \quad G(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!} A_2^k \frac{d^{2k} \psi}{dx^{2k}} \quad (a_2 < x < b_2, |y| < R_2) .$$

A bizonyítások egyszerűek. Elég elvégezni az 1. tétel esetében.

Feltevésünk szerint  $a_1 < x < b_1$  esetén  $f(x, y)$  mint  $y$  függvénye analitikus az  $|y| < R_1$  szakaszon, vagyis ezen az intervallumon Maclaurin-sorral állítható elő:

$$(5.5) \quad f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \left[ \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right]_{y=0} \quad (a_1 < x < b_1, |y| < R_1) .$$

Mivel  $f(x, y)$   $y$  analitikus függvénye,  $x$  szerint pedig feltevés szerint akárhányszor deriválható a mondott  $(x, y)$  tartományban, akármilyen rendű vegyes parciális deriváltjaiban a deriválások sorrendje független, és így  $f(x, y)$  differenciálegyenletéből

$$\frac{\partial^k f}{\partial y^k} = A_1^k \frac{\partial^{rk} f}{\partial x^{rk}} \quad (a_1 < x < b_1, |y| < R_1) .$$

$f(x, y)$  bármilyen rendű parciális deriváltjainak létezéséből az is következik, hogy tetszőleges  $m$ -re  $\partial^m f(x, y) / \partial x^m$   $x$  és  $y$  értelmezési tartományán folytonos. Folytonos tehát  $\partial f / \partial x$  is; ennek folytán

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right]_{y=0} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \right] = \frac{d}{dx} f(x, 0) . \end{aligned}$$

Ezt a megfontolást most iterálva alkalmazhatjuk a (szintén folytonos)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \dots$$

deriváltakra; végül is

$$\left[ \frac{\partial^m f}{\partial x^m} \right]_{y=0} = \frac{d^m}{dx^m} f(x, 0)$$

vagyis

$$\left[ \frac{\partial^k f}{\partial y^k} \right]_{y=0} = A_1^k \left[ \frac{\partial^{rk} f}{\partial x^{rk}} \right]_{y=0} = A_1^k \frac{d^{rk}}{dx^{rk}} f(x, 0) = A_1^k \frac{d^{rk} \psi}{dx^{rk}} ,$$



s ezt (5.5)-be beírva, megkapjuk (5.2)-t. Minthogy  $G(x, y)$ -ra ugyanazok a feltevések érvényesek, mint  $g(x, y)$ -ra, az előbbihez hasonló megfontolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \left[ \frac{\partial^k g}{\partial y^k} \right]_{y=0} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-y)^k}{k!} \left[ \frac{\partial^k g}{\partial y^k} \right]_{y=0} \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!} \left[ \frac{\partial^{2k} g}{\partial y^{2k}} \right]_{y=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!} A_2^k \frac{d^{2k} \psi}{dx^{2k}} \\ &\quad (a_2 < x < b_2, |y| < R_2), \end{aligned}$$

megegyezésben (5.4)-gyel.<sup>2)</sup>

Az 1. és 2. tétel stabilis sűrűségfüggvényekre való alkalmazása szempontjából szükséges még a következő két tétel, amelyeket — mivel ez külön nehézséget nem jelent — mindjárt legáltalánosabb alakban mondunk ki:

**3. tétel:**  $A$  komplex  $z = u + iv$  paramétertől függő

$$(5.6) \quad f_1(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \exp \{ i\gamma t - (c - z) |t|^\alpha [1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)] \} dt$$

$$(0 < \alpha \leq 2, |\beta| \leq 1, \gamma, c \text{ konstansok,}$$

$$\omega(t, \alpha) = \operatorname{tg}(\pi\alpha/2) \text{ ha } \alpha \neq 1 \text{ és } \beta = 0, \text{ ha } \alpha = 1)$$

függvény  $z$  analitikus függvénye, ha  $|z| < c/\sqrt{1+B^2}$  ( $B = \beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2)$ ).

#### Bizonyítás:

(5.6)-ból leolvasható, hogy ha  $u$  és  $v$  eleget tesz az  $u \pm vB < c$ , illetve  $a - u \pm vB < c$  feltételeknek, az integrandus  $z$  szerinti deriváltjának integrálja létezik. Ez a feltétel azonban mindig teljesül, ha  $u^2 + v^2 < c^2/(1+B^2)$ , következésképpen az  $|z|$ -re tett feltétel mellett  $\partial f_1(x, z)/\partial z$  is létezik. Ugyanezen  $z$ -kre  $f_1(x, z)$  a  $z$  egyértékű függvénye, és így  $f_1(x, z)$  analitikus (azaz hatványsorba fejthető) a  $|z| < c/\sqrt{1+B^2}$  kör belsejében. — Ha  $z$  valós,  $f_1(x, z)$  a  $z$  paramétertől függő stabilis sűrűségfüggvény.

<sup>2)</sup> Sajnos, a módszer nem terjeszthető ki a valóban oly differenciálegyenletek esetére, amelyek típusa

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

és  $t = 3, 4, \dots$ ; (5.4)-nél tudniillik azt használtuk ki, hogy a  $g(x, y) + g(x, -y)$  függvényben csak páros deriváltak maradtak meg, amelyeket azután (5.3) segítségével átalakíthattunk,  $t = 3$ -nál azonban csak minden harmadik deriválnak szabadna megmaradnia, hogy differenciálegyenletünket felhasználhassuk, s ez csak  $g(x, \varepsilon_1 y) + g(x, \varepsilon_2 y) + g(x, \varepsilon_3 y)$  előállításakor állna be, ahol az  $\varepsilon_i$ -k a harmadik egységgyökök. Analóg a helyzet  $t = 4, 5, \dots$  esetében is;  $g(x, \varepsilon y)$  általában komplex szám, s így a gyakorlatban, ahol  $g(x, y)$  valós értékei mondanak valamit, nem használható: hasonlóan  $> 3$ -nál.



Határozzuk meg az említett hatványsor  $n$ -edik együtthatóját, a  $[\partial^n f_1 / \partial z^n]_{z=0}$  függvényt! Az  $f_1(x, z)$  függvényt (1.1)-gyel egybevetve látható, hogy  $z$  szerinti deriváltjaira (megfelelő jelölésekkel) fennáll az (1.3) képlet. Ennek és a  $\beta = 0$ , ha  $\alpha = 1$  összefüggésnek az alapján azonban

$$\frac{\partial^n f_1}{\partial z^n} = (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial (c-z)^n} =$$

$$= \frac{(1+B^2)^{n/2}}{\pi} \int_0^\infty e^{-(c-z)t^\alpha} t^{an} \cos\{(x-\gamma)t + B(c-z)t^\alpha - n \arctg B\} dt,$$

ahol  $B = \beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2)$ .

A hatványsor:

$$f_1(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[ \frac{\partial^n f_1}{\partial z^n} \right]_{z=0}; \quad (z < c/\sqrt{1+B^2});$$

könnyen igazolható, hogy

$$\left[ \frac{\partial^n f_1}{\partial z^n} \right]_{z=0}$$

úgy képezhető, hogy az integráljel alatt elvégezzük a  $z \rightarrow 0$  határátmenetet. Ekkor bármely  $x$ -re

$$|a_n| = \frac{(1+B^2)^{n/2}}{n! \pi} \left| \int_0^\infty e^{-ct^\alpha} t^{an} \cos\{(x-\gamma)t + Bct^\alpha - n \arctg B\} dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{(1+B^2)^{n/2}}{n! \pi} \int_0^\infty e^{-ct^\alpha} t^{an} dt = \frac{(1+B^2)^{n/2} \Gamma(n+1/\alpha)}{n! \pi \alpha c^{n+1/\alpha}} \equiv d_n.$$

Szükségünk lesz az  $f_1(x, z)$  függvény  $z$  szerinti hatványsorának maradéktagjára is. A 3. tétel jelölései mellett igaz a következő

#### 4. tétel: $Az$

$$f_1(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

hatványsor

$$R_{S+1}(z) = \sum_{n=S+1}^{\infty} a_n z^n$$



maradéktagjára (konvergencia-körén belül) a következő becslés adható meg:

$$(5.7) \quad |R_{S+1}(z)| \leq \begin{cases} \frac{\Gamma(S+1+1/\alpha)}{\pi\alpha c^{1/\alpha} \cdot (S+1)!} \left( \frac{\sqrt{1+B^2}}{c} |z| \right)^{S+1} \left( 1 - \frac{\sqrt{1+B^2}}{c} |z| \right)^{-1}, & \text{ha } 1/\alpha \leq 1 \\ \frac{\Gamma(S+1+1/\alpha)}{\pi\alpha c^{1/\alpha} \cdot (S+1)!} \left( \frac{\sqrt{1+B^2}}{c} |z| \right)^{S+1} \left( 1 - \frac{S+1+1/\alpha}{S+2} \frac{\sqrt{1+B^2}}{c} |z| \right)^{-1}, & \text{ha } 1/\alpha > 1 \end{cases}$$

(feltéve, hogy oly  $z$  értékről van szó, amelyre az utolsó faktorok 0-nál nagyobbak).

Ennek a (nem különösebben éles, de jobbal, úgy látszik, általánosság a folytán nem pótolható) becslésnek a bizonyítása egyszerű. Az  $|a_n|$ -re adott becslés alapján

$$\begin{aligned} |R_{S+1}(z)| &\leq \sum_{n=S+1}^{\infty} |a_n| |z|^n \leq \sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{(1+B^2)^{n/2} \Gamma(n+1/\alpha)}{n! \pi\alpha c^{n+1/\alpha}} |z|^n \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi\alpha c^{1/\alpha}} \sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/\alpha)}{n!} u^n \end{aligned}$$

( $u = \sqrt{1+B^2} |z|/c$  feltevés szerint kisebb mint 1). Az itt szereplő hatványsor egymás után következő tagjainak hányadosai:

$$\frac{(S+1+1/\alpha)u}{S+2}, \frac{(S+2+1/\alpha)u}{S+3}, \dots, \frac{(S+1+1/\alpha+m)u}{S+2+m}, \dots;$$

ezek azonban  $u$ -val egyenlők, ha  $1/\alpha = 1$ ,  $u$ -val majorálhatók, ha  $1/\alpha < 1$ , és végül  $(S+1+1/\alpha)u/(S+2)$ -vel majorálhatók, ha  $1/\alpha > 1$ . Ha tehát  $(S+1+1/\alpha)u/(S+2) < 1$ ,

$$\sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/\alpha)}{n!} u^n$$

minden  $1/\alpha$ -érték mellett majorálható egy konvergens hatványsorral. Ennek az összegét az  $1/\alpha \leq 1$  esetekre kiszámítva, végül is a tételben közölt becsléseket kapjuk.

Látjuk, hogy  $1/\alpha > 1$  esetében  $|z|$  már csak a  $c/\sqrt{1+B^2}$ -nél kisebb sugarú körben mozoghat, ha használható becslést akarunk. Azonban a

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{S+1+1/\alpha}{S+2} = 1$$

reláció folytán ez a kör egyre tágul. Látjuk, hogy  $S$  növelésével a hibakorlátok tetszőlegesen kicsivé tehetők ( $\lim_{S \rightarrow \infty} [\Gamma(\alpha+1+1/\alpha)u^S/(S+1)!] = 0$ , ha  $0 < |u| < 1$ !).

A következőkben az utóbbi két tételre csupán valós  $z$  értékek mellett (azaz stabilis sűrűségfüggvényekre kimondva) lesz szükségünk.



## 6. §.

Általános módszereinket alkalmazzuk most a (3.1) és (4.2) alatti parciális differenciálegyenletek megoldására. Láttuk, hogy ezeknek az egyenleteknek a megoldásai, illetve megoldásaik kombinációi bizonyos stabilis sűrűségfüggvénykeverékek, amelyek grafikonjából az egyes komponensek paramétereire következtethetünk; a kezdeti feltétel a feldolgozandó keverékfüggvény grafikonja. Az idevágó megfontolásokat a 3. és 4. §-ban részletesen kifejtettük már, s ezért itt csak a differenciálegyenletekről és a megoldás előállításáról beszélünk.

Vegyük tehát a (3.1) differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = 0.$$

A  $\Psi(x, \lambda)$  függvény, mint tudjuk, normális sűrűségfüggvények keveréke, amelyben a komponensek szórását a  $\lambda$  paraméter csökkenti:

$$(6.1) \quad \Psi(x, \lambda) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} e^{-i\gamma_k t - (c_k - \lambda)t^2} dt \equiv \sum_{k=1}^N A_k \Psi_k(x, \lambda).$$

A kezdeti feltétel,  $\Psi(x, 0)$ , a feldolgozandó függvény, amelyet ismerünk. Ennek és a differenciálegyenletnek a segítségével kell meghatároznunk a felbontás eszközeként szolgáló  $\Psi(x, \lambda)$  függvényt. Idevágó módszereket a [10], [11], és [12] dolgozatokban bőven ismertettünk; most pár szóban az 5. §. tételei felhasználásával adjuk meg a megoldást.

A 3. tétel szerint  $\Psi(x, \lambda)$  komponensei  $\lambda$  analitikus függvényei, ha  $|\lambda| < c_k$  (minthogy most  $\alpha = 2$ , és így  $B = \beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2) = 0$ ). Következésképp  $\Psi(x, \lambda)$   $\lambda$  analitikus függvénye, ha  $|\lambda| < \min c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Ekkor alkalmazható rá az 1. tétel (az  $y = \lambda$ ,  $R = \min c_k$ ,  $r = 2$ ,  $A_1 = -1$ ,  $a_1 = -\infty$ ,  $b_1 = \infty$ ,  $\varphi(x) = \Psi(x, 0)$  helyettesítésekkel). Így tehát a felbontás szempontjából egyedül érdekes  $\lambda > 0$  értékeket véve csak figyelembe:

$$(6.2) \quad \Psi(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} \frac{d^{2k} \varphi}{dx^{2k}} \quad (\lambda < \min c_k).$$

Ezt a formulát (azzal a különbséggel, hogy itt  $\lambda$  és nem  $\lambda^2/2$  a paraméter) már korábbi dolgozatainkban is levezettük (lásd pl.: [12], 335. oldal); itt általános tétel speciális eseteként kapjuk.

Ha a sorfejtéssel az  $S$ -edik tagig megyünk, a 4. tételt  $\Psi(x, \lambda)$  egyes komponenseire alkalmazva, az elhanyagolásból eredő  $R_{S+1}(\lambda)$  hibára a következőt kapjuk:

$$(6.3) \quad |R_{S+1}(\lambda)| \leq \sum_{k=1}^N A_k \frac{\Gamma(S+1+1/2)}{(S+1)! 2\pi \sqrt{c_k}} \left(\frac{\lambda}{c_k}\right)^{S+1} \left(1 - \frac{\lambda}{c_k}\right)^{-1} < \\ < \frac{\Gamma(S+1+1/2)}{(S+1)! 2\pi \sqrt{\min c_k}} \left(\sum_{k=1}^N A_k\right) \left(\frac{\lambda}{\min c_k}\right)^{S+1} \left(1 - \frac{\lambda}{\min c_k}\right)^{-1}.$$



Ez a becslés — általánosabb jellege folytán — gyengébb persze, mint amit a normális sűrűségfüggvény tulajdonságait is felhasználva [12] 336. oldalán közöltünk. Ez a durvább korlát is zérushoz tart azonban, ha  $s \rightarrow \infty$ . A vizsgált helytől függő korlátra — az általánosság folytán — nem is számíthattunk.

A közölt sorfejtés — mint korábbi dolgozatainkban már kifejtettük — lehetőséget ad a felbontás elvégzésére alapul szolgáló  $\Psi(x, \lambda)$  függvény közelítő előállítására, ha  $\Psi(x, 0)$ -t és  $\lambda$ -t ismerjük, illetve megválasztottuk.

Tekintsük most a (4.2) alatti

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} = 0 \\ \text{II.} \quad & 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} = 0 \\ \text{III.} \quad & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} = 0 \\ \text{IV.} \quad & 2 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} = 0 \\ \text{V.} \quad & 2 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} = 0 \end{aligned}$$

differenciálegyenleteket. A 2. §. és 4. §-ból tudjuk, hogy ezeknek a megoldásai a

$$\begin{aligned} \Psi(x, \lambda) &= \\ &= \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \exp\{i\gamma_k t - (c_k - \lambda) |t^\alpha| [1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)]\} dt \equiv \\ (6.4) \quad &\equiv \sum_{k=1}^N A_k \Psi_k(x, \lambda) \end{aligned}$$

függvények, és az  $\alpha$  és  $\beta$  paraméterek értékei a (4.2) egyenleteknek megfelelően sorjában

	I	II	III	IV	V
$\alpha$	1/2	1/2	1	3/2	3/2
$\beta$	1	-1	0	1	-1

A 4. §-ban kimutattuk, hogy a felbontandó keverék,  $\Psi(x, 0)$  komponenseinek szétválasztásához elegendő a

$$(6.5) \quad G(x, \lambda) = \frac{1}{2} [\Psi(x, \lambda) + \Psi(x, -\lambda)]$$



függvény ismerete. Ezt fogjuk most meghatározni az I—V. esetekre, 5. §-beli tételeink felhasználásával, arra támaszkodva, hogy a  $G(x, 0) = \Psi(x, 0)$  függvényt (a felbontandó keveréket) és a  $\lambda$  paramétert ismerjük, illetve megválasztottuk.

A 3. tétel szerint a (6.4) alatti  $\Psi(x, \lambda)$  függvény komponensei  $\lambda$  analitikus függvényei, ha  $|\lambda|$  az egyes esetekben kisebb mint :

I	II	III	IV	V
$\frac{c_k}{\sqrt{2}}$	$\frac{c_k}{\sqrt{2}}$	$c_k$	$\frac{c_k}{\sqrt{2}}$	$\frac{c_k}{\sqrt{2}}$

(ez a 3. tételbeli konvergencia-kör sugarának  $c_k/\sqrt{1+B^2}$  értékéből adódik, a  $B = \beta \operatorname{tg}(\pi \alpha/2)$  kifejezésekben  $\alpha$  és  $\beta$  helyébe a fenti táblázatban szereplő, az I—V-nek megfelelő értékeket írva be). Következésképp  $\Psi(x, \lambda)$   $\lambda$  analitikus függvénye, ha az I—V. esetben sorjában  $|\lambda|$  kisebb, mint

I	II	III	IV	V
$\frac{\min c_k}{\sqrt{2}}$	$\frac{\min c_k}{\sqrt{2}}$	$\min c_k$	$\frac{\min c_k}{\sqrt{2}}$	$\frac{\min c_k}{\sqrt{2}}$

Ekkor alkalmazható a 2. tétel az  $y = \lambda$ ,  $a_2 = -\infty$ ,  $b_2 = \infty$ ,  $G(x, 0) = \Psi(x, 0) = \psi(x)$  helyettesítésekkel, és a többi paraméter alábbi megválasztásával :

	I	II	III	IV	V
$R_2$	$\frac{\min c_k}{\sqrt{2}}$	$\frac{\min c_k}{\sqrt{2}}$	$\min c_k$	$\frac{\min c_k}{\sqrt{2}}$	$\frac{\min c_k}{\sqrt{2}}$
$s$	1	1	2	3	3
$A_2$	-2	2	-1	-2	2

Így tehát, a felbontás szempontjából egyedül érdekes  $\lambda > 0$  értékeket véve csak figyelembe :

$$(6.6) \quad G(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} A_2^k \frac{d^{sk} \psi}{dx^{sk}},$$

ahol a paraméterek az I—V. eseteknek megfelelően az előbbi táblázatokban feltüntetett értékeket veszik fel.



Ezt a formulát a III. esetre (Cauchy-sűrűségfüggvények keveréke) [13] dolgozatunkban is levezettük már (lásd: [13], 323. oldal); jelenleg mint speciális eset szerepel. Az I., II., IV. és V. esetekben csak gyengébb felbontásra számíthatunk, mint III.-nál:  $\lambda$  csak  $\min c_k/\sqrt{2}$ -ig mehet, és nem  $\min c_k$ -ig. A gyakorlatban azonban ez is elegendő szokott lenni.

Vizsgáljuk meg azt az  $\bar{R}_{S+1}(\lambda)$  hibát, amelyet akkor követünk el, ha  $G(x, \lambda)$  (6.6) sorfejtésével a negyedik tagnál megállunk. Alkalmazzuk a 4. tétel *gondolatmenetét*  $G(x, \lambda)$  egyes komponenseire. Ha  $\lambda$  mindig az éppen vizsgált I—V. esetekből való alesethez tartozó konvergencia-intervallumban mozog,  $\Psi(x, \lambda)$  és  $\Psi(x, -\lambda)$  analitikus függvény lesz, és így írhatjuk:

$$\Psi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n; \quad \Psi(x, -\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (-\lambda)^n,$$

vagyis

$$G(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} \lambda^{2n}$$

és így

$$|\bar{R}_{S+1}(\lambda)| \leq \sum_{n=S+1}^{\infty} |b_{2n}| \lambda^{2n} \quad (\lambda > 0 \text{ volt!}).$$

A

$$\Psi(x, \lambda) = \sum_{k=1}^N A_k \Psi_k(x, \lambda)$$

keverékben a  $\lambda$ -ra tett feltétel mellett a komponensek  $\lambda$  analitikus függvényei: ha

$$\Psi_k(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n} \lambda^n,$$

akkor

$$|b_{2n}| \leq \sum_{k=1}^N A_k |b_{k,2n}|.$$

A 3. tétel utániakból azonban

$$|b_{k,2n}| \leq \frac{(\sqrt{1+B^2})^{2n} \Gamma(2n+1/\alpha)}{(2n)! \pi \alpha c^{2n+1/\alpha}}$$

(ahol a paraméterek a fenti táblázatból veendőek az I.—V. eset mindegyikében). Végülis,

$$|\bar{R}_{S+1}(\lambda)| \leq \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\pi \alpha c^{1/\alpha}} \sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+1/\alpha)}{(2n)!} \left( \frac{\sqrt{1+B^2}}{c_k} \lambda \right)^{2n}$$

A 4. tétel módszereit felhasználva és a  $c_k$ -t tartalmazó tényezőket felülbecsülve végül is a következőt kapjuk ( $\lambda$  értékét egyelőre akkorának véve, hogy a becslést nyújtó geometriai sor konvergáljon):



Ha  $1/\alpha \leq 1$ :

$$(6.7) \quad |\bar{R}_{S+1}(\lambda)| \leq \frac{\left(\sum_{k=1}^N A_k\right) \Gamma(2S+2+1/\alpha)}{(2S+2)! \pi \alpha \min c_k^{1/\alpha}} \left(\frac{\sqrt{1+B^2}}{\min c_k} \lambda\right)^{2S+2} \left[1 - \left(\frac{\sqrt{1+B^2}}{\min c_k} \lambda\right)^2\right]^{-1};$$

ha pedig  $1/\alpha > 1$ ,

$$(6.8) \quad |\bar{R}_{S+1}(\lambda)| \leq \frac{\left(\sum_{k=1}^N A_k\right) \Gamma(2S+2+1/\alpha)}{(2S+2)! \pi \alpha \min c_k^{1/\alpha}} \left(\frac{\sqrt{1+B^2}}{\min c_k} \lambda\right)^{2S+2} \times \\ \times \left[1 - \frac{(2S+2+1/\alpha)(2S+3+1/\alpha)}{(2S+3)(2S+4)} \left(\frac{\sqrt{1+B^2}}{\min c_k} \lambda\right)^2\right]^{-1}$$

feltéve, hogy oly  $\lambda$  értékekről van szó, amelyekre az utolsó faktorok pozitívak. Nagy  $S$ -eknél a  $(2S+2+1/\alpha)(2S+3+1/\alpha)/(2S+3)(2S+4)$  faktor is jelentéktelenné válik, és így a  $(\min c_k)/\sqrt{1+B^2}$  értékhez egyre közelebbi  $\lambda$ -értékekre is érvényes a becslés. Látható, hogy a hibakorlátok zérushoz tartanak, ha  $S \rightarrow \infty$ . Minden részletezés és ismételtetés nélkül megállapíthatjuk, hogy (6.6)  $S=2$ ,  $A_2=-1$  esetében Cauchy-sűrűségfüggvények keverékének felbontásához,  $S=1$ ,  $A_2=2$  esetében pedig Pearson-féle V. típusú sűrűségfüggvények keverékének felbontásához használható fel (vesd össze a (4.2) után tett megjegyzésekkel!). Az egyes esetekben az  $|\bar{R}_{S+1}(\lambda)|$  hibakorlátára a következőt kapjuk: Pearson-féle V.-típusú sűrűségfüggvények keveréke esetében

$$(6.9) \quad |\bar{R}_{S+1}(\lambda)| \leq \frac{2\left(\sum_{k=1}^N A_k\right)}{\pi \min c_k^2} (2S+3) \left(\frac{\sqrt{2}}{\min c_k} \lambda\right)^{2S+2} \times \\ \times \left[1 - \frac{2S+5}{2S+3} \left(\frac{\sqrt{2}}{\min c_k} \lambda\right)^2\right]^{-1}.$$

A Cauchy-féle sűrűségfüggvények keveréke esetében ( $\alpha=1$ ,  $B=0$ ):

$$(6.10) \quad |\bar{R}_{S+1}(\lambda)| \leq \frac{\sum_{k=1}^N A_k}{\pi \min c_k} \left(\frac{\lambda}{\min c_k}\right)^{2S+2} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\min c_k}\right)^2\right]^{-1}.$$

Ez a becslés — általánosabb jellege folytán — gyengébb, mint amit a Cauchy-sűrűségfüggvény tulajdonságait is felhasználva [13]-ban a 325. oldalon közöltünk, tudniillik a vizsgált helytől függő korlátra az általánosság folytán nem is számíthattunk. Ha az idézett helyen a keverék-függvény komponenseit maximumukkal becsüljük felül, előbbi formulánkhoz jutunk.)



Az I., IV. és V. differenciálegyenlettel jellemzett keverék esetére mellőzzük a (6.6) sorfejtések és az  $|R_{S+1}(\lambda)|$  hibakorlátok felírását. A megfelelő típusú sűrűségfüggvények keverékének gyakorlati előfordulásáról nem tudunk: ha ilyenekkel találkozánk, illetve ilyenek keverékét kellene felbontani, a közöltek alapján az összes szükséges formulákat gépiesen felhasználhatjuk. — Ugyancsak nem részleteztük azt a [10], [11] és [13] dolgozatokban részletesen tárgyalt technikai utasítást sem, hogyan állítsuk elő a gyakorlatban a  $\Psi(x, \lambda)$ , illetve  $G(x, \lambda)$  szeleteit, a feldolgozandó keverékfüggvény deriváltjainak numerikus meghatározása útján (numerikus deriváláshoz számos formulát találunk [10] és [13]-ban).

(Beérkezett: 1956. VII. 31.)

#### IRODALOM

- [1] B. V. GNYEGYENKO—A. N. KOLMOGOROV: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
- [2] A. WINTNER: „The singularities of Cauchy's distributions”. *Duke Mathematical Journal* **8** (1941) 678—681.
- [3] H. POLLARD: „The representation of  $e^{-x^\lambda}$  as a Laplace integral.” *Bulletin of the American Mathematical Society* **52** (1946) 908—910.
- [4] H. BERGSTRÖM: „Expansions of stable distribution functions.” *Arkiv för Matematik* **2** (1952) 375—378, **4** (1953) 380—391.
- [5] Ю. В. ЛИННИК: „Об устойчивых вероятностных законах с показателем меньшим единицы.” *Доклады Академии Наук СССР* **94** (1954) 619—621.
- [6] А. В. СКОРОХОД: „Асимптотические формулы для устойчивых законов распределения.” *Доклады Академии Наук СССР* **98** (1954) 731—734.
- [7] В. М. ЗОЛОТАРЕВ: „Выражение плотности устойчивого распределения с показателем  $\alpha$ , большим единицы, через плотность с показателем  $1/\alpha$ .” *Доклады Академии Наук СССР* **98** (1954) 735—738.
- [8] И. А. ОВСЕВИЧ—А. М. ЯГЛОМ: „Монотонные переходные процессы в однородных длинных линиях.” *Известия Академии Наук СССР. Отделение Технических Наук* (1954) 13—20.
- [9] В. М. ЗОЛОТАРЕВ: „Об аналитических свойствах устойчивых законов распределений.” *Вестник Ленинградского Университета* (1956) 49—52.
- [10] MEDGYESSY PÁL: „Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 165—177.
- [11] MEDGYESSY PÁL: „Újabb eredmények valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 155—169.
- [12] MEDGYESSY PÁL: „Kiegészítés az „Újabb eredmények valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban” című dolgozathoz.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1955) 331—341.
- [13] MEDGYESSY PÁL: „Közelítő eljárás Cauchy-sűrűségfüggvények keverékének összetevőkre bontására.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1955) 321—329.



# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, СВЯЗАННЫЕ С ПЛОТНОСТЬЮ УСТОЙЧИВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

P. MEDGYESSY

## Резюме

Публикуются методы разложения смеси плотностей некоторых устойчивых распределений. Обобщаются исследования опубликованные в предыдущих статьях автора ([11], [13]). Они основываются на следующей теореме: *Плотность устойчивого распределения*

$$f(x, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\gamma - x)t - c|t|^{\alpha} \{1 + i\beta \cdot \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)\}] dt$$

( $0 < \alpha \leq 2$ ,  $|\beta| \leq 1$ ,  $c > 0$ ,  $\gamma$  — вещественные постоянные;  $\omega(t, \alpha) = \operatorname{tg}(\pi\alpha/2)$  при  $\alpha \neq 1$ ,  $\omega(t, 1) = (2/\pi) \log |t|$ ) — при условии, что  $\alpha$  рациональна ( $\alpha = m/n$ ,  $(m, n) = 1$ ) и  $\beta = 0$  если  $\alpha = 1$  — удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с частными производными и постоянными коэффициентами типа

$$K_1 \frac{\partial^{b_1+a_1} f}{\partial c^{b_1} \partial x^{a_1}} + K_2 \frac{\partial^{b_2+a_2} f}{\partial c^{b_2} \partial x^{a_2}} + K_3 \frac{\partial^{b_3+a_3} f}{\partial c^{b_3} \partial x^{a_3}} = 0$$

где целочисленные постоянные  $a_i, b_i$  определяются условиями  $ab_1 + a_1 = ab_2 + a_2 = ab_3 + a_3$  и  $W \equiv \sin [(1/2\pi)(a_2 - a_3) - (b_2 - b_3) \operatorname{arc} \operatorname{tg} B] \neq 0$  ( $B = \beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2)$ , если  $\alpha = 1$ ), а постоянные  $K_i$  зависят постоянных  $a_i, b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $B$ . При  $W = 0$  дифференциальное уравнение принимает более простую форму (1.9).

Постоянные  $a_i, b_i, K_i$  являются функциями  $m, n$  и  $\beta$ . При их выборе мы имеем некоторую свободу. Это делает возможным некоторое упрощение дифференциального уравнения, подходящим выбором их можно, например, добиться сокращения числа смешанных производных в дифференциальном уравнении. Далее, можно показать, что, если при данных параметрах  $\alpha = m/n$  и  $\beta$  можно найти такие числа  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и  $M = 1, 2, \dots$ , для которых (при  $m/n = 1$  определяя левую часть равенства как ноль  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} [\beta \operatorname{tg}(\pi m/2n)] = (1/2\pi) [(2k - Mm)/Mn]$  ( $|(2k - Mm)/Mn| \leq 1$ ), то  $f(x, c)$  будет решением дифференциального уравнения

$$(-1)^{Mn}(1 + B^2)^{Mn/2} \frac{\partial^{Mn} f}{\partial x^{Mn}} - (-1)^k \frac{\partial^{Mn} f}{\partial c^{Mn}} = 0,$$

в котором отсутствуют смешанные частные производные. (При  $\beta = 0$ , этого всегда можно добиться). Это дифференциальное уравнение, например, в случае плотности нормального распределения переходит в дифференциальное уравнение теплопроводности.

Это дифференциальное уравнение применяется для разложения смеси плотностей устойчивых распределений следующим образом: в работе [11] мы доказали, что если в некоторой смеси плотностей

$$f(x) = \sum_{k=1}^N A_k f_k(x)$$

функции  $f_k(x)$  суть плотности устойчивых распределений, обладающие характеристической функцией известными параметрами  $\alpha, \beta$  и неизвестными параметрами  $c_k, \gamma_k$ , то определение фигурирующих в тех неизвестных параметров ( $A_k$  и т. д.) (разложение смеси) теоретически решено, если с помощью  $f(x)$  мы можем построить зависящую от параметра  $\lambda (\lambda < \min c_k)$  функцию

$$\Psi(x, \lambda) = \sum_{k=1}^N A_k \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\gamma_k - x)t - (c_k - \lambda)|t|^{\alpha} \{1 + i\beta \cdot \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)\}] dt$$



Однако, тип отдельных членов  $\Psi(x, \lambda)$  тот же, что и в случае исходной функции  $f(x, c)$ , и поэтому — налагая параметры те же условия —  $\Psi(x, \lambda)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению того же типа, что и  $f(x, c)$ . В приложениях мы здесь используем следующий отдельный случай: если при данных  $\alpha = m/n$  и  $\beta$  можно найти такие  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и  $M = 1, 2, \dots$  для которых  $\arctg [\beta \operatorname{tg} (\pi m/2n)] = (1/2 \pi) [(2k - Mm)/Mn] \pmod{1}$ ; при  $\alpha = 1$ , левая часть равенства равна нулю, то  $\Psi(x, \lambda)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 + B^2)^{MN/2} \frac{\partial^{Mm} \Psi}{\partial x^{Mm}} - (-1)^k \frac{\partial^{Mn} \Psi}{\partial \lambda^{Mn}} = 0$$

$$(B = \beta \operatorname{tg} (\pi m/2n), \text{ если } \alpha \neq 1, \quad B = 0, \text{ если } \alpha = 1).$$

Это дифференциальное уравнение исследуется в случаях  $Mn = 1$  и  $Mn = 2$  (они содержат и смеси известных в явном виде плотностей устойчивых распределений типа Gauss, Cauchy и Pearson). Возможные в этом случае типы дифференциальных уравнений приведены в (3.1) и (4.2). В случае  $Mn = 2$  мы должны использовать не  $\Psi(x, \lambda)$ , а функцию

$$G(x, \lambda) = (1/2) [\Psi(x, \lambda) + \Psi(x, -\lambda)],$$

которая также может быть использована при разложении.  $\Psi(x, 0) = G(x, 0)$  есть функция смеси, которая должна быть разложена, её график известен. Если это использовать в качестве начального условия, функция  $\Psi(x, \lambda)$  или  $G(x, \lambda)$  может быть определена с помощью численных или базирующихся на теоремах §.5. аналитических методов, опирающихся на дифференциальные уравнения (3.1.) и (4.2.). Во втором случае функции  $\Psi(x, \lambda)$  или  $G(x, \lambda)$  получаются в виде степенных рядов от  $\lambda$ , коэффициентах в которых присутствуют производные функции  $\Psi(x, 0)$ . Они практически должны находиться численно. Для оценки остаточных членов этих степенных рядов в §.6. даются оценки.

## PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR STABLE DENSITY FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS

P. MEDGYESSY

### Summary

This paper deals with several methods of the decomposition of mixtures of certain stable density functions. The methods discussed are generalizations of those published in previous papers (see [11], [13]) of the author. They are based on the following theorem:

If  $\alpha$  is rational ( $\alpha = m/n$ ,  $(m, n) = 1$ ) and  $\beta = 0$ , if  $\alpha = 1$ , the stable density function

$$f(x, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\gamma - x)t - c|t|^\alpha \{1 + i\beta \cdot \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)\}] dt$$

(where  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $|\beta| \leq 1$ ,  $c > 0$ ,  $\gamma$  are real constants;  $\omega(t, \alpha) = \operatorname{tg} (\pi \alpha/2)$ , if  $(\alpha \neq 1)$ ,  $\omega(t, 1) = (2/\pi) \log |t|$ ) satisfies the linear partial differential equation of type

$$K_1 \frac{\partial^{b_1+a_1} f}{\partial c^{b_1} \partial x^{a_1}} + K_2 \frac{\partial^{b_2+a_2} f}{\partial c^{b_2} \partial x^{a_2}} + K_3 \frac{\partial^{b_3+a_3} f}{\partial c^{b_3} \partial x^{a_3}} = 0$$

where the integer-valued positive constants  $a_i, b_i$  are to be determined from the conditions  $ab_1 + a_1 = ab_2 + a_2 = ab_3 + a_3$  and  $W \equiv \sin \left[ \frac{1}{2} \pi (a_2 - a_3) - (b_2 - b_3) \arctg B \right] \neq 0$



( $B = \beta \cdot \operatorname{tg}(\alpha\pi/2)$  if  $\alpha \neq 1$ ,  $B = 0$  if  $\alpha = 1$ ) and the constants  $K_i$  are certain functions of the constants  $a_i$ ,  $b_i$  and  $B$  ( $i = 1, 2, 3$ ). if  $W = 0$  the differential equation assumes the more simple form (1.9).

The constants  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $K_i$  are functions of  $m$ ,  $n$  and  $\beta$ ; they are not, however, uniquely determined. This enables us to simplify the above differential equation, e. g. by a convenient choice of them the number of mixed partial derivatives in the differential equation can be diminished. In addition it can be shown that if, for given parameters  $\alpha = m/n$  and  $\beta$ , parameters  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  and  $M = 1, 2, \dots$  can be found so that

$$\operatorname{are} \operatorname{tg} [\beta \operatorname{tg}(\pi m/2n)] = \frac{1}{2} \pi [(2k - Mm)/Mn] \quad (|(2k - Mm)/mn| \leq 1)$$

(for  $m/n = 1$  the left-hand side will be defined as equal to), then the function  $f(x, c)$  is a solution of the differential equation

$$(-1)^{Mn} (1 + B^2)^{\frac{Mn}{2}} \frac{\partial^{Mn} f}{\partial x^{Mn}} - (-1)^k \frac{\partial^{Mn} f}{\partial c^{Mn}} = 0$$

in which no mixed partial derivatives occur. (For  $\beta = 0$  the above condition can be always satisfied.) In case of  $\alpha = 2$ , i. e. for the normal density function this differential equation coincides with the heat conduction equation.

The last differential equation can be used for the decomposition of mixtures of certain stable density functions as follows: In the paper [11] of the author it has been proved that if, in a mixture

$$f(x) = \sum_1^N A_k f_k(x)$$

of density functions, the functions  $f_k(x)$  are stable density functions the characteristic functions of which have common (given) parameters  $\alpha_k = \alpha$ ,  $\beta_k = \beta$  and the parameters  $c_k$ ,  $\gamma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) are unknown, then the problem of determining the unknown parameters ( $A_k, \dots$  etc.) occurring in  $f(x)$  (the so-called "decomposition of the mixture,") can be theoretically solved, by construction the function

$$\Psi(x, \lambda) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\gamma_k - x) - (c_k - \lambda) |t|^a \{1 + i\beta \cdot \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)\}] dt$$

(depending on the parameter  $\lambda$  ( $\lambda < \min c_k$ )) by aid of  $f(x)$ . The type of the single terms in  $\Psi(x, \lambda)$  is, however, the same as that of the function  $f(x, c)$ . Then, if we submit the parameters to the same conditions as above  $\Psi(x, \lambda)$  satisfies a differential equation of the same type as the equation for  $f(x, c)$ . For the applications we need only the following particular case: If, for given parameters  $\alpha = m/n$  and  $\beta$ , we find numbers

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  and  $M = 1, 2, \dots$  so that  $\operatorname{are} \operatorname{tg} [\beta \operatorname{tg}(\pi m/2n)] = \frac{1}{2} \pi [(2k - Mm)/Mn]$  ( $|(2k - Mm)/Mn| \leq 1$ ); for  $\alpha = 1$  the left-hand side being defined as to be 0 then the function  $\Psi(x, \lambda)$  satisfies the differential equation

$$(1 + B^2)^{\frac{Mn}{2}} \frac{\partial^{Mn} \Psi}{\partial x^{Mn}} - (-1)^k \frac{\partial^{Mn} \Psi}{\partial \lambda^{Mn}} = 0$$

$$(B = \beta \operatorname{tg}(\pi m/2n), \text{ if } \alpha \neq 1; B = 0 \text{ if } \alpha = 1)$$

In the sequel this differential equation is investigated for the cases  $Mn = 1$  and  $Mn = 2$  (this implies the investigation of mixtures of the explicitly known stable density functions — those of Gauss, Cauchy and Pearson's V. type). The possible types of the differential equation are given in (3.1) and (4.2). In the case  $Mn = 2$  we have, instead of  $\Psi(x, \lambda)$ , to work with the function  $G(x, \lambda) = \frac{1}{2} [\Psi(x, \lambda) + \Psi(x, -\lambda)]$ ,



which also may be the basis of the decomposition. Let  $\Psi(x, 0) = G(x, 0)$  be the mixture to be decomposed, the graph of which is supposed to be known. Taking  $\Psi(x, 0)$  as initial condition  $\Psi(x, \lambda)$  and  $G(x, \lambda)$  can be determined, starting from the differential equations (3.1) and (4.2), by numerical or analytical methods (the latter ones being based on certain theorems in § 5.). The analytical methods consist in the construction of power series in  $\lambda$  for  $\Psi(x, \lambda)$  and  $G(x, \lambda)$  the coefficients of which contain the derivatives of the mixture function  $\Psi(x, 0)$  to be decomposed. In practice these derivatives are to be determined numerically. In § 6. estimates of the remainder terms of the above power series are given.



## A POISSON-FOLYAMAT EGY JELLEMZÉSE

RÉNYI ALFRÉD

Tegyük fel, hogy a  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots$  időpontokban egy-egy esemény történik, és legyen  $\delta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Ha a  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  pozitív valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak, a folyamatot *rekurrensnek* nevezzük. Jelölje  $F(x)$  a  $\delta_n$  valószínűségi változók közös eloszlásfüggvényét.  $F(x)$ -et a rövidség kedvéért a folyamathoz tartozó eloszlásfüggvénynek nevezzük. Ha

$$\alpha = \int_0^{\infty} x dF(x)$$

létezik, akkor a  $\lambda = 1/\alpha$  számot a folyamat *eseményssűrűségének* nevezzük. Ha  $\alpha = +\infty$ , a sorozatot 0-sűrűségűnek, egyébként pozitív sűrűségűnek nevezzük. A legegyszerűbb rekurrens folyamat a Poisson-folyamat, amelynél  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ , ha  $x \geq 0$  ( $\lambda > 0$ ). Ez egyben az egyetlen olyan rekurrens folyamat, amely Markov-típusú. A következőkben a Poisson-folyamat egy másik jellemző tulajdonságára kívánunk rámutatni, ami a Poisson-folyamatot a rekurrens folyamatok között kitünteti.

Jelölje  $K_q$  ( $0 < q < 1$ ) azt a transzformációt, amely a  $\tau_n$  pontot a  $q\tau_n$  pontba viszi át ( $q$ -adrészre való *komprimálás*). Jelölje továbbá  $R_q$  azt a transzformációt, amely a  $\tau_n$  pontok mindegyikét  $q$  valószínűséggel változtatlanul hagyja, és  $p = 1 - q$  valószínűséggel törli a  $\{\tau_n\}$  sorozatból, oly módon, hogy az egyes  $\tau_n$  pontokra vonatkozó választások egymástól függetlenek ( $q$ -szoros *ritkítés*). Alkalmazzuk a szóbanforgó rekurrens folyamatra előbb az  $R_q$ , azután a  $K_q$  transzformációt (a sorrend egyébként mellékes). Ezáltal a sorozat sűrűsége nem változik meg, az  $F(x)$  eloszlásfüggvény azonban megváltozik. Jelöljük röviden az  $R_q K_q$  transzformációt  $T_q$ -val.

A  $T_q$  transzformáció a folyamatot egy másik rekurrens folyamattá alakítja át, amelyhez tartozó eloszlásfüggvényt úgy tekintjük, mint  $F(x)$ -nek a  $T_q$  transzformációval való transzformáltját, és  $T_q(F(x)) = F(x, q)$ -val jelöljük.

**1. lemma:** Ha  $0 < q_1 < 1$  és  $0 < q_2 < 1$ , akkor

$$T_{q_1}(T_{q_2}(F(x))) = T_{q_1 q_2}(F(x)) .$$



**Bizonyítás:**

Legyen

$$(1) \quad \varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-xs} dF(x)$$

az  $F(x)$  eloszlásfüggvény Laplace-transzformáltja. Jelölje továbbá  $F_n(x)$  az  $F(x)$   $n$ -edik kompozíció-hatványát, vagyis legyen

$$(2) \quad F_1(x) = F(x) \text{ és } F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-t) dF(t), \quad n = 2, 3, \dots$$

Akkor

$$(3) \quad T_q(F(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} q p^{n-1} F_n\left(\frac{x}{q}\right),$$

és így, ha  $T_q[\varphi(s)]$  jelöli  $T_q(F(x))$  Laplace-transzformáltját,

$$(4) \quad T_q[\varphi(s)] = \frac{q \varphi(qs)}{1 - (1-q) \varphi(qs)},$$

Ennélfogva

$$(5) \quad \frac{1}{T_q[\varphi(s)]} - 1 = \frac{1}{q} \left( \frac{1}{\varphi(qs)} - 1 \right),$$

és így

$$(6) \quad \frac{1}{T_{q_1}[T_{q_2}[\varphi(s)]]} - 1 = \frac{1}{q_1} \left( \frac{1}{T_{q_2}[\varphi(q_1 s)]} - 1 \right) = \frac{1}{q_1 q_2} \left( \frac{1}{\varphi(q_1 q_2 s)} - 1 \right).$$

(6)-ból következik, hogy

$$(7) \quad T_{q_1}[T_{q_2}[\varphi(s)]] = T_{q_1 q_2}[\varphi(s)],$$

és a Laplace-transzformált unicitására való tekintettel

$$(8) \quad T_{q_1}(T_{q_2}(F(x))) = T_{q_1 q_2}(F(x)).$$

Ezzel lemmánkat bebizonyítottuk.

A  $\{T_q\}$  transzformációszereg tehát, amely a valószínűségeloszlások fél-csoportján van értelmezve, maga is félcsoportot alkot. Még egy segéd-tételt bizonyítunk be.



**2. lemma:** Ha  $F(x, q) = T_q(F(x))$ ,  $0 < q < 1$ , továbbá

$$\alpha_1 = \int_0^{\infty} x dF(x)$$

létezik, akkor

$$\alpha_q = \int_0^{\infty} x dF(x, q)$$

is létezik, és  $\alpha_q = \alpha_1$ ,  $0 < q < 1$ . Ha  $\alpha_1 = +\infty$ , akkor  $\alpha_q = +\infty$ . Ha

$$\beta_1 = \int_0^{\infty} x^2 dF(x)$$

is létezik, akkor

$$\beta_q = \int_0^{\infty} x^2 dF(x, q)$$

is létezik, és  $\beta_q - 2\alpha_q = q(\beta_1 - 2\alpha_1^2)$ .

### Bizonyítás:

(5)-ből egyszerű számolással adódik, hogy ha  $\varphi_q(s) = T_q[\varphi(s)]$ , akkor  $\varphi'_q(0) = \varphi'(0)$  és

$$\varphi''_q(0) = q\varphi''(0) + 2(1-q)[\varphi'(0)]^2.$$

Innét a lemma állítása azonnal következik.

**Megjegyzés:** A  $T_q$  transzformáció tehát nem változtatja meg egy rekurrens folyamat sűrűségét.

Bármely  $T_q$  transzformációnál<sup>1)</sup> ( $0 < q \leq 1$ ) az összes exponenciális eloszlások invariánsak. Ha ugyanis

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0),$$

akkor  $\varphi(s) = \lambda/(\lambda + s)$ , és így

$$T_q[\varphi(s)] = \frac{q \frac{\lambda}{\lambda + qs}}{1 - (1-q) \frac{\lambda}{\lambda + qs}} = \frac{\lambda q}{\lambda q + qs} = \frac{\lambda}{\lambda + s} = \varphi(s).$$

<sup>1)</sup>  $T_1$  nem más, mint az identikus transzformáció, vagyis minden  $F(x)$ -re  $T_1(F(x)) \equiv F(x)$



Be fogjuk bizonyítani, hogy az exponenciális eloszlások a  $T_q$  transzformációk egyedüli invariáns elemei, ha  $0 < q < 1$ , vagyis, hogy érvényes a következő

**1. tétel:** *A  $T_q$  transzformáció egyedüli invariáns elemei az exponenciális eloszlások, vagyis egy rekurrens folyamat jellege a  $T_q$  transzformációnál akkor és csak akkor nem változik meg, ha a folyamat Poisson-típusú.*

**Megjegyzés:** Az 1. tétel tehát a Poisson-folyamatok egy jellemző sajátására mutat rá, ami a Poisson-folyamatokat a rekurrens folyamatok között kitünteti.

**Bizonyítás:**

(5) szerint, ha  $T_q(F(x)) = F(x)$ , akkor teljes indukcióval és az 1. lemmára való tekintettel következik, hogy  $T_{q^n}(F(x)) = F(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Jelölje  $\varphi(s)$  az  $F(x)$  függvény Laplace-transzformáltját, akkor (5)-ből

$$(9) \quad \frac{1}{q^n} \left( \frac{1}{\varphi(q^n s)} - 1 \right) = \frac{1}{\varphi(s)} - 1,$$

tehát, mivel  $\varphi(0) = 1$ , és  $\varphi(s)$  a 0 helyen folytonos,

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(0) - \varphi(q^n s)}{q^n s} = \frac{1 - \varphi(s)}{s \varphi(s)}.$$

Ha létezik  $\varphi'(0) = -1/\lambda$ , akkor tehát (10)-ből

$$\frac{1 - \varphi(s)}{s \varphi(s)} = \frac{1}{\lambda},$$

és így

$$\varphi(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s},$$

amivel állításunkat erre az esetre már be is bizonyítottuk. Azt, hogy  $\varphi'(0)$  létezik, nem kell külön feltenni, mert ez (10)-ből következik; ugyanis  $\varphi'(0)$  akkor és csakis akkor létezik (nem negatív valószínűségi változóról lévén szó), ha

$$\int_0^{\infty} x dF(x)$$

létezik és

$$\varphi'(0) = - \int_0^{\infty} x dF(x).$$



Mármost (10)-ből ez esetben bármely  $s > 0$ -ra

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-q^n s x}}{q^n s} dF(x) = \frac{1 - \varphi(s)}{s \varphi(s)},$$

és így, figyelembe véve, hogy  $1 - e^{-t} \leq t$ , ha  $t > 0$ , Lebesgue tétele szerint (11)-ből következik:

$$(12) \quad \int_0^{\infty} x dF(x) = \frac{1 - \varphi(s)}{s \varphi(s)}.$$

Mivel (12) baloldala nem függ  $s$ -től, következik, hogy  $\varphi'(0) = -1/\lambda$  létezik, és  $\varphi(s) = \lambda/(\lambda + s)$ . Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Vizsgáljuk most meg, hogy mi történik, ha egy nem Poisson-típusú folyamatra alkalmazzuk a  $T_q$  transzformációt. A mondottak után nem meglepő, hogy a  $q \rightarrow 0$  határesetben a folyamat Poisson-folyamattá alakul át, feltéve, hogy az eseményssűrűség pozitív volt. Ezt fejezi ki a következő

**2. tétel:** Ha  $F(x)$  egy eloszlásfüggvény,  $F(0) = 0$  és

$$\int_0^{\infty} x dF(x) = \frac{1}{\lambda}$$

létezik, akkor

$$\lim_{q \rightarrow 0} T_q(F(x)) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0).$$

**Bizonyítás:**

Feltevésünk szerint  $\varphi'(0) = -1/\lambda$  létezik. Ennélfogva

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{T_q[\varphi(s)]} = 1 + s \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1 - \varphi(qs)}{q s \varphi(qs)} = 1 + \frac{s}{\lambda},$$

tehát

$$(13) \quad \lim_{q \rightarrow 0} T_q[\varphi(s)] = \frac{\lambda}{\lambda + s},$$

amiből a Laplace-transzformáció jólismert folytonossága alapján következik

$$(14) \quad \lim_{q \rightarrow 0} T_q(F(x)) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0).$$

**Megjegyzés:** A  $T_0$  transzformációt tehát értelmezhetjük, mint egy olyan transzformációt, amely bármely, a  $(0, +\infty)$  intervallumban értelmezett



véges várható értékű eloszlást átvisz a vele egyenlő várható értékű exponenciális eloszlásba. Azonban, ha

$$\int_0^{\infty} x dF(x) = +\infty,$$

$T_0(F(x))$  nincsen értelmezve. Megjegyzendő továbbá, hogy míg  $q > 0$  esetén  $T_q$  értelmezhető az egész számegyenes valószínűségeloszlásain is,  $T_0$  csak a pozitív féltengelyen megadott valószínűségeloszlásokra van értelmezve.

**3. tétel:** Legyen  $0 < q_n < 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$  és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_1 q_2 \dots q_n = 0$$

Ha egy tetszőleges véges sűrűségű rekurrens folyamatra egymás után alkalmazzuk a  $T_{q_1}, T_{q_2}, \dots, T_{q_n}, \dots$  transzformációkat, határértékben egy Poisson-folyamatot nyerünk,<sup>2)</sup> amelynek esemény-sűrűsége megegyezik a folyamat eredeti sűrűségével.

#### Bizonyítás:

Mivel az 1. lemma szerint  $T_{q_n} T_{q_{n-1}} \dots T_{q_1} = T_{q_1 q_2 \dots q_n}$ , a 2. tételből, figyelembevée a 2. lemmát, következik a 3. tétel állítása.

Egy 0-sűrűségű rekurrens folyamatot az említett módon természetesen nem lehet Poisson-folyamattá alakítani (hiszen a  $T_q$  transzformáció a 0 sűrűséget is invariánsul hagyja). Ez elérhető azonban, ha eljárásunkat némiképpen általánosítjuk. Vizsgáljuk a  $T_{q,t} = R_q K_t$  transzformációkat. (Nyilvánvalóan  $T_{q,q} = T_q$ ). Ha  $\varphi(s)$  jelöli újból az  $F(x)$  eloszlásfüggvény Laplace-transzformáltját, és  $T_{q,t}[\varphi(s)]$  a  $T_{q,t}(F(x))$  eloszlásfüggvény Laplace-transzformáltját, akkor (5) általánosításaként adódik:

$$(15) \quad \frac{1}{T_{q,t}[\varphi(s)]} - 1 = \frac{1}{q} \left( \frac{1}{\varphi(ts)} - 1 \right).$$

(15)-ből azonnal leolvasható, hogy

$$T_{q_1, t_1} T_{q_2, t_2} = T_{q_1 q_2, t_1 t_2}.$$

Mármost, ha  $q$  és  $t$  egyidejűleg alkalmas módon 0-hoz tartanak, elérhető, hogy  $T_{q,t}[\varphi(s)]$  konvergáljon egy valódi eloszlás Laplace-transzformáltjához. Ha például  $F(x) = 1 - x^{-1}$ , ha  $1 \leq x < +\infty$ , és  $F(x) = 0$ , ha  $x < 1$ , akkor

$$\varphi(s) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xs}}{x^2} dx \sim 1 - s \log \frac{1}{s} + O(s),$$

<sup>2)</sup> Azon, hogy a folyamat határértékben Poisson-folyamattá válik, itt csak azt értjük, hogy a folyamat meghatározó függvénye egy exponenciális eloszláshoz konvergál. Lehetséges volna a kérdés mértékelméleti szempontból való vizsgálatával elmélyíteni a tárgyalást. E kérdésre a szerző vissza kíván térni.



ha  $s \rightarrow 0$ , és így

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{\varepsilon \log 1/\varepsilon, \varepsilon} [\varphi(s)] = \frac{1}{1+s},$$

vagyis alkalmazva a szóbanforgó 0-sűrűségű folyamatra a  $T_{\varepsilon \log 1/\varepsilon, \varepsilon}$  transzformációt, ha  $\varepsilon \rightarrow 0$ , határértékben 1 sűrűségű Poisson-folyamatot nyerünk. Ezt nyilván azzal értük el, hogy sokkal erősebben komprimáltuk a folyamatot, mint ahogy ritkítettük.

(Beérkezett: 1956. IX. 15.)

# ОДНА ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОЦЕССА POISSON

A. RÉNYI

## Резюме

Рассмотрим некоторый рекуррентный процесс, т. е. такой стохастический процесс, который состоит из событий, происходящих в случайные моменты времени  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots$ , где положительные случайные величины  $\delta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) независимы и имеют одинаковую функцию распределения  $F(x)$ . Рекуррентный процесс есть процесс Poisson, если  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  при  $x \geq 0$  где  $\lambda > 0$ . Если существует

$$\alpha = \int_0^{\infty} x dF(x),$$

то величина  $\lambda = 1/\alpha$  называется *плотностью* процесса. В настоящей работе рассматривается следующее преобразование рекуррентных процессов: первый шаг есть *контракция* процесса, т. е. замена моментов  $\tau_n$  на  $q\tau_n$  где  $0 < q < 1$ . С помощью этого преобразования плотность увеличивается от  $\lambda$  до  $\lambda/q$ . Исходная плотность процесса восстанавливается на втором шаге, *разрежении*. Это достигается исключением определенных событий, исключение производится так, что каждое событие процесса исключается с вероятностью  $p$  и остается без изменения с вероятностью  $q$  ( $p = 1 - q$ ); исключение (соотв. неискл.) некоторого события не зависит от исключения (соотв. неискл.) другого события. Через  $T_q$  обозначается преобразование, состоящее из последовательного проведения указанных шагов. Показывается, что если преобразование  $T_q$  применяется к некоторому рекуррентному процессу, снова получается рекуррентный процесс, но функция распределения расстояния следующих друг за другом событий переходит из  $F(x)$  в

$$F(x, q) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} q F_n\left(\frac{x}{q}\right),$$

где  $F_1(x) = F(x)$  и

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-t) dF(t), \quad n = 2, 3, \dots$$

Полагая  $T_q(F(x)) = F(x, q)$ ,  $T_q$  может рассматриваться как преобразование, определенное на множестве распределений случайных величин. Легко показать, что  $T_{q_1} T_{q_2} =$



$= T_{q_1 q_2}$  (лемма 1) и что показательные распределения инвариантны по отношению к каждому преобразованию  $T_q$ . В работе доказывается, что не существует других инвариантных распределений, т.е. если  $T_q(F(x)) = F(x)$  для какого либо  $q$  ( $0 < q < 1$ ), то  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  при  $x \geq 0$  с некоторым  $\lambda > 0$ . Показывается, далее, что если  $F(x)$  есть любая функция распределения с конечным математическим ожиданием

$$\alpha = \int_0^{\infty} x dF(x),$$

то

$$T_0(F(x)) = \lim_{q \rightarrow 0} T_q(F(x)) = 1 - e^{-\lambda x}$$

при  $x \geq 0$ , где  $\lambda = 1/\alpha$ . Отсюда следует (теорема 3), что если рассматривать любой рекуррентный процесс с положительной плотностью событий и последовательно применять преобразования  $T_{q_n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) где  $0 < q_n < 1$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_1 q_2 \dots q_n = 0,$$

то процесс стремится к некоторому процессу Poisson с той же плотностью.

Если плотностью исходного процесса равна нулю, то этот процесс не ведет к цели. Однако, с помощью примера показывается, что изменяя преобразование так, что контракция и разрежение применяется в разной мере, рекуррентный процесс с плотностью, равной нулю, в пределе может быть преобразован в процессе Poisson.

## A CHARACTERIZATION OF POISSON PROCESSES

A. RÉNYI

### Summary

Let us consider a recurrent process, i. e. a stochastic process consisting of events occurring at random moments  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots$ ; the positive random variables  $\delta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) being independent and identically distributed with the distribution function  $F(x)$ . A recurrent process is a Poisson-process, if  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  for  $x \geq 0$ , where  $\lambda > 0$ . If

$$\alpha = \int_0^{\infty} x dF(x)$$

exists,  $\lambda = 1/\alpha$  is called the *density* of events in the process. In the present paper the following transformation of recurrent processes is considered: The first step consists in a *contraction* of the process, i. e. in replacing the moments  $\tau_n$  by the moments  $q\tau_n$ , where  $0 < q < 1$ . By means of this transformation, the density of events is increased from  $\lambda$  to  $\lambda/q$ . The original density of the process is reestablished by the second step, which is a *rarification* of the process. This is done by cancelling some of the events, the cancelling is made in such a way, that each event of the process is cancelled with probability  $p$  and left unchanged with probability  $q$  ( $p = 1 - q$ ), the cancelling (or not cancelling) of any event being independent of the cancelling (or not cancelling) of any other event.

We denote by  $T_q$  the transformation consisting in the successive performance of the two steps described above. It is shown that if we apply the transformation  $T_q$  to a recurrent process, we obtain again a recurrent process, but the distribution function the of distances between successive events is changed from  $F(x)$  to

$$F(x, q) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} q F_n\left(\frac{x}{q}\right)$$



where  $F_n(x)$  denotes the  $n$ -th convolution of  $F(x)$  with itself, i. e.  $F_1(x) = F(x)$  and

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-t) dF(t), \quad n = 2, 3, \dots$$

Putting  $T_q(F(x)) = F(x, q)$ , the transformation  $T_q$  may be considered as operating on the set of probability distributions. It is easy to show that  $T_{q_1} T_{q_2} = T_{q_1 q_2}$  (Lemma 1.), further that the exponential distributions are left invariant by any of the transformations  $T_q$ . It is shown in the paper, that there are no other invariant distributions, i. e. if  $T_q(F(x)) = F(x)$  for some  $q$  ( $0 < q < 1$ ), it follows that  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  for  $x \geq 0$  with some  $\lambda > 0$  (Theorem 1.). It is shown further that if  $F(x)$  is an arbitrary distribution function with finite mean value

$$\alpha = \int_0^\infty x dF(x),$$

then

$$T_0(F(x)) = \lim_{q \rightarrow 0} T_q(F(x)) = 1 - e^{-\lambda x}$$

for  $x > 0$  with  $\lambda = 1/\alpha$ . It follows (Theorem 3.) that if we take an arbitrary recurrent process having a positive density of events, and apply one after another the transformations  $T_{q_n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) where  $0 < q_n < 1$  and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_1 \dots q_n = 0,$$

then the process converges to a Poisson-process having the same density.

If the original process has density 0, then this procedure does not work. It is pointed out, however, by an example, that a modification of the transformation (consisting in the application of a contraction and a rarification of unequal power) we may transform a recurrent process with zero density of events in the limit into a Poisson-process.







## A MONTE-CARLO MÓDSZER MINT MINIMAX STRATÉGIA

PALÁSTI ILONA és RÉNYI ALFRÉD

### Bevezetés

Monte-Carlo módszernek az olyan eljárást nevezzük, amelynél valamilyen numerikus matematikai feladat közelítő megoldása céljából egy sztochasztikus modellt konstruálnak, ezt realizálják, és a végzett kísérletek eredményeinek statisztikai feldolgozása segítségével egy közelítő értéket (tulajdonképpen *statisztikai becslést*) kapnak a keresett feladat megoldását nyújtó mennyiségre. A Monte-Carlo módszer elvileg bármely numerikus feladat megoldására alkalmazható; természetesen minden konkrét esetben külön kell megkonstruálni az alkalmas sztochasztikus modellt, megvalósítani azt, és megkeresni egy alkalmas statisztikai becslést. A módszer elnevezése arra céloz, hogy a Monte-Carlo-i kaszinó ruletteredményeit (amelyeket rendszeresen közzé tesznek) fel lehet használni, kellő transzformációk útján az említett célra, hiszen a ruletteredmények tulajdonképpen egy speciális véletlen számtáblázatot alkotnak, és a véletlen számtáblázatok nagy szerepet játszanak a szóban forgó módszerek alkalmazása során.<sup>1)</sup> A Monte-Carlo módszert olyan esetekben szokták alkalmazni, amikor a szokásos eljárások annyira bonyolult számításokra vezetnének, hogy gyakorlatilag nem jönnek számításba. Ez volt a helyzet a Monte-Carlo módszer első jelentős alkalmazásánál, amely az atomreaktorok méretezésével volt kapcsolatos, és NEUMANN JÁNOS, S. ULAM és E. FERMI nevéhez fűződik. Ez esetben olyan problémáról volt szó, amely egy fizikai realitással bíró sztochasztikus folyamatra, a neutronoknak az atommagreaktorban való mozgására vonatkozott, ami nagyon megkönnyítette az alkalmas sztochasztikus modell megválasztását, hiszen a tényleges fizikai folyamatot kellett csak matematikailag „lemásolni”. Ez az eljárás elvileg nem különbözik attól a matematikai statisztikában már régóta alkalmazott „kísérleti” módszertől, amikor például egy igen nehezen kiszámítható eloszlást úgy határoznak meg közelítőleg, hogy egy nagyobb statisztikai adathalmazból kiszámítják a szóban forgó statisztikai függvény empirikus eloszlását. Ezt a módszert alkalmazta STUDENT a róla elnevezett eloszlással kapcsolatban, amelyre ugyan adott egy (nem teljesen precíz) levezetést, de éppen mivel érezte ennek nem teljesen meggyőző voltát, azért ellenőrzésként kísérletileg is meghatározta az eloszlást.<sup>2)</sup> A Monte-Carlo módszer alkalmazhatósági köre azonban

<sup>1)</sup> Ma már sokkal megbízhatóbb eljárásokkal rendelkezünk véletlen számsorozatok generálására.

<sup>2)</sup> STUDENT 3000 bűnöző testmagasságára és mutatóujja hosszára vonatkozó adatokból számította ki a keresett empirikus eloszlást.



nem szorítkozik azokra a kérdésekre, amelyekhez van egy természetes sztochasztikus modell; elegendő bármely numerikus problémához egy olyan valószínűségszámítási problémát találni, amelynél valamely statisztikailag becsülhető mennyiség (vagy függvény) pusztán formálisan ugyanolyan egyenletnek (függvényegyenletnek) tesz eleget, illetve ugyanolyan analitikus alakra hozható, mint a keresett mennyiség.

Például, ha ki akarjuk számítani numerikusan az

$$I = \int_a^b g(x) dx$$

integrál értékét, a következőképpen járhatunk el: választunk egy, az  $(a, b)$  intervallumban értelmezett pozitív  $f(x)$  függvényt, amelyre

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

ezután keresünk egy olyan könnyen megvalósítható véletlen tömegjelenséget, amelynél megfigyelhető egy olyan  $\xi$  valószínűségi változó, amelynek valószínűség-sűrűségfüggvénye  $f(x)$ ; ezek után  $n$  független megfigyelést végzünk  $\xi$  értékére nézve; ha a kapott eredményeket  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  jelölik, kiszámítjuk az

$$S = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{g(\xi_k)}{f(\xi_k)}$$

számot, és ezt fogadjuk el  $I$  becslésül. Az  $S$  valószínűségi változó várható értéke nyilván

$$\mathbf{M}\{S\} = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx = I,$$

vagyis  $S$  az  $I$  integrálnak torzítatlan becslése.  $S$  szórása nyilván

$$\mathbf{D}\{S\} = \int_a^b \left[ \frac{1}{n} \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} - I \right]^2 f(x) dx,$$

tehát  $n$  értékét elegendő nagyra választva  $\mathbf{D}\{S\}$  tetszőleges kicsinnyé tehető. A leggyyszerűbb eset az, amikor

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$$



A vázolt eljárás teljesen analóg módon alkalmazható akárhány dimenziós integrálok becslésére, és a szórás mindig  $1/\sqrt{n}$  nagyságrendű lesz. Ez azért figyelemre méltó, mert a dimenziószám növelésével a szokásos numerikus kvadratura-eljárások pontossága csökken. Ha például egy kettős integrált közelítőleg ki akarunk számítani a függvény<sup>3)</sup>  $n$  pontban felvett értékéből, és az  $n$  pontot egy szabályos síkrács csomópontjaiban választjuk, a hiba  $1/\sqrt{n}$  nagyságrendű lesz, de a megfelelő eljárás hibája háromszoros integrálnál már  $n^{-1/3}$ ,  $k$ -dimenziós integrálnál pedig  $n^{-1/k}$  lesz. Ez a megjegyzés mutatja, hogy milyen előnyöket nyújthat a Monte-Carlo módszer.

A módszer elmélete még kezdeti stádiumban van, rendszeres és részletes összefoglalása az eddigi eredményeknek még nincsen. Nehezíti a szakirodalom áttekintését, hogy számos, a Monte-Carlo módszerrel foglalkozó tanulmányt csak belső használatra, bizalmas anyagként adtak ki, és ezeknek csak a címe hozzáférhető. A kérdés irodalmát illetőleg utalunk itt a [1] kötetre, amely nagyszámú, a Monte-Carlo módszerre vonatkozó dolgozaton kívül a kérdésre vonatkozólag eddigi irodalom szinte teljes felsorolását, és az egyes cikkek rövid összefoglalását is tartalmazza. A Monte-Carlo módszer egy konkrét kérdésnél való alkalmazásánál három alapkérdés merül fel:

- a) A sztochasztikus modell megválasztása,
- b) A sztochasztikus modell realizálása,
- c) A statisztikai becslés megválasztása.

Az a) probléma tulajdonképpen a megoldandó numerikus feladat valószínűségi számítási interpretációját jelenti. A b) probléma véletlen számtáblázatok konstruálását, illetőleg véletlen számsorozatok transzformálását jelenti. A c) probléma lényege a szórás csökkentése.

A szóban forgó módszerek jelentőségére vonatkozólag a hozzáférhető munkák kivétel nélkül egyetértenek a következőkben:

1. A Monte-Carlo típusú módszerek jelentőségét az adja meg, hogy éppen olyan esetekben alkalmazhatók, amikor más ismert módszerek gyakorlatilag nem jönnek számításba.

2. Nagy pontosságot a Monte-Carlo módszerrel csak igen nagy számolási munkával lehet elérni, tehát a módszer inkább első tájékozódásra szolgál.

3. A 2. alatti hátrányt ellensúlyozza, hogy a Monte-Carlo típusú módszerek általában különösen alkalmasak arra, hogy nagysebességű automatikus számológépek segítségével lehessen a számításokat elvégezni.<sup>4)</sup>

A legtöbb, a kérdéssel foglalkozó szerző az 1. ponttal kapcsolatban azt hangsúlyozza, hogy a Monte-Carlo módszerhez csak igen bonyolult numerikus feladatok esetében érdemes folyamodni<sup>5)</sup>; példaként azt szokták felhozni, hogy közönséges vagy kettős integrálok kiszámítására a szokásos bevált módszerekkel a Monte-Carlo módszer nem tud versenyezni, azonban igen sok dimenziós integrálok kiszámításánál a Monte-Carlo módszer lényegesen előnyösebb; ennek okára már rámutattunk. Ez a megállapítás azonban nem teljesen

<sup>3)</sup> Az integrálandó függvényről csak annak folytonosságát tesszük fel.

<sup>4)</sup> Egyesek szerint a módszerek egyenesen úgy tekintendők, mint a korszerű számológépek „testére szabott” számítási eljárások; ez azonban semmiképpen nem jelenti, hogy ilyen gépek hiányában a Monte-Carlo módszer egyáltalán nem alkalmazható, lásd pl.: [2].

<sup>5)</sup> Igen tanulságos pl. a [3] dolgozat, amely a Monte-Carlo módszert integrálegyenletek sajátértékeinek és sajátfüggvényeinek numerikus meghatározására használja.



helytálló, hiszen egy integrál numerikus kiszámításának bonyolultsága nemcsak az integrációs tartománytól függ, hanem legalább annyira függ az integrálandó függvény jellegétől, „sima” vagy „erősen oszcilláló” voltától. Egy folytonos függvény sokdimenziós integráljának numerikus kiszámítása lehet könnyű — ha ugyanis az integrandus rendkívül sima függvény —, viszont egy közönséges egydimenziós integrál kiszámítása lehet igen fogas kérdés — ha az integrandus bár folytonos ugyan, de nagyon erősen és szabálytalanul oszcillál.

Dolgozatunkban éppen az utóbbi kérdéssel fogunk foglalkozni. Célunk annak az elvi kérdésnek a tisztázása, hogy milyen esetekben célszerű a Monte-Carlo módszert alkalmazni. E kérdésre a *játékelmélet* segítségével adunk választ. Ki fogjuk mutatni, hogy a Monte-Carlo módszer némely esetben bizonyos értelemben a lehető legjobb, pontosabban: a játékelméletben szokásos értelemben *minimax* eljárás. A jelen dolgozatban adott tárgyalásmód arra is alkalmas, hogy megmutassa, hogy más, az említettektől eltérő esetekben milyen más módszer (esetleg melyik klasszikus módszer) lesz a minimax, azaz a legjobb módszer.

Az 1. §-ban a játékelmélet a továbbiakban szükséges alapfogalmainak ismertetjük, a 2. §-ban pedig ezen fogalmakat alkalmazzuk az integrálok numerikus kiszámítására szolgáló módszerek összehasonlítására.

### 1. §. A játékelmélet néhány alapfogalma

A játékelméletben (lásd pl. [4], [5], [6]) a következő, úgynevezett „normál alakra” szokták redukálni a legegyszerűbb, úgynevezett „kétszemélyes 0-összegű” játékokat. A két játékos, akiket  $A$ -val, illetve  $B$ -vel jelölünk, egymástól teljesen függetlenül és egyidejűleg szabadon választhat egy-egy *tiszta stratégiát* (játékrendszert), az  $A$  számára számításba jövő tiszta stratégiák halmaza legyen  $A$ ,  $A$  elemeit jelöljük  $a$ -val; a  $B$  számára számításba jövő tiszta stratégiák halmaza legyen  $B$ , ennek elemeit jelölje  $b$ . Feltesszük, hogy mindkét játékos ismeri az  $A$  és  $B$  halmazok összetételét; azonban az  $A$  játékos, amikor kiválasztja  $A$  egy  $a$  elemét, nem tudja, hogy a  $B$  játékos  $B$  mely  $b$  elemét választja ki ugyanakkor, és megfordítva. Mármost ha  $A$  az  $a$ ,  $B$  a  $b$  tiszta stratégiát választotta, ezáltal a játék kimenetele meg van határozva, és így meg van határozva  $A$  vesztesége (illetve nyeresége, ami negatív veszteséggént fogható fel), amit  $V(a, b)$ -vel jelölünk. Feltesszük, hogy  $B$  nyeresége egyenlő  $A$  veszteségével. Feltesszük továbbá, hogy mind az  $A$ , mind a  $B$  játékos veszteségének minimalizálására (nyereségének maximalizálására) törekszik. Egy játékot tehát két (absztrakt) halmaz,  $A$  és  $B$ , és az ezek direkt szorzatán értelmezett  $V(a, b)$  kétváltozós korlátos függvény ( $a \in A$ ,  $b \in B$ ) segítségével lehet matematikailag leírni. További fontos fogalom az úgynevezett *kevert stratégia* fogalma; az  $A$  játékos kevert stratégiája abban áll, hogy rendszertelenül, de meghatározott valószínűséggel hol az egyik, hol a másik stratégiát választja. A egy kevert stratégiája jellemezhető egy, az  $A$  bizonyos részhalmazából álló  $\sigma$ -gyűrűn értelmezett  $\alpha$  mértékkel, amelynek értéke a teljes  $A$  halmazon 1, és amely  $A$  minden (mérhető) részhalmazához hozzárendeli annak a valószínűségét, hogy  $A$  az illető részhalmazhoz tartozó valamelyik (tiszta) stratégiát választja. Egy kevert stratégiát a rövidség kedvéért az azt meghatározó  $\alpha$  mértékkel fogjuk jelölni. Az összes kevert stratégiák ( $A$ -n értelmezett mértékek) halmazát jelöljük  $M_A$ -val. Hasonlóképpen  $B$



egy kevert stratégiáját, illetve az azt meghatározó mértéket  $\beta$ -val, e kevert stratégiák halmazát  $M_B$ -vel jelöljük. A tiszta stratégiák is felfoghatók mint speciális kevert stratégiák; tiszta stratégiát kapunk ugyanis, ha az  $\alpha$  mérték elfajult, azaz  $A$  egyetlen  $a$  pontjához, illetve bármely ezt tartalmazó mérhető részhalmazhoz  $\alpha$  az 1 mértéket, bármely ezen  $a$  elemet nem tartalmazó mérhető részhalmazhoz pedig a 0 mértéket rendeli hozzá.

Mármost legyen pl.  $\alpha$  az  $A$  játékos egy kevert stratégiája. Határozzuk meg az  $A$  játékos lehetséges veszteségének — ami kevert stratégia esetében (feltéve, hogy  $V(a, b)$   $a$ -nak mérhető függvénye) valószínűségi változó — a várható értékét,  $B$  egy rögzített  $b$  stratégiája esetében; jelöljük ezt  $\bar{V}(\alpha, b)$ -vel, és határozzuk meg ennek maximumát, illetve, ha azt nem veszi fel, legkisebb felső korlátját, ha  $b$  befutja a  $B$  halmazt, vagyis a

$$\sup_{b \in B} \bar{V}(\alpha, b)$$

értékeket. Könnyen belátható, hogy nincs szükség arra, hogy  $\bar{V}(\alpha, b)$  felső határának megállapításánál a  $B$  játékos  $\beta$  kevert stratégiáit is figyelembe vegyünk; ugyanis hogyha  $\bar{V}(\alpha, \beta)$  jelöli  $\bar{V}(\alpha, b)$  várható értékét, ha  $b$  eloszlását a  $\beta$  mérték szabja meg, akkor

$$\sup_{\beta \in M_B} \bar{V}(\alpha, \beta) = \sup_{b \in B} \bar{V}(\alpha, b).$$

Ha létezik olyan  $\alpha_0 \in M_A$  kevert stratégia  $A$  számára, amelyre

$$\sup_{b \in B} \bar{V}(\alpha_0, b) = \inf_{\alpha \in M_A} \sup_{b \in B} \bar{V}(\alpha, b)$$

ezt az  $\alpha_0$  stratégiát az  $A$  játékos *minimax* stratégiájának nevezzük, és ha  $A$  ezt választja, akkor ezáltal várható maximális veszteségét minimálissá tette. A minimax stratégia választása tehát azt jelenti, hogy az  $A$  játékos abból indul ki, hogy ellenfele megtalálhatja az ő számára legelőnytelenebb játékrendszert, és arra törekszik, hogy vesztesége ez esetben is minimális (illetve nyeresége maximális) legyen.

## 2. §. Összegek és integrálok közelítő kiszámításának tárgyalása a játékelmélet alapján

Amikor egy határozott integrál közelítő kiszámítására szolgáló módszer jóságát vizsgáljuk, nyilván nem egy konkrét integrál kiszámítását tartjuk szem előtt (hiszen minden konkrét esetben ad hoc módszerek jöhetnek tekintetbe), hanem arra gondolunk, hogy olyan módszert adjunk meg, amely egy függvényosztályba tartozó bármely függvény integráljának kiszámítására használható sikerrel. A különböző módszerek jóságának mérlegelése csak akkor reális, ha a választott módszert nem egy, hanem sok esetben kívánjuk alkalmazni, hiszen általában igen rossz módszerek speciális esetekben nagyon jó



eredményt adhatnak. Kézenfekvő a numerikus integrálást mint „játékot” fel-fogni, amelynél az egyik játékos a matematikus, akinek stratégiája abban áll, hogy a számításba jövő módszerek közül egyet kiválaszt, az integrálandó függvényt azonban az „ellenfél” választja ki. (Az „ellenfél” ez esetben természetesen nem egy létező személy.) Az ellenfél egy tiszta stratégiája tehát abban áll, hogy függvények egy bizonyos osztályából kiválaszt egy meghatározott függvényt, amelyet a matematikusnak integrálnia kell.

Feltesszük, hogy amikor a matematikus a módszerét megválasztja, még nem tudja, hogy milyen függvényt kell integrálnia, és az „ellenfél”, amikor a függvényt kiválasztja, nem „tudja”, hogy a matematikus milyen módszer mellett döntött. Ahhoz, hogy a közelítő integrálást kétszemélyes 0-összegű játékként foghassuk fel, már csak arra van szükség, hogy a matematikus „veszteségét” definiáljuk. A legkisebb négyzetek módszerének analógiájára kézenfekvő a közelítő integrálásnál elkövetett hiba négyzetét tekinteni a matematikus „veszteségének”, bár persze a veszteség más, szintén észszerű értelmezései is elképzelhetők. Mi a következőkben mindig a hibanégyzettel fogjuk mérni a „veszteséget”. A közelítő integrálás ilyen felfogása mellett igen észszerű, ha a matematikus az „ellenfél” tiszta stratégiái halmazának, tehát az összes számbajövő integrálandó függvények halmazának ismeretében minimax stratégiát fog választani — ha ilyen létezik —, vagyis arra törekszik, hogy az integrálásnál elkövetett hiba (illetve annak négyzetének várható értéke) a módszere szempontjából legkedvezőtlenebb függvény esetében minimális legyen.

Meg fogjuk mutatni, hogy a számításba jövő függvények halmazának bizonyos eléggé tág választásánál a minimax stratégia a Monte-Carlo módszer választásában áll.

Az egyszerűség kedvéért közönséges integrálokra szorítkozunk, megjegyezve azonban, hogy az egész tárgyalás minden nehézség nélkül átvihető akárhánydimenziós integrálokra is.

Vizsgáljuk tehát a következő játékot:

A B játékos választ egy, a  $[0, 1]$  zárt intervallumban folytonos  $f(x)$  függvényt. Legyen

$$(1) \quad I = \int_0^1 f(x) dx .$$

Az A játékos, anélkül, hogy tudná, hogy B milyen függvényt választott, választ egy  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pontot az  $n$ -dimenziós tér  $K_n$  egységkockájában  $[0 \leq x_k \leq 1, k = 1, 2, \dots, n]$ . Ezek után kiszámítja az

$$(2) \quad S = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

közelítő összeget; az A játékos veszteségén a

$$(3) \quad \Delta = (S - I)^2$$



mennyiséget értjük. Az A játékos minden „tisza” stratégiája tehát  $K_n$  egy pontjának választásában áll. Az A játékos egy vegyes stratégiája ennél fogva jellemezhető egy  $\mu$  mértékkel, amely  $K_n$ -ben van definiálva, és amelyre  $\mu(K_n) = 1$ . A tiszta stratégiáknak természetesen olyan elfajult mérték felel meg, amely egyetlen pontra van koncentrálna. Jelölje  $\Phi$  azon  $f(x)$  folytonos függvények halmazát, amelyből a B játékos választhat. Az A játékos minimax stratégiája nyilván a  $\Phi$  halmaztól függ. Ha például  $\Phi$  kizárólag a legfeljebb harmadfokú polinomokból áll, és  $n = 6$ , akkor A számára egy minimax stratégia, ha az  $(x_1, x_2, \dots, x_6)$  pontot a következőképpen választja  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \frac{1}{2}$ ,  $x_6 = 1$ , vagyis a Simpson-féle szabály szerint jár el; ugyanis ez esetben  $\Delta = 0$ . Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor  $\Phi$  azon  $f(x)$  folytonos függvényekből áll, amelyekre

$$(4) \quad \int_0^1 \left[ f(x) - \int_0^1 f(u) du \right]^2 dx = 1,$$

vagyis  $\Phi$  az egységnyi négyzetes ingadozású függvényekből áll. Be fogjuk bizonyítani, hogy ez esetben az A játékos számára a minimax stratégia abban áll, hogy az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pontokat egymástól függetlenül találomra (egyenletes eloszlással) választja a  $[0, 1]$  intervallumban, más szóval a stratégiájára jellemző  $\mu$  mérték egyszerűen a közönséges Lebesgue-mérték  $K_n$ -ben.

Mielőtt ennek bizonyítására rátérnénk, a gondolatmenet megértésének megkönnyítése céljából egy az említett analóg diszkrét problémát tárgyalunk, mégpedig egy  $N$  tagú véges összeg közelítő kiszámítását oly módon, hogy az összeg tagjaiból csak  $n$  tagot adunk össze, és ezt az összeget  $N/n$ -nel szorozzuk.

Vizsgáljuk tehát először a következő problémát: Az

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k$$

összeget kívánjuk becsülni, úgy, hogy az  $y_1, y_2, \dots, y_N$  számok közül kiválasztunk  $n$  számot ( $n < N$ ), és ha ezek:  $y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_n}$ , akkor az  $Y$  összeget az

$$\eta = \frac{N}{n} \sum_{j=1}^n y_{k_j}$$

értékkel becsüljük. Jelöljük a rövidség kedvéért az  $1, 2, \dots, N$  számokból alkotott  $n$ -edosztályú  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  kombinációt  $\mathbf{k}$ -val. A fent leírt becslési eljárás jóságának megítéléséhez ismernünk kell azt, hogy a  $\mathbf{k}$  kombináció milyen valószínűséggel kerül kiválasztásra. Ezt a valószínűséget jelöljük  $p_{\mathbf{k}}$ -val, ahol tehát  $\mathbf{k}$  végigfut az  $1, 2, \dots, N$  elemekből képezhető  $\binom{N}{n}$  számú különböző  $n$ -edosztályú kombináción. Az  $\eta$  becslés hibáján az  $\eta$  valószínűségi változónak az  $Y$ -től való négyzetes eltéréseinek várható értékét értjük, vagyis a „hiba”:

$$(5) \quad \delta = \mathbf{M}\{(\eta - Y)^2\} = \sum_{\mathbf{k}} \left[ \frac{N}{n} (y_{k_1} + \dots + y_{k_n}) - Y \right]^2 p_{\mathbf{k}}.$$



Legyen

$$z_k = y_k - \frac{Y}{N},$$

$$(6) \quad \sum_{k=1}^N z_k = 0.$$

Tehát

$$(5') \quad \delta = \frac{N^2}{n^2} \sum_k (z_{k_1} + \dots + z_{k_n})^2 p_k.$$

Szorítkozzunk azokra az

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k$$

összegekre, amelyekre

$$(7) \quad \sum_{k=1}^N \left( y_k - \frac{Y}{N} \right)^2 = 1,$$

vagyis amelyekre

$$(7') \quad \sum_{k=1}^N z_k^2 = 1.$$

A minimax eljárás megkeresése tehát a következőt jelenti: Legyen  $P = (p_k)$  egy tetszőleges valószínűségeloszlás az  $1, 2, \dots, N$  számok összes  $n$ -edosztályú kombinációinak halmazában; legyen  $\delta(P)$  az (5') által definiált mennyiség maximuma, ha a  $z_k$  számok a (6) és (7') feltételeknek tesznek eleget; megkeresendő az a  $P_0$  eloszlás, amelyre  $\delta(P)$  értéke minimális.

A  $\delta$  kvadratikus alak a négyzetreemelések elvégzése után a következő alakú lesz:

$$\delta = \frac{N^2}{n^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_{ij} z_i z_j,$$

ahol

$$(8) \quad \delta_{jj} = \sum_{j \in k} p_k$$

annak a valószínűsége, hogy a  $j$  szám benne van a kiválasztott  $k$  kombinációban, és ha  $i \neq j$ .

$$(9) \quad \delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum_{\substack{i \in k \\ j \in k}} p_k$$

annak a valószínűsége, hogy az  $i$  és  $j$  számok mindketten benne vannak a  $k$  kombinációban. Legyen  $\xi_{ij} = 1$ , ha  $i$  és  $j$  mindketten hozzátartoznak a  $k$  kombinációhoz, ellenkező esetben legyen  $\xi_{ij} = 0$ . Mivel a

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \xi_{ij}$$



valószínűségi változó  $\delta_{jj}$  valószínűséggel  $(n-1)$ -gyel,  $1-\delta_{jj}$  valószínűséggel 0-val egyenlő, továbbá  $\mathbf{M}\{\xi_{ij}\} = \delta_{ij}$ , fennállnak a

$$(10) \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \delta_{ij} = \delta_{jj}(n-1) \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

összefüggések. Mivel továbbá

$$\sum_{j=1}^N \xi_{jj} = n,$$

tehát teljesül a

$$(11) \quad \sum_{j=1}^N \delta_{jj} = n$$

összefüggés is. (10)-ből és (11)-ből következik, hogy

$$(12a) \quad \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \delta_{ij} = n(n-1)$$

és

$$(12b) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_{ij} = n^2$$

Mivel a (6) és (7) feltételek a  $z_k$  változókban szimmetrikusak, ha  $P$  egy tetszőleges eloszlás, és  $P^n$  egy olyan eloszlás, amely  $P$ -ből az  $1, 2, \dots, N$  számok permutálása útján keletkezik, akkor  $\delta(P) = \delta(P^n)$ . Másrészt, ha képezzük különböző  $P_1, P_2, \dots, P_s$  eloszlások  $P$  keverékeloszlását  $q_1, q_2, \dots, q_s$  súlyokkal, akkor nyilvánvalóan

$$\delta(P) \leq \sum_{r=1}^s q_r \delta(P_r) \leq \max_{1 \leq r \leq s} \delta(P_r).$$

Ha tehát  $P_0$  az az eloszlás, amelyet úgy kapunk, hogy a  $P$  eloszlásból képezzünk  $N!$  eloszlást úgy, hogy az  $1, 2, \dots, N$  számokat az összes lehetséges módon permutáljuk, és ezen eloszlásoknak vesszük a keverékét oly módon, hogy abban mind az  $N!$  eloszlás egyforma  $1/N!$  súllyal szerepel, akkor

$$\delta(P_0) \leq \delta(P).$$

A  $P_0$  eloszlás azonban invariáns az  $1, 2, \dots, N$  számok minden permutációjára vonatkozólag. Ebből következik, hogy a  $P_0$  eloszlásnál  $p_k$  nem függ  $k$ -től, vagyis  $p_k = \binom{N}{n}^{-1}$ . Ez esetben természetesen  $\delta_{ij}$  sem függ az  $(i, j)$  ( $i \neq j$ ) számpártól és  $\delta_{jj}$  sem függ a  $j$  számtól, vagyis (10) és (11) szerint

$$\delta_{ij} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \quad \text{ha } i \neq j \quad \text{és} \quad \delta_{jj} = \frac{n}{N}.$$



Mivel  $\delta(P)$  értéke kizárólag a  $\delta_{ij}$  számoktól függ, ha  $P_0^*$  egy olyan eloszlás, hogy a hozzátartozó

$$\sum \sum \delta_{ij} z_i z_j$$

kvadratikus alak azonos a  $P_0$ -hoz tartozóval, akkor  $\delta(P_0^*) = \delta(P_0)$  és így  $\delta(P_0) = \delta(P_0^*) \leq \delta(P)$  bármely  $P$  eloszlásra. A  $\delta(P_0)$  értéket könnyen meghatározhatjuk, ugyanis a (6) és (7) feltételek mellett

$$\delta(P_0) = \frac{N(N-n)}{n(N-1)}$$

Ennélfogva bármely  $P$  eloszlásra

$$(13) \quad \frac{N(N-n)}{n(N-1)} = \delta(P_0) \leq \delta(P) .$$

Az elmondottakból következik, hogy ha az

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k$$

összeget az

$$\eta = \frac{N}{n} \sum_{j=1}^n y_{k_j}$$

kifejezéssel kívánjuk becsülni és a szóban forgó összeg választása kizárólag a

$$\sum_{k=1}^N \left( y_k - \frac{Y}{N} \right)^2 = 1$$

feltétellel van korlátozva, akkor egy lehetséges minimax stratégia abban áll, hogy az összes lehetséges  $n$ -edosztályú  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  kombinációkat ugyanazzal az  $\binom{N-1}{n}$  valószínűséggel választjuk. Ez esetben  $\eta$  torzítatlan becslése

$Y$ -nak és  $\eta$  szórásnégyzete  $\frac{N(N-n)}{n(N-1)}$  lesz.

A kapott eredményt interpretálhatjuk mint a numerikus integrációra vonatkozó állítást is. Ha ugyanis az

$$\int_0^1 f(t) dt$$

integrált kívánjuk meghatározni, ahol  $f(t)$  egy értéktáblázatával megadott függvény, és feltesszük, hogy  $f(t)$  értékeinek táblázata  $t$ -nek  $t_k = k \cdot 10^{-m}$



alakú értékeire van megadva ( $k = 1, 2, \dots, 10^m$ ), akkor az

$$\int_0^1 f(t) dt$$

integrálon nem érthetünk mást, mint az

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k$$

összeget, ahol  $N = 10^m$  és  $y_k = N^{-1}f(t_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Mármint az összehasonlítás tárgyát képező közelítő integrálási eljárások abban állnak, hogy valamilyen szabály szerint kiválasztunk a  $t_1, t_2, \dots, t_N$  pontok közül  $n$  darabot, és ha ezek  $t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_n}$ , akkor képezzük az

$$\eta = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^n y_{k_i} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(t_{k_j})$$

közelítő összeget.

A (7) feltevés a szóban forgó esetben azt jelenti, hogy

$$(14) \quad \int_0^1 \left[ f(x) - \int_0^1 f(t) dt \right]^2 dx = N.$$

A nyert eredmény úgy szól, hogy a felsorolt feltételek mellett a legcélszerűbb a  $k$  kombinációt véletlenszerűen megválasztani, oly módon, hogy teljesüljenek a

$$\delta_{jj} = \frac{n}{N} \quad \text{és} \quad \delta_{ij} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}, \quad \text{ha } i \neq j$$

feltételek. Ezt elérjük, ha pl. az összes  $k$ -kombinációt ugyanazzal a valószínűséggel választjuk.

Nyilvánvaló, hogy a (14) feltételt pótolhatjuk az

$$(15) \quad \int_0^1 \left[ f(x) - \int_0^1 f(t) dt \right]^2 = s^2$$

feltétellel; ehhez csak minden  $y_k$  értéket  $s/\sqrt{N}$ -nel kell beszoroznunk. Ez esetben  $\eta$  szórása, vagyis a Monte-Carlo eljárás hibája

$$s \sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)}}$$

lesz.

A kapott eredmény nyilvánvalóan teljesen független attól, hogy egy- vagy többdimenziós integrálról van szó.



Nincs akadálya annak, hogy a fentieket átvigyük a kérdés folytonos tárgyalásmódjára.

Legyen

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

a kiszámítandó integrál; közelítő eljárásunk álljon abban, hogy választunk egy  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  pontot az  $n$ -dimenziós tér  $K_n$  egységkockájában, és képezzük az

$$S = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

közelítő összeget. Ha az  $\mathbf{x}$  pont valószínűség-eloszlását  $K_n$ -ben a  $\mu$  mérték adja meg, akkor a várható hiba:

$$(16) \quad \Delta(f, \mu) = \int_{K_n} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - I \right)^2 d\mu$$

Osszuk fel az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  koordinátatengelyeket  $N$  egyenlő részintervallumra. Ezáltal  $K_n$ -et  $N^n$  egybevágó,  $1/N^n$  köbtartalmú kockára bontottuk fel. Jelölje  $\pi$  a  $K_n$  egységkockának egy olyan transzformációját, amely abban áll, hogy az említett  $N^n$  kockát valahogyan permutáljuk. Legyen  $\mu^\pi$  az a mérték, amibe a transzformációnál a  $\mu$  mérték átmegy, és legyen

$$\mu_N = \frac{\sum \mu^\pi}{(N^n)!}$$

ahol az összegezés az összes említett típusú  $\pi$  permutációkra vonatkozik. Ugyanúgy, mint a diszkrét esetben, belátható, hogy

$$\sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu^\pi) = \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu),$$

és így

$$(17) \quad \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu_N) \leq \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu),$$

ahol  $\Phi$  az összes

$$(18) \quad \int_0^1 \left[ f(x) - \int_0^1 f(t) dt \right]^2 dx = s^2$$

feltételeknek eleget tevő függvények halmazát jelöli. A  $\mu_N$  mérték az említett  $K_n$  kocka mindegyikéhez az  $1/N^n$  mértéket rendeli hozzá. Ebből következik, hogy ha  $E$   $K_n$ -nek egy tetszőleges mérhető részhalmaza, akkor

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(E) = \mu_0(E),$$



ahol  $\mu_0$  az  $n$ -dimenziós Lebesgue-mértéket jelöli. Ebből következik, hogy ha  $f(t)$  tetszőleges a (18) feltételnek eleget tevő függvény, akkor

$$\Delta(f, \mu_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta(f, \mu_N) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \left\{ \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu_N) \right\},$$

tehát (17) szerint

$$\Delta(f, \mu_0) \leq \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu)$$

és így

$$(19) \quad \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu_0) \leq \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu).$$

Ebből már következik, hogy a  $\mu_0$  mérték választása minimax stratégia választását jelenti. A  $\mu_0$  mérték választása azonban nyilvánvalóan azt jelenti, hogy az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pontokat egymástól függetlenül találomra választjuk a  $(0, 1)$  intervallumban, vagyis úgy, hogy  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a  $(0, 1)$  intervallumban egyenletes eloszlású és független valószínűségi változók. Vagyis a folytonos tárgyalásmód is ahhoz a konklúzióhoz vezetett, hogy a Monte-Carlo módszer választása minimax stratégiát jelent.  $\mu_0$  választása esetében  $\Delta(f, \mu_0) = s^2/n$ , vagyis  $S$  szórása  $s/\sqrt{n}$ . Abban az esetben, ha a számbajövő függvények összességét (15) helyett valamilyen más feltétel jellemzi, természetesen általában más lesz a minimax stratégia.

A Monte-Carlo módszerrel nagyszámú kísérletet végeztünk konkrét függvények integráljának közelítő kiszámítására. Az empirikus eredmények összhangban voltak a fent közölt elméleti megfontolásokkal. A kísérleteket a következőképpen végeztük el: Milliméterpapíron több, igen szabálytalan menetű, erősen ingadozó  $f(x)$  folytonos függvényt rajzoltunk fel. Abból a célból, hogy a függvények integráljának pontos értéke rendelkezésünkre álljon, a függvényeket úgy választottuk, hogy grafikonjaik egy törtvonalat alkossanak, amelynek töréspontjai a milliméterpapiros rácspontjaiba estek. Ezek után különböző  $n$  értékek mellett kiszámítottuk az

$$\int_0^1 f(x) dx$$

integrál közelítő értékét a következő három módszerrel:

1° Az  $x_k$  pontokat rögzített helyzetűnek és ekvidisztánsnak választottuk ( $x_k = k/n$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ).

2° Az  $x_k$  pontokat ekvidisztánsnak választottuk, azonban úgy, hogy az első pontot,  $x_1$ -et, egyenletes eloszlásúnak választottuk a  $(0, 1/n)$  intervallumban:

$$0 \leq x_1 < \frac{1}{n}; \quad x_k = x_1 + \frac{k-1}{n}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

3° Az  $x_k$  pontokat egymástól függetlenül, találomra választottuk a  $(0, 1)$  intervallumban egyenletes eloszlással.



Az egyenletes eloszlást természetesen csak közelítőleg valósíthattuk meg, véletlen számtáblázat segítségével.<sup>6)</sup>

Tapasztalatainkat a következőkben foglalhatjuk össze:

a) Amíg  $n$  értéke jóval kisebb volt, mint az  $f(x)$  függvényt ábrázoló törtvonal töréspontjainak száma, általában a 3<sup>o</sup> eljárás adta a legjobb eredményt.  $n$  értékének növelésével a 3<sup>o</sup> eljárás pontossága egy bizonyos határon túl már nagyon lassan javult, míg az 1<sup>o</sup>, illetve 2<sup>o</sup> eljárás pontossága lényegesen megjavult.

A tanulság ebből, hogy a Monte-Carlo módszert csak igen szabálytalan menetű függvények esetében érdemes alkalmazni, akkor, ha a felvehető pontok száma,  $n$ , olyan kicsiny, hogy ha az integrációs intervallumot  $n$  egyenlő részre osztjuk, ezeken az egyes részintervallumokon belül  $f(x)$  még erősen ingadozik; ha  $n$  értékét olyan nagyra vesszük, hogy az említett  $1/n$  hosszúságú részintervallumokon belül  $f(x)$  már csak keveset változik, a triviális ekvidisztáns felosztás jobb eredményt ad, mint a Monte-Carlo módszer.

b) A Monte-Carlo módszernél a hiba  $n$  növelésével (amint az várható is volt) általában  $1/\sqrt{n}$  nagyságrendű volt, tehát igen lassan csökkent csak. Ez is arra mutat, hogy ha az alappontok számának nagymértékű növelésére lehetőség van, nem célszerű a Monte-Carlo módszert alkalmazni, mert az eredmény nem áll arányban a végzett munka mennyiségével. Ezzel szemben előnyös a módszer, ha kevés számú alapponttal kívánunk dolgozni, és nincs szükségünk nagy pontosságra. Természetesen, mivel egyes esetekben az átlagosnál lényegesen nagyobb hibák is előfordulhatnak, a Monte-Carlo módszer alkalmazása elsősorban akkor indokolt, ha nagyszámú integrál közelítő kiszámítására van szükség, és megelégszünk azzal, hogy a kapott értékek az integrálok túlnyomó részére tűrhető közelítést adjanak.

c) A 2<sup>o</sup> eljárás, amely a triviális eljárás és a Monte-Carlo módszer kombinációjának tekinthető, nagy  $n$  esetében gyakran jobb közelítést nyújtott, mint az 1<sup>o</sup> eljárás.

Nyilvánvaló, hogy ha az  $x_k$  pontok mindegyikét taláломra választottuk volna, mégpedig úgy, hogy  $x_k$  egyenletes eloszlású legyen a  $((k-1)/n, k/n)$  részintervallumban, még jobb eredményt kaptunk volna. Ez érthető, hiszen ez az eljárás az úgynevezett „rétegezett mintavételnek” (stratified sampling) felel meg, és ezt más statisztikai eljárásoknál is sikerrel alkalmazzák a szórás csökkentésére.

Befejezésül még csak azt jegyezzük meg, hogy a véges összeg becslésére vonatkozó tárgyalás szoros kapcsolatban áll a véges sokaságokból való mintavétel kérdésével; e téren legújabbán J. HAJEK ért el figyelemre méltó eredményeket. (Ilyen vonatkozású előadásának kivonatát lásd e füzetben, a 635—636. oldalakon.)

(Beérkezett: 1956. X. 15.)

#### IRODALOM

- [1] H. A. MEYER (ed.): *Symposium on Monte-Carlo methods*. Wiley, New York, 1956.
- [2] I. M. HAMMERSLEY—K. W. MORTON: „Poor man's Monte-Carlo.” *Journal of the Royal Statistical Society Ser. B.* **16** (1954) 23—38.

<sup>6)</sup> Főként a [7] táblázatot használtuk.



- [3] V. S. VLADIMIROV: „On the application of Monte-Carlo methods for obtaining the lower characteristic number and the corresponding eigenfunction for a linear integral equation.” *Теория Вероятностей и ее Применения* 1 (1956) 113—130.
- [4] J. VON NEUMANN—O. MORGENSTERN: *Theory of games and economic behaviour*. Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [5] D. BLACKWELL—M. A. GIRSHICK: *Theory of games and statistical decisions*. Wiley, New York, 1954.
- [6] I. C. C. MCKINSEY: *Introduction to the theory of games*. McGraw-Hill (RAND Series), New York, 1952.
- [7] H. STEINHAUS: „Tablica liczb przetasowanych czterocyfrowych.” *Rozprawy Matematyczne* 6 (1954) 1—45.

## МЕТОДЫ „MONTE-CARLO” КАК МИНИМАКСНЫЕ СТРАТЕГИИ

I. PALÁSTI и A. RÉNYI

### Резюме

В настоящей работе рассматриваются методы Monte-Carlo с точки зрения теории игр. В качестве примера рассматривается численное приближение интеграла

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

непрерывной функции  $f(x)$  суммой

$$S = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

Чистая стратегия игрока В состоит из выбора функции  $f(x)$ . Предполагается, что множество  $\Phi$  допустимых функций  $f(x)$  состоит из всех непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 \left[ f(x) - \int_0^1 f(t) dt \right]^2 dx = s^2,$$

где  $s > 0$  заданная постоянная. Чистая стратегия игрока А состоит из выбора системы точек  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  интервала  $(0, 1)$ . Проигрыш А определяется величиной  $\Delta = (S - I)^2$ . Какую-нибудь смешанную стратегию игрока А очевидно определяет какая-нибудь мера  $\mu$ , определённая на измеримых подмножествах  $n$ -мерного куба  $K_n$ , и, если игрок А выбирает смешанную стратегию, определённую мерой  $\mu$ , то его средний проигрыш:

$$\Delta(f, \mu) = \int_{K_n} (S - I)^2 d\mu.$$

В работе доказывается, что одна из минимаксных стратегий игрока А есть смешанная стратегия, определённая обычной мерой Lebesgue-а  $\mu_0$  в  $K_n$ , т. е.

$$\sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu_0) \leq \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu)$$

для всех мер  $\mu$  в  $K_n$ . Таким образом для игрока А является минимаксной стратегией выбор независимых и случайных (т. е. равномерно распределённых) точек  $x_1, x_2, \dots, x_n$  интервала  $(0, 1)$ , т. е. выбор стратегии „Monte-Carlo”! То же самое имеет место и в случае  $r$ -мерного интеграла ( $r = 2, 3, \dots$ ). Средняя погрешность независимо от  $r$  равна  $s/\sqrt{n}$ . В связи с этим фактом часто подчёркивают, что метод Monte-Carlo выгоден лишь для



вычисления многомерных интегралов. В настоящей работе показывается, что эти же преимущества имеют место и в случае одномерных интегралов если предположить что интегрируемая функция сильно колеблется.

В работе исследуется и аналогичная проблема : оценка суммы

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k$$

величиной

$$\eta = \frac{N}{n} \sum_{j=1}^n y_{k_j},$$

где  $k = (k_1, \dots, k_n)$  некоторое подмножество множества  $(1, 2, \dots, N)$ . Показывается, что если множество допустимых сумм состоит из таких сумм

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k,$$

для которых

$$\sum_{k=1}^N \left( y_k - \frac{Y}{N} \right)^2 = s^2,$$

то мы получим минимаксную стратегию, если каждому подмножеству  $k$ , состоящему из  $n$  различных элементов множества  $(1, 2, \dots, N)$ , сопоставим одна и та же вероятность  $\binom{N}{n}^{-1}$ .

Подчеркивается, что если изменяется множество допустимых функций или сумм, то минимаксная стратегия также изменяется.

Наконец, описывается ряд опытов, произведённых методом Monte-Carlo.

## MONTE-CARLO METHODS AS MINIMAX STRATEGIES

I. PALÁSTI and A. RÉNYI

### Summary

Monte-Carlo methods are considered in the present paper from the point of view of the theory of games. As an example, the numerical approximation of the integral

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

of the continuous function  $f(x)$  by the sum

$$S = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

is considered. A pure strategy of the player B consists in the choice of a function  $f(x)$ . It is supposed that the set  $\Phi$  of admissible functions  $f(x)$  consists of all continuous functions satisfying the condition

$$\int_0^1 \left[ f(x) - \int_0^1 f(t) dt \right]^2 dx = s^2$$



where  $s > 0$  is a given constant. A pure strategy of player A consists in the choice of an  $n$ -tuple of points  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  of the interval  $(0, 1)$ . The loss of A is defined by  $\Delta = (S - I)^2$ . A mixed strategy of A is clearly determined by a measure  $\mu$  defined on the measurable subsets of the unit cube  $K_n$  of  $n$ -space, and if player A chooses the mixed strategy characterized by the measure  $\mu$  his average loss is

$$\Delta(f, \mu) = \int_{K_n} (S - I)^2 d\mu.$$

It is shown in the paper that a minimax strategy for player A is to choose the mixed strategy corresponding to the ordinary Lebesgue measure  $\mu_0$  in  $K_n$ , i. e.

$$\sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu_0) \leq \sup_{f \in \Phi} \Delta(f, \mu)$$

for any measure  $\mu$  in  $K_n$ . Thus a minimax strategy for player A is to choose the points  $x_1, x_2, \dots, x_n$  independently at random (i. e. with uniform distribution) in the interval  $(0, 1)$ , i. e. to play a „Monte-Carlo” strategy. The same holds for an  $r$ -dimensional integral ( $r = 2, 3, \dots$ ). The mean error is, independently of  $r$ , equal to  $s/\sqrt{n}$ . In connection with this fact, it has been frequently emphasized, that the Monte-Carlo method is advantageous only for many-dimensional integrals. In the present paper it is pointed out, that the same advantages present themselves for ordinary one-dimensional integrals, provided that the function to be integrated is very strongly oscillating.

The analogous problem of estimating the finite sum

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k$$

by

$$\eta = \frac{N}{n} \sum_{j=1}^n y_{k_j}$$

where  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  is some subset of the set  $(1, 2, \dots, N)$ , is also considered. It is shown that if the set of admissible sums consists of those sums

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k$$

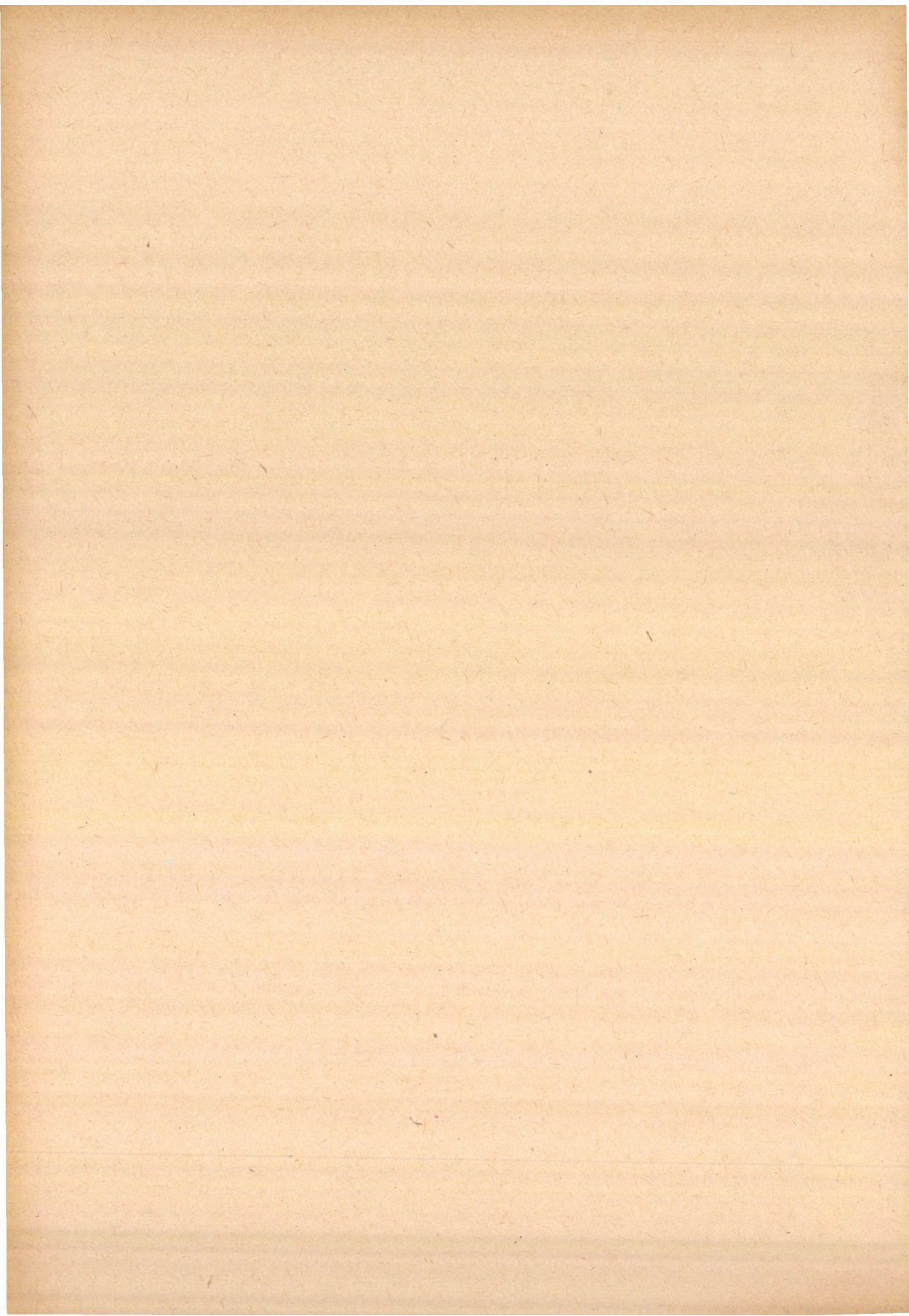
for which

$$\sum_{k=1}^N \left( y_k - \frac{Y}{N} \right)^2 = s^2,$$

a minimax strategy is if the same probability  $\binom{N}{n}^{-1}$  is attributed to all possible subsets  $k$  with  $n$  different elements of the set  $(1, 2, \dots, N)$ . It is pointed out that if the set of admissible functions resp. sums is changed, the minimax strategy changes too.

Finally account is given of some experimentation with Monte-Carlo methods.







## NÉHÁNY MEZŐGAZDASÁGI KÉRDÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI VIZSGÁLATA, I.

L. ZIERMANN MARGIT

A Mezőgazdasági Gépkísérleti Intézet azzal a kéréssel fordult Intézetünkhöz, hogy dolgozzunk ki mérési eljárást vetőgépek vetésének, azaz a vetőgép által kiszórt magok egyenetlenségének az értékelésére, továbbá, hogy négyzetes kukoricavetés esetén — amidőn a kukorica elvetése géppel történik és az elvetett sorokra merőlegesen haladva kapálják ki az úgynevezett fészektávolságok közötti felesleges magokat — határozzuk meg az így okozott szemvesztés mellett, hogy a fészekben lévő magok száma előirt biztonsággal egy adott értéknél nagyobb legyen.

A következőkben bizonyos modellt tételezve fel, a vetésegyenetlenség mérésének kérdését tárgyaljuk, a négyzetes kukoricavetéssel kapcsolatos vizsgálatokról egy későbbi cikkben számolunk be.

### 1. §. A vetés egyenetlenségének a vizsgálata

Tegyük fel, hogy a vetőgép egyenesen halad, miközben az úgynevezett csoroszlyából, melyen egymástól meghatározott távolságban nyílások vannak, magok esnek ki. A vetést egyenetlesnek mondjuk, ha a vetőgép által elvetett minden sorban a magok az előirt távolságra, az úgynevezett tőtávolságra helyezkednek el egymástól. A tőtávolságot a vetőgép (illetve a vetőgép tárcsájának) megfelelő beállításával kívánjuk elérni. Mégis, az elvetett sor egyenetlensége nem csupán attól függ, hogy a tárcsát megfelelőképpen állítottuk-e be, hanem számos más olyan tényező együttes hatásától is, amelyet előre értékelni, megbecsülni rendkívül bonyolult. Gondoljunk itt például a talaj egyenetlenségeire, az egész gép konstrukciójára (berezgés stb.). Azt, hogy a gép egyenetlesen vet-e, tapasztalati úton, kísérleti vetéssel kell ellenőrizni. A feladat, mint a bevezetésben mondtuk, olyan mérőszám konstruálása, amely kifejezi a vetés egyenetlenségét, és ezzel egyúttal magát a vetőgépet is minősíti.

Annak megállapítása, hogy az elvetett sorokban levő magok átlagban egymástól az előírásnak megfelelő távolságban (az úgynevezett tőtávolságra) helyezkednek-e el, nyilvánvalóan könnyű; egyszerűen megmérjük a kísérleti vetésnél két-két mag egymástól való távolságát (az összes elvetett magnál), s e távolságok átlagát véve eldönthetjük, hogy az előírásnak a tényleges átlagos tőtávolság megfelel-e. Ez az egy adat azonban, tudniillik az átlagos tőtávolság még nem ad teljes képet a vetésről. Nem közömbös ugyanis az, hogy ugyan-



azon átlagos tőtávolság esetén az elvetett magok úgy helyezkednek-e el, hogy túl nagy és túl kis magtávolságok változtatják egymást (tehát hézagok és torlódások), vagy pedig oly módon, hogy a tőtávolsághoz képest sem túl nagy, sem túl rövid távolságok nincsenek. Kézenfekvő tehát a magtávolságok szórását is meghatározni. Ha a szórás értéke közel zérus, akkor a vetés közel egyenletes; ha azonban a szórás nagysága nem sokkal kisebb, mint az átlagos tőtávolság, akkor már a szórás sem mond sokat a vetés egyenletességéről, ugyanis nincs tekintettel az egymás utáni magtávolságok kapcsolatára. Nem közömbös ugyanis a hézagok és torlódások egymásutánja sem, így például elképzelhető két olyan, egymástól különböző, de azonos átlagos tőtávolságú és szórású vetés, amelyek közül az egyikben egy-két hézag után egy-két magtorlódás következik, ismét egy-két hézag, magtorlódás, és így tovább, míg a másiknál számos hézag után sok magtorlódás. Az előbbi vetést mezőgazdasági okokból kedvezőbbnek minősítik.

Szükségesnek látszik tehát a magtávolságok közötti korrelációt is tekintetbe venni. Célszerű ezért két — vagy általában  $k$  — egymásutáni magtávolság szorzata négyzetgyökének — illetve általában  $k$ -adik gyökének — az átlagát venni. A vetésegyenletességgel foglalkozó szakirodalomban többnyire ezzel vagy más, hasonló mértékszámmal foglalkoznak.

A következőkben olyan matematikai modellt fogadunk el, amely lehetőleg jól írja le a vetés folyamatát, és amely ugyanakkor lehetővé teszi a vetésegyenletesség valószínűségszámítási tárgyalását. Következésképp, bizonyos feltevéseket kell tennünk a magok eloszlására nézve.

Tegyük fel, hogy a magok eloszlását egy  $T$  hosszúságú vetési szakaszon vizsgáljuk, jelöljük ezt  $(0, T)$ -vel. A  $(0, T)$  szakaszon az elvetett magok helyzetét jelöljük  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu$ , ahol  $\nu$  a  $(0, T)$  szakaszra jutó magok száma. Felteesszük, hogy a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu$  értékek és maga  $\nu$  is valószínűségi változó.

A valószínűségszámítási szempontból legegyszerűbb feltevés, ami gyakorlatilag elég indokolt, az, hogy a magok eloszlása Poisson-folyamatot alkot. Ezen azt értjük, hogy ha bevezetjük két-két szomszédos mag távolságára a  $\tau_i = \xi_{i+1} - \xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \nu - 1$ ) jelölést, akkor a  $\tau_i$  valószínűségi változók függetlenek és a  $\tau_i$  változó valószínűség-eloszlásfüggvénye:

$$P\{\tau_i < x\} = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x > 0.$$

Ebben az esetben a  $\nu$  valószínűségi változó Poisson-eloszlású, azaz

$$P\{\nu = n\} = e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!}$$

a valószínűsége annak, hogy a  $T$  hosszúságú szakaszra  $n$  mag esik. A  $\lambda$  számot a Poisson-folyamat sűrűségének nevezik; esetünkben ez nem más, mint az átlagos tőtávolság reciproka értéke. Ugyanis a  $\tau_i$  távolságok várható értéke:

$$M\{\tau_i\} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ismeretes, hogy a  $\tau_i$  távolságok szórása:

$$D\{\tau_i\} = \frac{1}{\lambda^2},$$

azaz a magtávolságok várható értéke és szórása megegyezik egymással.



A Poisson-folyamat a következő érdekes sajátssággal rendelkezik. Ha tudjuk, hogy a Poisson-folyamatban a  $(0, T)$  időközben  $n$  esemény történt, vagyis, hogy a  $T$  hosszúságú vetési sorban  $n$  mag van, akkor ezen feltétel mellett az  $n$  mag eloszlása megegyezik  $n$  számú, a  $(0, T)$  intervallumban egyenletes eloszlású véletlen pont eloszlásával. Tehát ha tudjuk, hogy  $\nu = n$ , akkor e feltételre vonatkozóan a  $\tau_i$  várható értéke:

$$\mathbf{M}\{\tau_i | \nu = n\} = \frac{T}{n+1},$$

és szórása:

$$\mathbf{D}\{\tau_i | \nu = n\} = \frac{T}{n+1} \sqrt{\frac{n}{n+2}};$$

ugyanis  $\tau_i$  sűrűségfüggvénye a  $\nu = n$  feltétel mellett  $n(1-x/T)^{n-1}/T$ , feltéve, hogy  $0 \leq x \leq T$ .

Megjegyezzük, hogy Poisson-folyamatot feltételezni indokolt abban az esetben, amidőn a gép ideális működési viszonyok mellett tökéletesen vetne ugyan, de az adott működési viszonyok mellett a magok kiszórása nem biztosan történik meg, hanem csak egy bizonyos valószínűséggel.

A Mezőgazdasági Gépkísérleti Intézet rendelkezésünkre bocsátotta egy kísérleti vetés adatait, ezek átlaga és szórása közel megegyező, ami feltevésünk mellett szól. Az adatok a következők:

**Keresztbe kapálás céljából sűrűn vetett kukoricaszemek elhelyezkedése egy sorban 0—1500 cm-ig**

1,4	107,8	318,2	468,7	682,6	857,0	1085,6	1318,4
9,2	109,6	322,3	493,8	686,7	865,4	1097,5	1335,2
11,0	113,2	325,7	507,6	688,2	868,4	1104,3	1337,7
12,6	132,5	330,2	511,0	704,3	869,5	1112,5	1340,7
19,3	138,6	331,7	512,8	708,5	871,4	1132,4	1341,7
19,4	142,8	348,7	512,8	710,0	874,5	1146,7	1355,5
20,7	143,0	350,2	525,7	712,6	875,2	1159,3	1363,0
22,8	144,6	355,0	551,2	717,8	884,3	1160,5	1369,2
25,6	154,0	361,2	587,1	723,2	888,1	1161,2	1371,4
28,5	159,7	368,5	588,3	730,7	912,5	1164,7	1372,5
40,2	164,5	373,4	596,0	750,6	917,6	1173,5	1373,8
40,7	165,7	374,5	607,5	755,6	919,4	1231,5	1380,1
47,8	179,7	376,5	623,8	756,4	921,2	1254,2	1395,0
56,2	182,5	379,4	625,5	767,5	923,4	1255,0	1402,4
71,3	238,2	387,8	629,1	767,9	958,5	1259,7	1427,5
71,9	266,5	392,5	636,0	770,1	961,2	1264,4	1433,2
81,2	281,3	401,8	640,9	785,8	974,1	1282,6	1435,1
82,9	283,5	411,6	644,7	800,0	986,7	1298,0	1448,5
83,7	302,0	421,7	649,2	822,5	1014,5	1308,2	1491,7
96,5	304,2	433,8	652,4	826,4	1020,2	1311,2	
104,5	310,6	447,0	668,9	828,9	1049,0	1316,0	

A magok átlagos tötávolsága fenti vetési sorban 9,33, a szórás 9,83.



## 2. §. Mértékszámok

A következőkben feltesszük, hogy a magok eloszlása a  $(0, T)$  szakaszon a Poisson-folyamat eseményeinek megfelelően történik. Jelölje  $\nu$  a  $(0, T)$  szakaszra eső magok számát és legyen  $k$  egy rögzített pozitív egész szám.

1. Javasoljuk a  $\{\tau_i\}$  magtávolságok egyenletességének mérésére a következő mennyiségeket: Legyen  $\vartheta_k = 0$ , ha  $\nu < k$ , és

$$\vartheta_k = \frac{\Theta_k}{\nu - k + 1}, \quad \text{ahol} \quad \Theta_k = \sum_{i=1}^{\nu-k+1} (\tau_i \tau_{i+1} \dots \tau_{i+k-1})^{1/k}, \quad \text{ha } \nu \geq k.$$

Abban az esetben, amidőn a magok eloszlása tökéletesen egyenletes, akkor  $\vartheta_k = \tau$ , ahol  $\tau$  az előírt tőtávolság. Modellünk szerint azonban a  $\{\tau_i\}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) értékek valószínűségi változók, tehát a  $\vartheta_k$  értékek is azok. Határozzuk meg ezek várható értékét és szórásnégyzetét.

A várható értékre vonatkozólag a teljes várható érték tétel alapján felírható, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{\vartheta_k\} &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu = n\} \mathbf{M}\{\vartheta_k | \nu = n\} = \\ (1) \quad &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\mathbf{P}\{\nu = n\}}{n - k + 1} \mathbf{M}\{\Theta_k | \nu = n\}, \end{aligned}$$

ahol

$$\mathbf{P}\{\nu = n\} = e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!},$$

és a  $\nu = n$  feltétel mellett  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  ekvivalens valószínűségi változók. A  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$  változók együttes sűrűségfüggvénye a  $\nu = n$  feltétel mellett:

$$\begin{aligned} (2) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_k | \nu = n) &= \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{T^k} \left(1 - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{T}\right)^{n-k}, \end{aligned}$$

ha  $0 < x_1, 0 < x_2, \dots, 0 < x_k$  és  $x_1 + x_2 + \dots + x_k < T$ , különben zérus. A fenti képlet könnyen indokolható, ha figyelembe vesszük, hogy a  $\nu = n$  feltétel mellett az  $n$  pont a  $(0, T)$  intervallumon egymástól függetlenül egyenletesen oszlik el. Mivel  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  ekvivalens változók, tehát bármely  $k$  különböző változó együttes sűrűségfüggvénye megegyezik a (2) alattival.

Számítsuk ki ezután az

$$\mathbf{M}\{(\tau_i \tau_{i+1} \dots \tau_{i+k-1})^{1/k} | \nu = n\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

illetve az ezekkel megegyező

$$\mathbf{M}\{(\tau_1 \tau_2 \dots \tau_k)^{1/k} | \nu = n\}$$

várható értékeket.



Általában tekintsük az

$$\mathbf{M}\{\tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_k^{\alpha_k} | \nu = n\}$$

várható értéket; ebből  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 1/k$  választással kapjuk a kívánt várható értéket.

Nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{\tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_k^{\alpha_k} | \nu = n\} &= \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{T^k} \int \dots \int_{\substack{x_1 + \dots + x_k < T \\ 0 < x_1, \dots, 0 < x_k}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k} \left(1 - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{T}\right)^{n-k} dx_1 dx_2 \dots dx_k. \end{aligned}$$

A jobboldal a Liouville-féle integráltétel [2] segítségével könnyen kiszámítható. E tétel szerint

$$\begin{aligned} &\int \dots \int_{\substack{x_1 + x_2 + \dots + x_k < T \\ 0 < x_1, 0 < x_2, \dots, 0 < x_k}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k} g(x_1 + x_2 + \dots + x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1) \Gamma(\alpha_2 + 1) \dots \Gamma(\alpha_k + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + 1)} \int_0^T g(y) y^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + k - 1} dy. \end{aligned}$$

Ennek alkalmazásával

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{\tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_k^{\alpha_k} | \nu = n\} &= \\ &= T^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k} \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(\alpha_1 + 1) \Gamma(\alpha_2 + 1) \dots \Gamma(\alpha_k + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + n + 1)}. \end{aligned}$$

Speciálisan

$$(3) \quad \mathbf{M}\{\tau_1^{1/k} \tau_2^{1/k} \dots \tau_k^{1/k} | \nu = n\} = T \frac{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^k}{n+1}$$

és

$$\mathbf{M}\{\theta_k | \nu = n\} = \sum_{i=1}^{n-k+1} \mathbf{M}\{\tau_i^{1/k} \tau_{i+1}^{1/k} \dots \tau_{i+k-1}^{1/k} | \nu = n\} = \frac{n-k+1}{n+1} T \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^k,$$

tehát

$$(4) \quad \mathbf{M}\{\vartheta_k | \nu = n\} = \frac{T}{n+1} \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^k.$$

Ugyanis az összeg minden tagja (3)-mal egyenlő.



Ezután (1) értelmében

$$\mathbf{M}\{\vartheta_k\} = T \left( \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)^k \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{(n+1)!}.$$

Átalakítva :

$$(5) \quad \mathbf{M}\{\vartheta_k\} = \frac{1}{\lambda} \left( \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)^{k-1} \left( 1 - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} \right).$$

Rendszerint azonban  $\lambda T$  igen nagy. Nagy  $\lambda T$ -értékekre jó közelítéssel a következő aszimptotikus képletet alkalmazhatjuk :

$$(6) \quad \mathbf{M}\{\vartheta_k\} \sim \frac{1}{\lambda} \left( \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)^k \left[ 1 - \Phi \left( \frac{k+1-\lambda T}{\sqrt{\lambda T}} \right) \right],$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Ha tehát  $k$  kicsiny  $\lambda T$ -hez képest, akkor

$$(7) \quad \mathbf{M}\{\vartheta_k\} \sim \frac{1}{\lambda} \left( \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)^k,$$

és a relatív hiba  $\exp(-\lambda T)$  nagyságrendű.

Mivel  $\lambda T$  a vizsgált szakaszra eső magok átlagos számát jelenti, feltehető, hogy  $\lambda T > 50$ ,  $k$  számára pedig a 2, 3, 4 értékek jönnek csak számításba, tehát számolhatunk egyszerűen úgy, mintha  $\mathbf{M}\{\vartheta_k\}$  pontosan a (7) reláció jobboldalával volna egyenlő.

A  $\vartheta_k$  számok várható értéke tehát  $k$ -val a következőképpen változik :

$k$	$\mathbf{M}\{\vartheta_k\}$
1	$\sim \frac{1}{\lambda} \cdot 1,0000 \dots$
2	$\sim \frac{1}{\lambda} \cdot 0,9477 \dots$
3	$\sim \frac{1}{\lambda} \cdot 0,7121 \dots$
4	$\sim \frac{1}{\lambda} \cdot 0,6749 \dots$
.	.
.	.
.	.



Ez a táblázat kiindulásul szolgálhat a ténylegesen észlelt  $\vartheta_k$  számok vizsgálatához. Ha a  $\vartheta_k / \left( \Gamma \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right)^{1/k}$  számok közel egyenlőek, akkor a magok feltehetőleg egyenletes eloszlásúak, ha viszont nem, akkor az egyenletestől eltérő vetéssel van dolgunk. További matematikai statisztikai módszerekkel eldönthető azután, hogy ez az eltérés a véletlennek tulajdonítható-e, vagy pedig valamely más olyan oknak, amelyet felderítve és kiküszöbölve a gép vetésének egyenletessége javítható. Arra is gondolhatunk, hogy az azonos vetési körülmények között több ugyanolyan típusú géppel végzett kísérleti vetéseket a fenti táblázat számaitól való százalékos eltérés alapján lehetne minősíteni, illetve rangsorolni.

Ismert általános tételekből következik, hogy a  $\vartheta_k$  valószínűségi változó 1 valószínűséggel konvergál az

$$M_k = \frac{1}{k} \left( \Gamma \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right)^{1/k}$$

határértékhez, ha  $T \rightarrow \infty$ .

Ez a következőképpen lehet belátni: Legyen

$$\xi_n = (\tau_n \tau_{n+1} \dots \tau_{n+k-1})^{1/k}.$$

Akkor a  $\xi_n$  valószínűségi változók stacionárius sorozatot alkotnak, továbbá  $\xi_n$  és  $\xi_m$  függetlenek, ha  $|n - m| \geq k$ . Mivel  $\mathbf{M}\{\xi_n\}$  létezik, 1 valószínűséggel létezik az

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$$

valószínűségi változó-sorozat határértéke, ha  $n \rightarrow \infty$ . Azt is könnyen be lehet látni,<sup>1)</sup> hogy ez a határérték éppen  $M_k$  (lásd pl.: [6], 465. oldal). Mivel továbbá  $\nu$  1 valószínűséggel  $+\infty$ -hez tart, ha  $T \rightarrow \infty$ , következik, hogy

$$\vartheta_k = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{\nu-k+1}}{\nu - k + 1}$$

is 1 valószínűséggel konvergál  $M_k$ -hoz.

2. Tekintsük a következőképpen értelmezett mértékszámokat:

$$R_k = \sum_{i=1}^{\nu-k+1} \left( \tau_i + \tau_{i+1} + \dots + \tau_{i+k-1} - \frac{k}{\lambda} \right)^2,$$

illetve

$$r_k = \frac{R_k}{\nu - k + 1},$$

<sup>1)</sup> Ugyanis a szóban forgó stacionárius sorozat „metrikusan tranzitív.”



ahol  $1/\lambda$  az előírt tőtávolságot jelenti. Ha a gépi vetés tökéletesen egyenletes (a gép a magokat pontosan az előírt tőtávolságra szórja ki), akkor valamennyi  $R_k$ , illetve  $r_k$  érték zérus.

Az általunk vizsgált modell esetén  $R_k$ , illetve  $r_k$  valószínűségi változó. Határozzuk meg először  $R_k$  várható értékét. A teljes várható érték tétel alapján

$$(8) \quad \mathbf{M}\{R_k\} = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{M}\{R_k | \nu = n\} \mathbf{P}\{\nu = n\}.$$

Mivel a  $\nu = n$  feltétel mellett  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  ekvivalens valószínűségi változók, tehát

$$\mathbf{M}\{R_k | \nu = n\} = (n - k + 1) \mathbf{M}\left\{\left(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k - \frac{k}{\lambda}\right)^2\right\}.$$

A  $\nu = n$  feltétel mellett  $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k$  sűrűségfüggvénye:

$$g_k(x | \nu = n) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{x}{T}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{T}\right)^{n-k} \frac{1}{T}, \text{ ha } x \geq 0.$$

Így

$$\mathbf{M}\{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k | \nu = n\} = \int_0^{\infty} x g_k(x | \nu = n) dx = \frac{kT}{n+1}$$

és

$$\mathbf{M}\{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k)^2 | \nu = n\} = \int_0^{\infty} x^2 g_k(x | \nu = n) dx = \frac{k(k+1)T^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Következésképpen

$$(9) \quad \mathbf{M}\{R_k | \nu = n\} = (n - k + 1) \left\{ \frac{k(k+1)T^2}{(n+1)(n+2)} - 2 \frac{k}{\lambda} \frac{kT}{n+1} + \frac{k^2}{\lambda^2} \right\}.$$

Fentiek ismeretében  $\mathbf{M}\{R_k\}$  explicite felírható (8) alapján. Aszimptotikusan,  $T \rightarrow \infty$  esetben

$$\mathbf{M}\{R_k\} \sim \frac{kT}{\lambda}.$$

(9) felhasználásával

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{r_k\} &= \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \frac{k(k+1)T^2}{(n+1)(n+2)} - 2 \frac{k}{\lambda} \frac{kT}{n+1} + \frac{k^2}{\lambda^2} \right\} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} = \\ &= \frac{k(k+1)}{\lambda^2} \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^{n+2}}{(n+2)!} - \frac{2k^2}{\lambda^2} \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{k^2}{\lambda^2} \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} = \\ &= \frac{k}{\lambda^2} \left( 1 - \sum_{n=0}^{k+1} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} \right) + \frac{k^2}{\lambda^2} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^k}{k!} \left( 1 - \frac{\lambda T}{k+1} \right). \end{aligned}$$



Igen nagy  $T$  értékekre

$$\mathbf{M}\{r_k\} \sim \frac{k}{\lambda^2}.$$

Ha a vetés egyenletes, akkor valamennyi  $R_k = 0$ , illetve  $r_k = 0$ . Ha a vetés az általunk leírt modell szerint történik, akkor az  $\{r_k/k\}$  sorozat közel állandó. Ha ez nem teljesül, akkor a magok eloszlása eltér az egyenletességtől. Ugyanugy, mint  $\vartheta_k$  esetében, ez esetben is meg lehet mutatni, hogy  $r_k$  a valószínűséggel konvergál  $k/\lambda^2$ -hez, ha  $T \rightarrow \infty$ .

KERTÉSZ ISTVÁN [4] a vetésegységtelenség mérésére a  $\sigma_k$  mértékszámot javasolja, amelyet  $r_k$  segítségével a következőképpen fejezhetünk ki:

$$\sigma_k = \sqrt{r_{2k-1}}.$$

Egyenletes vetés esetén valamennyi  $\sigma_k = 0$ .

(Beérkezett: 1956. IX. 17.)

#### IRODALOM

- [1] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
- [2] Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ: *Курс дифференциального и интегрального исчисления (Том III., p. 478.)* Гостехиздат, Москва, 1949.
- [3] KERTÉSZ I.: *Mezőgazdasági gépkísérletekkel kapcsolatos statisztikai számítások*. Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványai, Budapest, 1946.
- [4] KERTÉSZ I.: *A hosszanti vetésegységtelenség kiértékelésének új módszere*. (Sajtó alatt)
- [5] TAKÁCS L.: „Poisson folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 473–504.
- [6] J. L. DOOB: *Stochastic processes*. Wiley, New York, 1953.

#### ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ВОПРОСОВ

M. L. ZIERMANN

#### Резюме

Работа занимается с различными величинами, которые измеряют равномерность сева сеялкой. Работа исходит из предположения, что в случае равномерного сева зерна располагаются вдоль линии, по которой следует сеялка, соответствуя процессу Пуассона, т. е. расстояния между отдельными зернами, которые обозначаются через  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ , — независимые случайные величины с одинаковыми показательными распределениями. Рассмотрим зерна, попадающие на фиксированный отрезок  $(0, T)$ . Их число,  $\nu$  также является случайной величиной. Автор для измерения равномерности сева предлагает величину

$$(1) \quad \vartheta_k = \frac{\Theta_k}{\nu - k + 1},$$



где  $k$  данное целое положительное число,

$$(2) \quad \Theta_k = \sum_{i=1}^{v-k+1} (\tau_i \tau_{i+1} \dots \tau_{i+k-1})^{1/k} \text{ для } v \geq k \text{ и } \Theta_k = 0 \text{ для } v < k.$$

Она доказывает, что если сев в указанном смысле равномерен, то математическое ожидание величины  $\vartheta_k$

$$(3) \quad \mathbf{M}\{\vartheta_k\} = \frac{1}{\lambda} \left[ \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]^k \left( 1 - \sum_{n=0} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} \right),$$

где  $1/\lambda$  математическое ожидание расстояния между зернами. Доказано, что для  $T \rightarrow \infty$ ,  $\vartheta_k$  сходится с вероятности 1 к пределу  $\frac{1}{\lambda} \left( \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)^k$ . Работа занимается также следующим альтернативным способом измерения равномерности сева:

$$(4) \quad r_k = \frac{R_k}{v - k + 1},$$

где

$$(5) \quad R_k = \sum_{i=1}^{v-k+1} \left( \tau_i + \tau_{i+1} + \dots + \tau_{i+k-1} - \frac{k}{\lambda} \right)^2.$$

Доказывает, что, если  $T \rightarrow \infty$ , то

$$(7) \quad \mathbf{M}\{R_k\} \sim \frac{kT}{\lambda},$$

и при  $T \rightarrow \infty$ ,  $r_k$  сходится с вероятности 1 к пределу  $k/\lambda^2$ .

## WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORETISCHE UNTERSUCHUNG EINIGER LANDWIRTSCHAFTLICHER PROBLEME

M. L. ZIERMANN

### Zusammenfassung

In der Arbeit werden verschiedene Verfahren zur Messung der Gleichmässigkeit der von Säemaschinen geleisteten Saat angegeben. Es wird angenommen, dass die Samen längs der Linie, auf der die Säemaschine fortschreitet, Poissonsche Verteilung besitzen, d. h. die Abstände der nächstbenachbarten Samen sind unabhängig und von exponentialer Verteilung. Diese Abstände mögen mit  $\tau_1, \tau_2, \dots$  bezeichnet werden.

Als Mass der Gleichmässigkeit der Saat wird die Zahl

$$(1) \quad \vartheta_k = \frac{\Theta_k}{v - k + 1}$$

vorgeschlagen, wobei  $v$  den Anzahl der Samen auf der Strecke  $(0, T)$  bedeutet,  $k$  eine gegebene positive ganze Zahl ist, und

$$(2) \quad \Theta_k = \sum_{i=1}^{v-k+1} (\tau_i \tau_{i+1} \dots \tau_{i+k-1})^{1/k}$$

für  $v \geq k$  und  $\Theta_k = 0$ , wenn  $v < k$ .

Es wird gezeigt, dass für den Erwartungswert  $\mathbf{M}\{\vartheta_k\}$  von  $\vartheta_k$  die Formel

$$(3) \quad \mathbf{M}\{\vartheta_k\} = \frac{1}{\lambda} \left( \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)^k \left( 1 - \sum_{n=0} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} \right)$$



gilt, wobei  $\lambda$  den Erwartungswert der  $\tau_j$  bedeutet. Es wird gezeigt dass für  $T \rightarrow \infty$   $\vartheta_k$  mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen den Grenzwert  $\frac{1}{\lambda} \left( \Gamma \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right)^k$  strebt.

Ferner wird eine andere Masszahl der Gleichmässigkeit der Saat behandelt. Es sei gesetzt

$$(4) \quad r_k = \frac{R_k}{v - k + 1}$$

wobei

$$(5) \quad R_k = \sum_{i=1}^{v-k+1} \left( \tau_i + \tau_{i+1} + \dots + \tau_{i+k-1} - \frac{k}{\lambda} \right)^2.$$

Es wird die asymptotische Relation

$$(6) \quad \mathbf{M}\{R_k\} \sim \frac{kT}{\lambda} \quad (T \rightarrow \infty)$$

bewiesen ferner wird bewiesen dass für  $T \rightarrow \infty$   $r_k$  mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen  $k/\lambda^2$  strebt.







# CIKLIKUS SZIMMETRIÁVAL BÍRÓ TÉRBELI RÁCSOS TARTÓK RÚDERŐINEK MEGHATÁROZÁSA HIPERMATRIXOK ALKALMAZÁSÁVAL

BÉRES ELEK, LOVASS-NAGY VIKTOR és SZABÓ JÁNOS

## Bevezetés

Jelen dolgozat célja a matrixelmélet néhány újabb eredményének alkalmazása olyan térbeli rácsos tartók vizsgálatára, amelyek felépítésében ciklikus szimmetria mutatkozik. Az ilyen rácsos tartók rúdjai egyrészt egymással párhuzamos síkokban elhelyezkedő  $m$ -oldalú szabályos sokszögeket (úgynevezett *gyűrűket*), továbbá a gyűrűk síkjaira merőleges síkokban elhelyezkedő (általában nyílt) egymással egybevágó úgynevezett *meridiánpolygonokat* alkotnak, másrészt mint ferde *rács-rudak* létesítenek kapcsolatot a gyűrűk és meridiánpolygonok között. A rácsos tartó rúdjai kivétel nélkül csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz a tartó csomópontjaiban. Általában minden egyes csomópontban gyűrű-, meridián- és rács-rudak találkoznak. A megtámasztásokra vonatkozólag különleges kikötést nem teszünk. A tartó felépítésében mutatkozó ciklikus szimmetria tehát azt jelenti, hogy ha a tartót a gyűrűk középpontjain átmenő szimmetria-tengelye körül  $2\pi/m$  szöggel, illetve e szög egészszámu többszörösével elforgatjuk, a tartó elforgatás előtti helyzetével egybevágó helyzetbe jut, feltéve, hogy az ugyanazon gyűrűhöz tartozó rudak teljesen megegyezők, továbbá a két szomszédos gyűrű közé eső rácsrudak teljesen megegyezők, és végül két szomszédos gyűrű közé eső meridiánrudak is teljesen megegyezők.

Az alábbiakban vizsgálatainkat a ciklikus szimmetriával bíró térbeli rácsos tartóknak úgy a statikailag határozott, mint a statikailag határozatlan esetére ki fogjuk terjeszteni (lásd: [1], 455. oldal). A ciklikus szimmetriát mutató térbeli rácsos tartók vizsgálatával több szerző foglalkozott (lásd: [2], [3], [4]), e dolgozatokban azonban nem nyernek alkalmazást a matrixszámítás által nyújtott előnyök.

## Jelölések :

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \dots\dots\dots a_{ij} \text{ skalárelemekből álló kvadratikus matrix} \quad ([5])$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \mathbf{A}_{ij} \text{ blokkokból álló kvadratikus hipermatrix} \quad ([6], [7])$$



$\mathbf{A}^{-1}$ .....	$\mathbf{A}$ reciproka (inverze)
$\mathbf{A}^*$ .....	$\mathbf{A}$ transzponáltja
$\text{adj } \mathbf{A}$ .....	$\mathbf{A}$ adjungáltja
$ \mathbf{A}  = \det \mathbf{A}$ .....	$\mathbf{A}$ determinánsa
$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ .....	oszlopmatrix (vektor)
$\mathbf{a}^* = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n]$ .....	sormatrix (vektor), (az $\mathbf{a}$ oszlopmatrix konjugált transzponáltja)
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [\mathbf{A} b_{ij}]; \mathbf{B} = [b_{ij}]$ .....	} direkt szorzatok
$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = [a_{ij} \mathbf{B}]; \mathbf{A} = [a_{ij}]$ .....	
$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ .....	diagonálmatrix
$\mathbf{C}(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ .....	ciklikus matrix
$\mathbf{E} = \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$ .....	egységmatrix
$\mathbf{Q} = \mathbf{C}(0, 1, \dots, 0)$ .....	primitív ciklikus matrix
$\lambda_v$ .....	az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ $v$ -edik sajátértéke
$\omega_v$ .....	az $\mathbf{Q}$ $m$ -edrendű primitív ciklikus matrix $v$ -edik sajátértéke, azaz az $x^m = 1$ egyenlet $v$ -edik gyöke (az $m$ -edik egységgyökök közül a $v$ -edik)
$\mathbf{u}_v^* = [1, \bar{\omega}_v, \bar{\omega}_v^2, \dots, \bar{\omega}_v^{m-1}]$	
$C_{ij}$ .....	az (alulról számítva) $i$ -edik szabályos sokszöget alkotó csomópontok közül (az elsőnek választott csomóponttól jobbraeső $j$ -edik csomópont)
$S_{hk}^{ij}$ .....	a statikailag határozott tartó $C_{ij}$ és $C_{hk}$ csomópontjait összekötő rúdban fellépő rúd-erő (pozitív előjelű, ha a rúd húzott; negatív előjelű, ha a rúd nyomott)
$P^{ij}$ .....	a $C_{ij}$ csomópontban támadó erő
$P_x^{ij}, P_y^{ij}, P_z^{ij}$ .....	a $P^{ij}$ erőnek a $C_{ij}$ csomópontához rendelt $(x, y, z)$ koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos összetevői
$(x, y, z)$ .....	a $C_{ij}$ csomópontához rendelt koordináta-rendszer; origója a $C_{ij}$ csomópont; $x$ -tengelye a csomóponton átmenő gyűrű és meridián-polygon síkjának metszésvonala; $y$ -tengelye a gyűrű síkjában, $z$ -tengelye pedig a meridián-polygon síkjában fekvő, az $x$ -tengelyre merőleges egyenes. A pozitív $x$ -tengely a szerkezetből kifelé, a pozitív $z$ -tengely a nagyobb indexű gyűrű síkja felé mutat, az $y$ -tengely pozitív iránya pedig úgy választandó, hogy $(x, y, z)$ az adott sorrendben jobbesavar-rendszert alkosson.



# 1. §. Ciklikus blokkokból álló hipermatrixok analitikus függvényének kifejezése direkt szorzatok segítségével

Legyen a csupa  $m$ -edrendű kvadratikus blokkokból álló  $(m \times n)$ -edrendű  $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$  hipermatrix valamennyi blokkja ciklikus matrix. Ez esetben bármely  $\mathbf{A}_{ij}$  blokk előállítható

$$(1.1) \quad \mathbf{A}_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{v=0}^{m-1} \lambda_{v,ij} \mathbf{u}_v \mathbf{u}_v^*$$

kanonikus alakban, ahol

$$(1.2) \quad \lambda_{v,ij} = a_{0,ij} + a_{1,ij} \omega_v + \dots + a_{m-1,ij} \omega_v^{m-1} ;$$

$$(1.3) \quad \omega_v = e^{\frac{2\pi i v}{m}} \quad (v = 0, 1, \dots, m-1 ; i \text{ a képzetes egységet jelenti}) .$$

A ciklikus blokkok fenti kanonikus előállításának felhasználásával az  $\mathbf{A}$  hipermatrix nyilván felírható az alábbi módon, azaz direkt szorzatok összegeként :

$$(1.4) \quad \mathbf{A} = \frac{1}{m} \sum_{v=0}^{m-1} [\lambda_{v,ij}] \times \cdot \mathbf{u}_v \mathbf{u}_v^* .$$

Mint hogy két direkt szorzat összeszorzása az

$$(\mathbf{U}_1 \times \cdot \mathbf{V}_1) \cdot (\mathbf{U}_2 \times \cdot \mathbf{V}_2) = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 \times \cdot \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2$$

alakban végezhető (feltéve, hogy  $\mathbf{U}_1$  és  $\mathbf{U}_2$ , illetve  $\mathbf{V}_1$  és  $\mathbf{V}_2$  az adott sorrendben konformábilisak), továbbá mivel

$$\mathbf{u}_\mu^* \mathbf{u}_v = \delta_{\mu v} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu \neq v \\ 1, & \text{ha } \mu = v \end{cases} ,$$

nyilvánvaló, hogy az  $\mathbf{A}$  hipermatrix bármely analitikus függvénye az alábbi kanonikus alakban állítható elő :

$$(1.5) \quad f(\mathbf{A}) = \frac{1}{m} \sum_{v=0}^{m-1} f([\lambda_{v,ij}]) \times \cdot \mathbf{u}_v \mathbf{u}_v^* .$$

Abban a speciális — de a statikailag határozatlan rácsos tartók matematikai vizsgálatánál előforduló — esetben, amidőn az  $\mathbf{A}$  hipermatrix valamennyi blokkja nem csupán ciklikus, hanem egyidejűleg szimmetrikus is, tehát

$$a_{v,jk} = a_{m-v,jk} ,$$



akkor az (1.2) egyenletből azt nyerjük, hogy

$$(1.6) \quad \lambda_{\nu, jk} = a_{0, jk} + a_{1, jk} (\omega_{\nu} + \omega_{\nu}^{m-1}) + a_{2, jk} (\omega_{\nu}^2 + \omega_{\nu}^{m-2}) + \dots +$$

$$+ \begin{cases} a_{\frac{m-1}{2}, jk} \left( \omega_{\nu}^{\frac{m-1}{2}} + \omega_{\nu}^{\frac{m+1}{2}} \right), & \text{ha } m \text{ páratlan szám;} \\ a_{\frac{m}{2}, jk} \omega_{\nu}^{\frac{m}{2}}, & \text{ha } m \text{ páros szám;} \end{cases}$$

és mert

$$\omega_{\nu}^l + \omega_{\nu}^{m-l} = e^{\frac{2\pi i \nu}{m} l} + e^{\frac{2\pi i \nu}{m} (m-l)} = e^{\frac{2\pi i \nu}{m} l} + e^{-\frac{2\pi i \nu}{m} l} = 2 \cos \frac{2\pi \nu l}{m},$$

tehát

$$(1.7) \quad \lambda_{\nu, jk} = a_{0, jk} + 2a_{1, jk} \cos \frac{2\pi \nu}{m} + 2a_{2, jk} \cos 2 \frac{2\pi \nu}{m} + \dots +$$

$$+ \begin{cases} 2a_{\frac{m-1}{2}, jk} \cos \frac{m-1}{2} \frac{2\pi \nu}{m}, & \text{ha } m \text{ páratlan szám;} \\ (-1)^{\nu} a_{\frac{m}{2}, jk}, & \text{ha } m \text{ páros szám.} \end{cases}$$

Mínthogy pedig — az (1.7) egyenletből nyilvánvaló módon — az  $A_{jk}$  sajátértékei között fennáll a

$$\lambda_{\nu, jk} = \lambda_{m-\nu, jk}$$

összefüggés, írhatjuk, hogy

$$(1.8) \quad A_{jk} = \frac{1}{m} \left[ \lambda_{0, jk} u_0 u_0^* + \sum_{\nu=1}^{\frac{m-1}{2}} \lambda_{\nu, jk} (u_{\nu} u_{\nu}^* + u_{m-\nu} u_{m-\nu}^*) \right],$$

ha  $m$  páratlan szám, és

$$(1.9) \quad A_{jk} = \frac{1}{m} \left[ \lambda_{0, jk} u_0 u_0^* + \sum_{\nu=1}^{\frac{m}{2}-1} \lambda_{\nu, jk} (u_{\nu} u_{\nu}^* + u_{m-\nu} u_{m-\nu}^*) + \right.$$

$$\left. + \lambda_{\frac{m}{2}, jk} u_{\frac{m}{2}} u_{\frac{m}{2}}^* \right],$$

ha  $m$  páros szám. Mínthogy továbbá

$$\bar{\omega}_{m-\nu} = \omega_{\nu}$$



és

$$\omega_v^l + \bar{\omega}_v^l = \cos \frac{2\pi v}{m} l + i \sin \frac{2\pi v}{m} l + \cos \frac{2\pi v}{m} l - i \sin \frac{2\pi v}{m} l = 2 \cos \frac{2\pi v}{m} l,$$

tehát ha bevezetjük a

$$(1.10) \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [1, 1, \dots, 1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1.11) \quad 2 \mathbf{P}_v = \mathbf{u}_v \mathbf{u}_v^* + \mathbf{u}_{m-v} \mathbf{u}_{m-v}^*$$

$$(1.12) \quad \mathbf{P}_{\frac{m}{2}} = \mathbf{u}_{\frac{m}{2}} \mathbf{u}_{\frac{m}{2}}^*$$

rövid jelöléseket, általában írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2 \mathbf{P}_v &= \mathbf{C} \left( 2, 2 \cos \frac{2\pi v}{m}, \dots, 2 \cos (m-1) \frac{2\pi v}{m} \right) = \\ &= 2 \mathbf{C} \left( 1, \cos \frac{2\pi v}{m}, \dots, \cos (m-1) \frac{2\pi v}{m} \right) \end{aligned}$$

továbbá, ha bevezetjük az alábbi rövidítést:

$$(1.13) \quad \mathbf{A}_v = [\lambda_{v,ij}] ; \quad (\lambda_{v,jk} = \lambda_{v,kj})$$

akkor nyilvánvaló, hogy az  $\mathbf{A}$  hipermatrix valamely analitikus függvénye a következő alakban írható:

$$(1.14) \quad f(\mathbf{A}) = \frac{1}{m} \left[ f(\mathbf{A}_0) \times \cdot \mathbf{P}_0 + 2 \sum_{v=1}^{\frac{m}{2}-1} f(\mathbf{A}_v) \times \cdot \mathbf{P}_v + f(\mathbf{A}_{\frac{m}{2}}) \times \cdot \mathbf{P}_{\frac{m}{2}} \right],$$

ha  $m$  páros szám, továbbá

$$(1.15) \quad f(\mathbf{A}) = \frac{1}{m} \left[ f(\mathbf{A}_0) \times \cdot \mathbf{P}_0 + 2 \sum_{v=1}^{\frac{m-1}{2}} f(\mathbf{A}_v) \times \cdot \mathbf{P}_v \right],$$

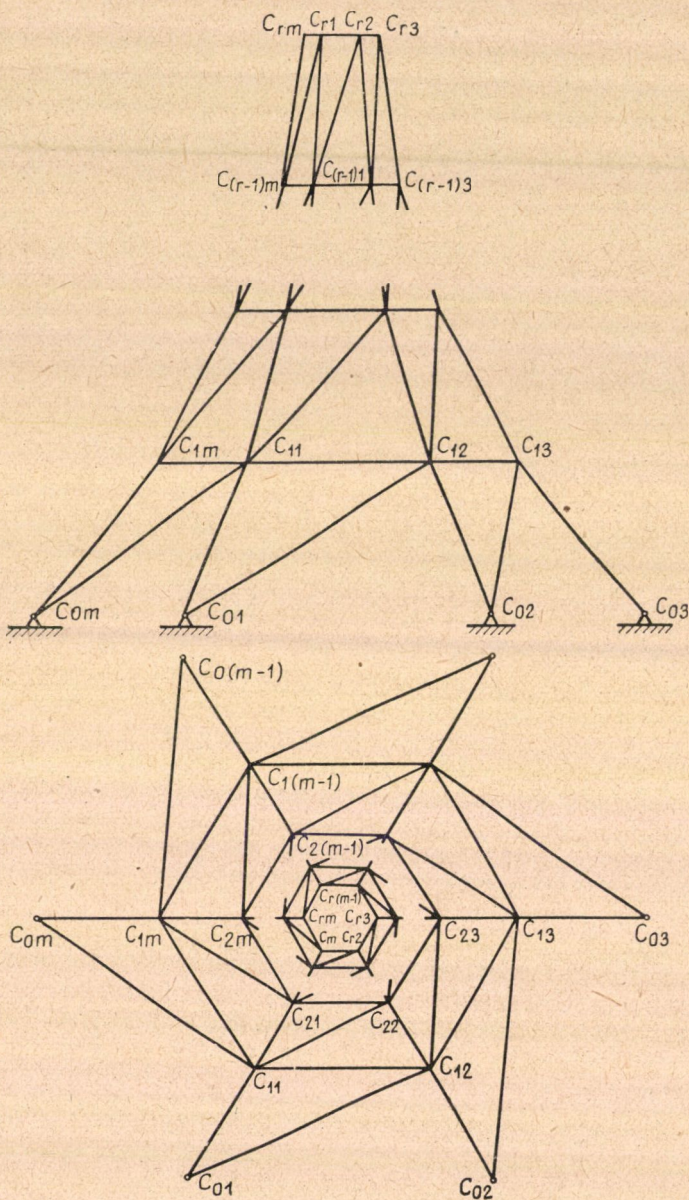
ha  $m$  páratlan szám. Az  $f(\mathbf{A})$  matrix-függvény ezen előállításában szereplő  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_v$   $m$ -edrendű matrixok valamennyi eleme valós szám, továbbá az  $\frac{1}{m} \mathbf{P}_0$  és  $\frac{1}{m} \mathbf{P}_v$  matrixok projektorok (idempotens matrixok).



## 2. §. Statikailag határozott tartók rúderőinek számítása

Az alábbiakban a következő két — statikailag határozott — tartótípus vizsgálatával fogunk foglalkozni:

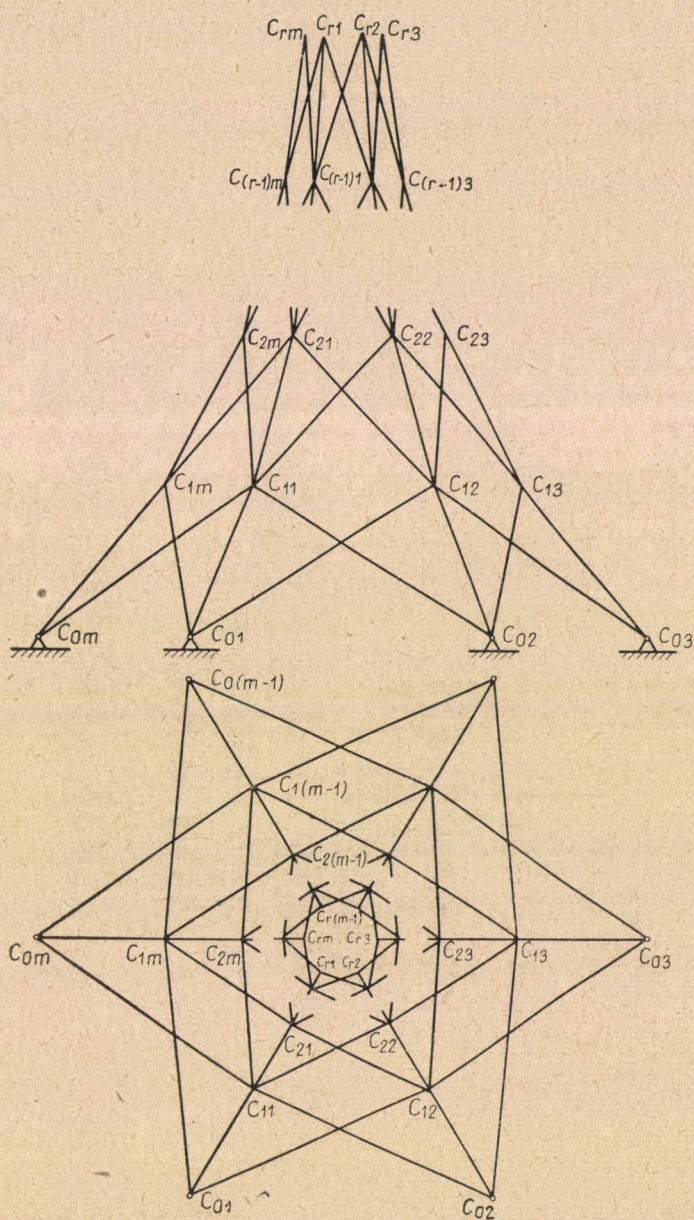
a) A tartót  $r$  darab  $m$  oldalú gyűrű,  $m$  darab  $r$  oldalú meridiánpolygon és  $mr$  rácsrúd alkotja (lásd az 1. ábrát).



1. ábra



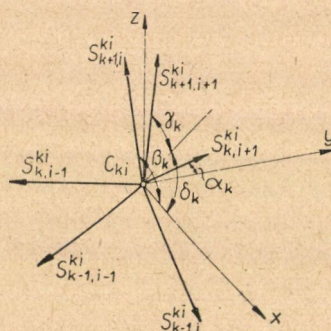
**b)** A tartó gyűrűrudakat nem tartalmaz, hanem  $m$  darab  $r$  oldalú meridiánpolygonból és  $2mr$  darab rácsrúdból van felépítve (lásd a 2. ábrát).





a) eset

A 3. ábra figyelembevételével a  $C_{ki}$  csomópontban a következő egyensúlyi egyenleteket írhatjuk fel:



3. ábra

$$(2.1) \left\{ \begin{array}{l} -S_{k,i-1}^{k,i} \sin \alpha_k - S_{k,i+1}^{k,i} \sin \alpha_k + S_{k+1,i+1}^{k,i} \cos \gamma_k \cos \delta_k + \\ \quad + S_{k-1,i-1}^{k,i} \cos \gamma_{k-1} \cos \delta_{k-1} + S_{k+1,i}^{k,i} \cos \beta_k - S_{k-1,i}^{k,i} \cos \beta_{k-1} = -P_x^{k,i} \\ -S_{k,i-1}^{k,i} \cos \alpha_k + S_{k,i+1}^{k,i} \cos \alpha_k + S_{k+1,i+1}^{k,i} \cos \gamma_k \sin \delta_k - \\ \quad - S_{k-1,i-1}^{k,i} \cos \gamma_{k-1} \sin \delta_{k-1} = -P_y^{k,i} \\ -S_{k+1,i+1}^{k,i} \sin \gamma_k - S_{k-1,i-1}^{k,i} \sin \gamma_{k-1} + S_{k+1,i}^{k,i} \sin \beta_k - \\ \quad - S_{k-1,i}^{k,i} \sin \beta_{k-1} = -P_z^{k,i} \end{array} \right.$$

Könnyebb áttekinthetőség kedvéért bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\begin{array}{lll} a'_k = \sin \alpha_k & a''_k = \cos \alpha_k & \\ b'_k = \cos \gamma_k \cos \delta_k & b''_k = \cos \gamma_k \sin \delta_k & b'''_k = \sin \gamma_k \\ c'_k = \cos \beta_k & & c'''_k = \sin \beta_k \end{array}$$

E jelölések felhasználásával a (2.1) egyenletrendszer a következő alakban írható:

$$(2.2) \left\{ \begin{array}{l} -a'_k S_{k,i-1}^{k,i} - a'_k S_{k,i+1}^{k,i} + b'_k S_{k+1,i+1}^{k,i} + \\ \quad + b'_{k-1} S_{k-1,i-1}^{k,i} + c'_k S_{k+1,i}^{k,i} - c'_{k-1} S_{k-1,i}^{k,i} = -P_x^{k,i} \\ -a''_k S_{k,i-1}^{k,i} + a''_k S_{k,i+1}^{k,i} + b''_k S_{k+1,i+1}^{k,i} - \\ \quad - b''_{k-1} S_{k-1,i-1}^{k,i} = -P_y^{k,i} \\ b'''_k S_{k+1,i+1}^{k,i} - b'''_k S_{k-1,i-1}^{k,i} + c'''_k S_{k+1,i}^{k,i} - \\ \quad - c'''_{k-1} S_{k-1,i}^{k,i} = -P_z^{k,i} \end{array} \right.$$



A (2.1), illetve (2.2) összefüggésekben megadott egyenletrendszert valamennyi csomóponttra felírva nyerjük azt a  $3rm$  darab egyenletből álló, és  $3rm$  ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert, amelyből a rúderők kiszámíthatók. Ezen egyenletrendszer előnyösen oldható meg a matrixszámítás felhasználásával, tekintettel arra, hogy a tartó felépítésében mutatkozó ciklikus szimmetria következtében az egyes egyenletek, illetve az egyes ismeretlenek sorrendjének megfelelő választása esetén az egyenletrendszer együttható-matrixa ciklikus blokkokból álló hipermatrix.

A bevezetett jelölésekkel a tartó rúderőnek kiszámítására szolgáló egyenletrendszer az

$$(2.3) \quad \mathbf{A} \mathbf{s} = \mathbf{p}$$

matrixegyenletbe foglalható össze, ahol az egyenletrendszer együttható-matrixa  $9r^2$  darab  $m$ -edrendű kvadratikus blokkból álló kvadratikus hipermatrix:<sup>1)</sup>

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{G}_{r-1} & \mathbf{D}_{r-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_{r-2} & \mathbf{D}_{r-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \mathbf{G}_2 & \mathbf{D}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix}$$

ahol

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} -a'_k(\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}) & b'_{k-1} \mathbf{E} & -c'_{k-1} \mathbf{E} \\ -a''_k(\mathbf{E} - \mathbf{\Omega}) & -b''_{k-1} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & -b'''_{k-1} \mathbf{E} & -c'''_k \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} 0 & b'_k \mathbf{\Omega} & c'_k \mathbf{E} \\ 0 & b''_k \mathbf{\Omega} & 0 \\ 0 & b'''_k \mathbf{\Omega} & c'''_k \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

(ahol  $\mathbf{E}$  az  $m$ -edrendű egység-matrixot és  $\mathbf{\Omega}$  az  $m$ -edrendű primitív ciklikus matrixot jelenti), továbbá az ismeretlen rúderők, illetve az adott terhelés oszlopvektorai (transzponált alakban):

$$\mathbf{s}^* = [\mathbf{s}_r^*, \mathbf{s}_{r-1}^*, \dots, \mathbf{s}_1^*]; \quad \mathbf{p}^* = [\mathbf{p}_r^*, \mathbf{p}_{r-1}^*, \dots, \mathbf{p}_1^*],$$

ahol

$$\mathbf{s}_k^* = [S_{k,m}^{k,1}, S_{k,1}^{k,2}, \dots, S_{k,m-1}^{k,m}, S_{k-1,m}^{k,1}, S_{k-1,1}^{k,2}, \dots, S_{k-1,m-1}^{k,m}, S_{k-1,1}^{k,1}, S_{k-1,2}^{k,2}, \dots, S_{k-1,m}^{k,m}]$$

$$\mathbf{p}_k^* = -[P_x^{k,1}, P_x^{k,2}, \dots, P_x^{k,m}, P_y^{k,1}, P_y^{k,2}, \dots, P_y^{k,m}, P_z^{k,1}, P_z^{k,2}, \dots, P_z^{k,m}]$$

<sup>1)</sup> Annak érdekében, hogy az  $\mathbf{A}$  matrix felírását nyomdatechnikai szempontból egyszerűbbé tegyük, az  $\mathbf{A}$  felírásánál kétszeres particionálást alkalmazunk.



Az 1. §-ban foglaltak szerint meghatározandók az  $\mathbf{A}$  matrix  $\mathbf{A}_{11} = -a'_r$  ( $\mathbf{E} + \mathbf{Q}$ ),  $\mathbf{A}_{12} = b'_{r-1} \mathbf{E}$  stb.  $m$ -edrendű ciklikus blokkjainak  $\lambda_k^{11}, \lambda_k^{12}$  stb. sajátértékei. E sajátértékekből képezzük az  $\mathbf{A}$  matrix  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{m-1}$  „sajátérték-matrixait”.

Minthogy  $\mathbf{E}$  valamennyi sajátértéke  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 1$ , továbbá  $\mathbf{Q}$  sajátértékei a

$$\lambda_v = \omega_v = e^{\frac{2\pi i v}{m}} \quad v = 0, 1, \dots, m-1$$

úgynevezett  $m$ -edik egységgyökök, és így  $(\mathbf{E} + \mathbf{Q})$   $v$ -edik sajátértéke:  $\lambda_v = 1 + \omega_v$ , illetve  $(\mathbf{E} - \mathbf{Q})$   $v$ -edik sajátértéke:  $\lambda_v = 1 - \omega_v$ , tehát az  $\mathbf{A}$   $v$ -edik sajátérték-matrixa <sup>2)</sup>

$$\mathbf{A}_v = \begin{bmatrix} \Delta_{r,v} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \Gamma_{r-1,v} & \Delta_{r-1,v} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{r-2,v} & \Delta_{r-2,v} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_{1,v} & \Delta_{1,v} \end{bmatrix}$$

ahol:

$$\Delta_{k,v} = \begin{bmatrix} -a'_k(1 + \omega_v) & b'_{k-1} & -c'_{k-1} \\ -a''_k(1 - \omega_v) & -b''_{k-1} & 0 \\ 0 & -b'''_{k-1} & -c'''_{k-1} \end{bmatrix}$$

továbbá:

$$\Gamma_{k,v} = \begin{bmatrix} 0 & b'_k \omega_v & c'_k \\ 0 & b''_k \omega_v & 0 \\ 0 & b'''_k \omega_v & c'''_k \end{bmatrix}$$

Tehát a (2.3) egyenlet megoldása:

$$(2.4) \quad \mathbf{s} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p},$$

ahol — az (1.5) összefüggés alapján — az  $\mathbf{A}^{-1}$  matrix a következő kanonikus alakban állítható elő:

$$(2.5) \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{m} \sum_{v=0}^{m-1} \mathbf{A}_v^{-1} \times \cdot \mathbf{u}_v \mathbf{u}_v^*.$$

Abban a speciális esetben, ha a meridiánpolygonok párhuzamos egyenesek, azaz a gyűrűk egybevágó sokszögek, nyilván

<sup>2)</sup> A sajátértékmatrixok felírásának nyomdatechnikai egyszerűsítése végett alkalmazzuk az  $\mathbf{A}$  felírásánál használatnak megfelelő kétszeres particionálást.



$$a'_r = a'_{r-1} = \dots = a'_1 = a'$$

$$a''_r = a''_{r-1} = \dots = a''_1 = a''$$

$$c'_r = c'_{r-1} = \dots = c'_1 = 0$$

$$c''_r = c''_{r-1} = \dots = c''_1 = 1$$

$$b'_r = b'_{r-1} = \dots = b'_1 = b'$$

$$b''_r = b''_{r-1} = \dots = b''_1 = b''$$

$$b'''_r = b'''_{r-1} = \dots = b'''_1 = b'''$$

tehát ebben a speciális esetben :

$$\Delta_{r,v} = \Delta_{r-1,v} = \dots = \Delta_{1,v} = \Delta_v$$

és

$$\Gamma_{r-1,v} = \Gamma_{r-2,v} = \dots = \Gamma_{1,v} = \Gamma_v.$$

Ismeretes (lásd : [8]), hogy

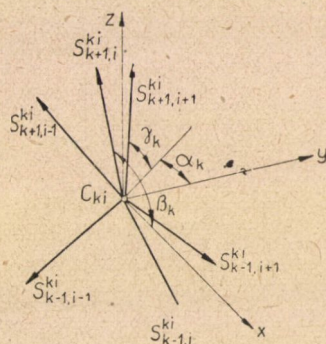
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & 0 \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix}$$

Ennek az összefüggésnek a felhasználásával a  $\Lambda_v$  matrix reciprokmatrixára a következő képlet vezethető le :

$$\Lambda_v^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta_v^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ -\Delta_v^{-1}\Gamma_v\Delta_v^{-1} & \Delta_v^{-1} & \dots & 0 \\ \Delta_v^{-1}(\Gamma_v\Delta_v^{-1})^2 & -\Delta_v^{-1}\Gamma_v\Delta_v^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{r+1}\Delta_v^{-1}(\Gamma_v\Delta_v^{-1})^{r-1} & (-1)^r\Delta_v^{-1}(\Gamma_v\Delta_v^{-1})^{r-2} & \dots & \Delta_v^{-1} \end{bmatrix}$$

**b) eset**

A 4. ábra figyelembevételével a  $C_{ki}$  csomópontban a következő egyensúlyi egyenleteket írhatjuk fel :



4. ábra



$$(2.6) \left\{ \begin{array}{l} -S_{k+1,i-1}^{k,i} \cos \gamma_k \sin \alpha_k - S_{k+1,i+1}^{k,i} \cos \gamma_k \sin \alpha_k + \\ \quad + S_{k+1,i}^{k,i} \cos \beta_k - S_{k-1,i-1}^{k,i} \cos \gamma_{k-1} \sin \alpha_{k-1} - \\ \quad - S_{k-1,i-1}^{k,i} \cos \gamma_{k-1} \sin \alpha_{k-1} - S_{k-1,i}^{k,i} \cos \beta_{k-1} \quad = -P_x^{k,i} \\ -S_{k+1,i-1}^{k,i} \cos \gamma_k \cos \alpha_k + S_{k+1,i+1}^{k,i} \cos \gamma_k \cos \alpha_k - \\ \quad - S_{k-1,i-1}^{k,i} \cos \gamma_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + S_{k-1,i+1}^{k,i} \cos \gamma_{k-1} \cos \alpha_{k-1} = -P_y^{k,i} \\ S_{k-1,i-1}^{k,i} \sin \gamma_k + S_{k+1,i+1}^{k,i} \sin \gamma_k + S_{k+1,i}^{k,i} \sin \beta_k - \\ \quad - S_{k-1,i-1}^{k,i} \sin \gamma_{k-1} - S_{k-1,i+1}^{k,i} \sin \gamma_{k-1} - S_{k-1,i}^{k,i} \sin \beta_{k-1} = -P_z^{k,i} \end{array} \right.$$

Rövidebb írásmód végett itt a következő jelölések bevezetése mutatkozik célszerűnek:

$$\begin{aligned} a_k &= \cos \gamma_k \sin \alpha_k & c_k &= \cos \gamma_k \cos \alpha_k \\ b_k &= \cos \beta_k & d_k &= \sin \gamma_k \\ e_k &= \sin \beta_k. \end{aligned}$$

E jelölések felhasználásával a (2.6) egyenletrendszer a következő alakban írható:

$$(2.7) \left\{ \begin{array}{l} -a_k S_{k+1,i-1}^{k,i} - a_k S_{k+1,i+1}^{k,i} + b_k S_{k+1,i}^{k,i} - \\ \quad - a_{k-1} S_{k-1,i-1}^{k,i} - a_{k-1} S_{k-1,i+1}^{k,i} - b_{k-1} S_{k-1,i}^{k,i} \quad = -P_x^{k,i} \\ -c_k S_{k+1,i-1}^{k,i} + c_k S_{k+1,i+1}^{k,i} - c_{k-1} S_{k-1,i-1}^{k,i} + c_{k-1} S_{k-1,i+1}^{k,i} = -P_y^{k,i} \\ d_k S_{k+1,i-1}^{k,i} + d_k S_{k+1,i+1}^{k,i} + e_k S_{k+1,i}^{k,i} - d_{k-1} S_{k-1,i-1}^{k,i} - \\ \quad - d_{k-1} S_{k-1,i+1}^{k,i} - e_{k-1} S_{k-1,i}^{k,i} \quad = -P_z^{k,i} \end{array} \right.$$

A (2.6), illetve (2.7) egyenleteket valamennyi csomópontra felírva megkapjuk a tartó rúderőnek kiszámítására szolgáló és az  $\mathbf{As} = \mathbf{p}$  matrixegyenletbe összefoglalható egyenletrendszert, amelynek együttható-matrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{r-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{G}_{r-1} & \mathbf{D}_{r-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_{r-2} & \mathbf{D}_{r-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{G}_2 & \mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{D}_0 \end{bmatrix}$$



ahol

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} -a_k \mathbf{E} & -a_k \mathbf{E} & -b_k \mathbf{E} \\ -c_k \mathbf{E} & c_k \mathbf{E} & 0 \\ -d_k \mathbf{E} & -d_k \mathbf{E} & -e_k \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_k & -a_k & -b_k \\ -c_k & c_k & 0 \\ -d_k & -d_k & -e_k \end{bmatrix} \times \cdot \mathbf{E}$$

és

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} -a_k \mathbf{Q} & -a_k \mathbf{Q}^{m-1} & b_k \mathbf{E} \\ c_k \mathbf{Q} & -c_k \mathbf{Q}^{m-1} & 0 \\ d_k \mathbf{Q} & d_k \mathbf{Q}^{m-1} & e_k \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

(Itt is  $\mathbf{E}$  az  $m$ -edrendű egységmatrix, és  $\mathbf{Q}$  az  $m$ -edrendű primitív ciklikus matrix.)

Ez esetben az ismeretlen rúderők, illetve az adott terhelés oszlop matrixai:

$$\mathbf{s}^* = [\mathbf{s}_r^*, \mathbf{s}_{r-1}^*, \dots, \mathbf{s}_1^*]; \quad \mathbf{p}^* = [\mathbf{p}_r^*, \mathbf{p}_{r-1}^*, \dots, \mathbf{p}_1^*],$$

ahol

$$\mathbf{s}_k^* = [S_{k-1,m}^{k,1}, S_{k-1,1}^{k,2}, \dots, S_{k-1,m-1}^{k,m}, S_{k-1,2}^{k,1}, S_{k-1,3}^{k,2}, \dots, S_{k-1,1}^{k,m}, S_{k-1,2}^{k,2}, \dots, S_{k-1,m}^{k,m}]$$

és

$$\mathbf{p}_k^* = -[P_x^{k,1}, P_x^{k,2}, \dots, P_x^{k,m}, P_y^{k,1}, P_y^{k,2}, \dots, P_y^{k,m}, P_z^{k,1}, P_z^{k,2}, \dots, P_z^{k,m}].$$

Az  $\mathbf{As} = \mathbf{p}$  matrixegyenlet megoldása ez esetben is elvégezhető az előző *a*) pontban ismertetett módon, azaz az  $\mathbf{A}^{-1}$  reciprokmatrix kanonikus előállításával. Ez esetben azonban a legcélszerűbb az alább ismertetett módszer alkalmazása. E módszer alkalmazásának előnyös volta abból következik, hogy az ( $r \times r$  számú, egyenként  $3m$ -edrendű blokkból álló)  $\mathbf{A}$  hipermatrix (amely csak a fődiagonálisában és a fődiagonális alatt tartalmaz nullától különböző blokkokat) főátlójában álló valamennyi blokk egy közösleges harmadrendű matrixnak és az  $m$ -edrendű egységmatrixnak a direkt szorzataként állítható elő.

Írjuk át az  $\mathbf{As} = \mathbf{p}$  egyenletet a következő alakba:

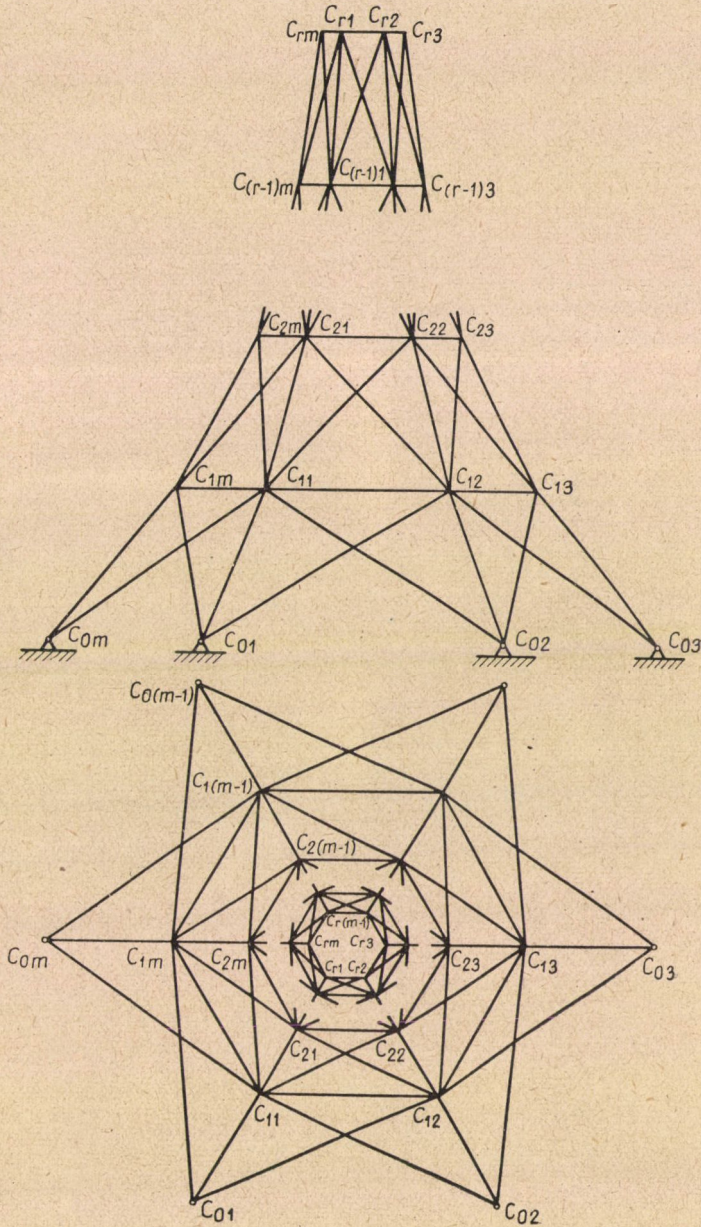
$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{D}_{r-1} \mathbf{s}_r & = \mathbf{p}_r \\ \mathbf{G}_{r-1} \mathbf{s}_r + \mathbf{D}_{r-2} \mathbf{s}_{r-1} & = \mathbf{p}_{r-1} \\ \mathbf{G}_{r-2} \mathbf{s}_{r-1} + \mathbf{D}_{r-3} \mathbf{s}_{r-2} & = \mathbf{p}_{r-2} \\ \dots & \dots \\ \mathbf{G}_2 \mathbf{s}_3 + \mathbf{D}_1 \mathbf{s}_2 & = \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{G}_1 \mathbf{s}_2 + \mathbf{D}_0 \mathbf{s}_1 & = \mathbf{p}_1 \end{array} \right.$$







egyenletrendszer szolgál (lásd : [1], 517. oldal), ahol  $a_{jk}$  a törzstartó geometriai és szilárdsági adataiból,  $b_j$  pedig a törzstartó geometriai, szilárdsági és terhelési adataiból meghatározható állandók ;  $X_k$  a  $k$ -adik (statikai határozatlan-



5. ábra



ságot okozó) rúdiban ébredő ismeretlen rúderő. A Maxwell-féle úgynevezett felcserélhetőségi tételből következik, hogy

$$(3.2) \quad a_{jk} = a_{kj}.$$

A jelen paragrafusban vizsgált tartó törzstartóját úgy nyerjük, hogy a statikailag határozatlan tartó valamennyi gyűrűjét (azaz összesen  $rm$  darab rudat) elhagyjuk; tehát törzstartóként a 2. §. **b)** pontjában tárgyalt statikailag határozott tartót vesszük fel. Következésképpen a (3.1) egyenletrendszer a vizsgálandó esetben  $s = rm$  egyenletből áll, és ugyanannyi ismeretlent tartalmaz.

Annak érdekében, hogy a tartó felépítésében mutatkozó ciklikus szimmetria a statikailag határozatlan tartó egyenletrendszerének, illetve az egyenletrendszer együtthatómatrixának felírásában szembetűnő legyen, célszerű a következő jelölések bevezetése:

$X_{\mu,v}$  jelenti a  $C_{\mu,v}$  és  $C_{\mu,v+1}$  csomópontok közti gyűrűrúdiban ébredő rúderőt;

$a_{\mu,v}^{x,e}$  jelenti a  $C_{\mu,v}$  és  $C_{\mu,v+1}$  csomópontok távolságának azon megváltozását, amelyet a  $C_{x,e}$  és  $C_{x,e+1}$  csomópontok közül elhagyott gyűrűrúd helyén ható „egységerő” idéz elő. (Nyilvánvaló, hogy  $a_{\mu,v}^{x,e} = a_{x,e}^{\mu,v}$ .)

$b_{\mu,v}$  jelenti a  $C_{\mu,v}$  és  $C_{\mu,v+1}$  csomópontok távolságának a külső terhelés hatására bekövetkező megváltozását.

A fenti jelölések alkalmazásával a (3.1) egyenletrendszer a

$$(3.3) \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

matrixegyenletbe foglalható össze, ahol  $\mathbf{A} = [A_{ij}]$  és  $A_{ij} = A_{ji}$ , továbbá

$$A_{ij} = \mathbf{C}(a_{j,1}^{i,1}, a_{j,2}^{i,1}, a_{j,3}^{i,1}, \dots, a_{j,3}^{i,1}, a_{j,2}^{i,1}).$$

Ugyanis a Maxwell-féle felcserélhetőségi tételből és a tartó felépítésének ciklikus szimmetriájából következik, hogy

$$a_{j,h}^{i,k} = a_{j,h-k+1}^{i,1} \quad \text{és} \quad a_{j,h}^{i,1} = a_{j,m-h+2}^{i,1}.$$

Továbbá:

$$\mathbf{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*]; \quad \mathbf{b}^* = [b_1^*, b_2^*, \dots, b_r^*],$$

ahol

$$\mathbf{x}_k^* = [X_{k,1}, X_{k,2}, \dots, X_{k,m}]; \quad \mathbf{b}_k^* = [b_{k,1}, b_{k,2}, \dots, b_{k,m}].$$

A (3.3) matrixegyenlet megoldása nyilván:

$$(3.4) \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

ahol az (1.14) és (1.15) összefüggések szerint:

$$(3.5) \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{m} \left[ \Lambda_0^{-1} \times \cdot \mathbf{P}_0 + \sum_{v=1}^{\frac{m}{2}-1} \Lambda_v^{-1} \times \cdot \mathbf{P}_v + \Lambda_{\frac{m}{2}}^{-1} \times \cdot \mathbf{P}_{\frac{m}{2}} \right],$$



ha  $m$  páros szám, illetve

$$(3.6) \quad \Lambda^{-1} = \frac{1}{m} \left( \Lambda_0^{-1} \times \cdot \mathbf{P}_0 + 2 \sum_{v=1}^{\frac{m-1}{2}} \Lambda_v^{-1} \times \cdot \mathbf{P}_v \right),$$

ha  $m$  páratlan szám.

A sajátértékek és a  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{\frac{m-1}{2}-1}$  (illetve  $\mathbf{P}_{\frac{m-1}{2}}$ ) projektorok az (1.7), illetve (1.10), (1.11) és (1.12) képletekből nyerhetők. (Ez esetben:  $a_{v,jk} = a_{kv+1,j}^{j,1}$ .)

(Beérkezett: 1956. VII. 2.)

### IRODALOM

- [1] *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (Band IV., Teilband 4.). Teubner, Leipzig, 1907–1914.
- [2] H. REISSNER: „Über Fachwerke mit zyklischer Symmetrie.” *Archiv der Mathematik und Physik* (3) **13** (1908) 317–326.
- [3] L. MANN: „Über zyklische Symmetrie in der Statik mit Anwendungen auf das räumliche Fachwerk.” *Der Eisenbau* **2** (1911) 18–29.
- [4] W. KAUFMANN: „Beitrag zur Berechnung räumlicher Fachwerke von zyklischer Symmetrie mit biegungssteifen Ringen und Meridianen.” *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **1** (1921) 345–364.
- [5] EGERVÁRY J.: „Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **3** (1953) 417–458.
- [6] E. EGERVÁRY: „On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **15** (1954) 211–222.
- [7] EGERVÁRY J.: „Páronként felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokról és azok alkalmazásáról a rácsdinamikában.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 31–47.
- [8] A. C. AITKEN: *Determinants and matrices* (5. edition). Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1948 (p. 139).

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИЛ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТЧАТЫХ ОПОР С ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ С ПОМОЩЬЮ ГИПЕРМАТРИЦ

E. BÉRES, V. LOVASS-NAGY и J. SZABÓ

#### Резюме

Известно, что системы линейных алгебраических уравнений, служащие для вычисления стержневых сил пространственных решетчатых опор, могут быть представлены единственным матричным уравнением. Если построение пространственной решетчатой опоры обладает циклической симметрией, матрица коэффициентов матричного уравнения может быть разбита на циклические блоки. Авторы — с помощью гиперматричного алгоритма J. EGERVÁRY — разрабатывают метод спектрального разбиения матрицы коэффициентов. Применяя этот метод, гиперматрица, состоящая из циклических блоков, может быть представлена в виде суммы слагаемых, каждое из которых является прямым произведением матрицы, созданной из собственных значений блоков, и собственной диады, относящейся к соответствующему собственному значению. Этот метод дает единые и обозримые формулы для определения стержневых сил, как в случае статически определенных, так и в случае статически неопределенных решетчатых опор, так как сводит обращение матрицы коэффициентов к вычислению матрицы, обратной матрицам собственных значений (порядок которых ниже чем порядок данной матрицы коэффициентов).



ÜBER EINE ANWENDUNG DER HYPERMATRIZEN BEI DER BERECHNUNG  
VON RÄUMLICHEN FACHWERKEN MIT ZYKLISCHER SYMMETRIE

E. BÉRES, V. LOVASS-NAGY und J. SZABÓ

**Zusammenfassung**

Bekanntlich lassen sich die linearen algebraischen Gleichungen, welche zur Berechnung von Spannkraften räumlicher Fachwerke dienen, zu einer einzigen Matrixengleichung zusammenfassen. Hat das Fachwerk eine zyklische Struktur, dann lässt sich die Koeffizientenmatrix dieser Matrixengleichung in zyklische Blöcke zerlegen. Mit Hilfe der EGÉRVÁRY'schen Hypermatrizenalgorithmus entwickeln die Verfasser eine Methode zur Spektralzerlegung der Koeffizientenmatrix. Hierbei erscheint die aus zyklischen Blöcken bestehende Hypermatrix als eine Summe, deren Glieder direkte Produkte von Eigenwert-Matrizen und der entsprechenden Eigen-Dyaden sind. Diese Methode liefert einheitliche und übersichtliche Lösungsformeln zur Berechnung der Spannkraften statisch bestimmter wie statisch unbestimmter räumlicher Fachwerke, sie führt nämlich die Inversion der Koeffizientenmatrix zur Berechnung von Reciprokmatrizen der Eigenwert-Matrizen der Blöcke zurück.

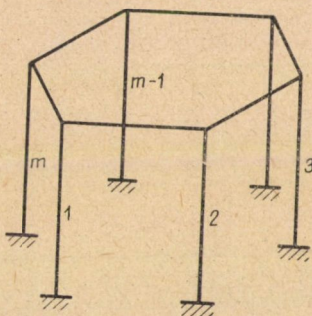


# CENTRÁLSZIMMETRIÁVAL BÍRÓ TÉRBELI KERETEK SZÁMÍTÁSA HIPERMATRIXOK ALKALMAZÁSÁVAL

BÉRES ELEK<sup>1)</sup>

## Bevezetés

Jelen dolgozat a centrálszimmetriával bíró térbeli keretek vizsgálatát mutatja be hipermatrixok alkalmazásával. A szerző előző dolgozatában foglalkozott a matrixelmélet néhány újabb eredményének a térbeli rácsos szerkezetek számítására vonatkozó felhasználásával [1]. E dolgozatban a ciklikus blokkokból álló hipermatrixok kanonikus alakjának egy újabb előállítási módjával sikerült a ciklikus szimmetriával bíró térbeli rácsos tartó rúderőinek meghatározására szolgáló lineáris egyenletrendszer megoldását egyszerű alakban előállítani: az ott bemutatott matematikai segédeszközök



1. ábra

felhasználásával az alábbiakban olyan centrálszimmetrikus keretek vizsgálatával foglalkozunk, melyeknek vízszintes gerendái minden tekintetben egyenlők, és  $m$  oldalú szabályos sokszöget alkotnak, függőleges oszlopai ugyancsak minden tekintetben egyenlők, a sokszög csúcaiban mereven csatlakoznak a gerendákhoz és másik végükön ugyancsak mereven befogottak (lásd az 1. ábrát).

Egy ilyen keret statikailag  $6m$ -szeresen határozatlan, tehát megoldása  $6m$  ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer megoldását teszi szükségessé. Tekintettel arra, hogy ezen egyenletrendszer együtthatói is kiszámítandók,

<sup>1)</sup> Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem, Matematikai Tanszék.



első pillanatban alig kivitelezhetőnek látszik a feladat ilyen formában történő megoldása. A továbbiakban azonban meg fogjuk mutatni, hogy hipermatrixok alkalmazásával és a keret centrálszimmetrikus felépítéséből adódó lehetőségek felhasználásával a számítás nagymértékben — a mérnöki gyakorlatnak megfelelő módon — egyszerűsíthető.

Ami az együtthatók meghatározását illeti, nem kell  $36m^2$ , egymástól és nullától különböző együtthatót meghatározni (ugyanis az együttható-matrixnak ennyi eleme van), hiszen ezek száma már annak figyelembevételével, hogy az együtthatókból alkotott matrix szimmetrikus a független együtthatók száma  $6m(6m+1)/2$ . Esetünkben azonban, midőn centrálszimmetrikus térbeli keretek megoldására szorítkozunk, a nullától és egymástól különböző abszolút értékű együtthatók száma legfeljebb 25. (A közölt példában összesen 17 db nullától és egymástól abszolút értékben különböző együttható fordul elő.)

Az  $Ax = b$  matrixegyenlet megoldása  $x = A^{-1}b$ , ahol numerikus számolás szempontjából az egyetlen problémát az  $A^{-1}$  matrix reciprokának a meghatározása jelenti. Az a módszer ugyanis, melyet általában a matrixok reciprokának kiszámításánál alkalmazunk  $6m$ -edrendű matrix esetén olyan hosszadalmas, hogy a gyakorlat céljaira alkalmatlan. Hipermatrixok alkalmazásával azonban csupán hatodrendű matrixok reciprokát kell a közismert módon meghatározni, tekintettel arra, hogy az ismeretlenek megfelelő sorrendje esetén az egyenletrendszer együttható-matrixa  $m$ -edrendű ciklikus blokkokból álló hipermatrixként írható fel. A ciklikus blokkokból álló hipermatrixok reciprokának meghatározása a korábbiakban bemutatott módszer szerint történhet.

E módszer előnye még szembetűnőbbé válik, ha figyelembe vesszük, hogy ily módon nem csupán valamely állóterhelés által előidézett erők és nyomatékok számíthatók, hanem hasonló egyszerűséggel nyerhetők a keret valamely keresztmetszetére vonatkozó hatásfüggvények.

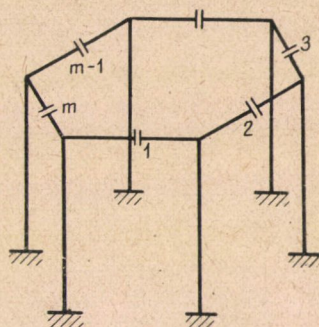
### 1. §. Centrálszimmetrikus térbeli keretekben keletkező erők és nyomatékok meghatározása

A centrálszimmetrikus keret törzstartóját számításunkra alkalmasan úgy vesszük fel, hogy a vízszintes gerendákat elvágjuk, úgyhogy 6 darab egybevágó befogott tartó keletkezik. Minden egyes átvágás térbeli keret esetén 6 db kapcsolóelem megszüntetését jelenti, azaz  $6m$  erővel, illetve nyomatékkal helyettesíthető a megszüntetett kapcsolat. Így  $m$  oldalú szabályos sokszöget alkotó gerendák esetén az ismeretlen erők, illetve nyomatékok száma  $6m$ . Jelöljük ezeket  $X$ -ekkel, melyeket az áttekinthetőség kedvéért kettős indexekkel látunk el, oly módon, hogy az első index jelenti az átvágás helyét, a második index pedig azt mutatja meg, hogy az azon a helyen működő melyik erőről, illetve nyomatékról van szó. Az átvágási helyeket egy kiindulási helytől számított jobbra haladó folytonos számozással számozzuk (lásd a 2. ábrát). Az erőket és a nyomatékokat pedig a következő számok jelölik:

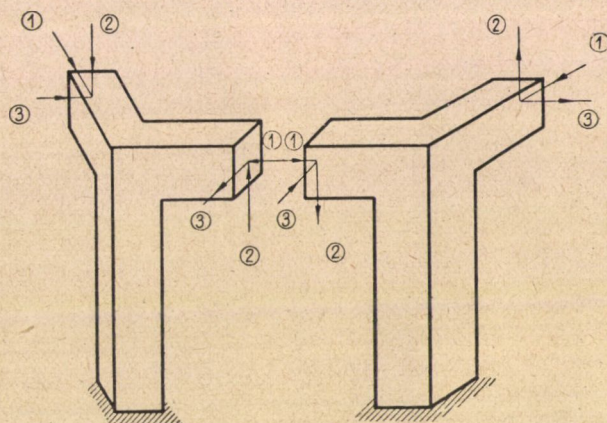
- 1 : a keresztmetszetre ható normálerő ;
- 2 : függőleges nyíróerő ;
- 3 : vízszintes nyíróerő (lásd a 3/a ábrát) ;



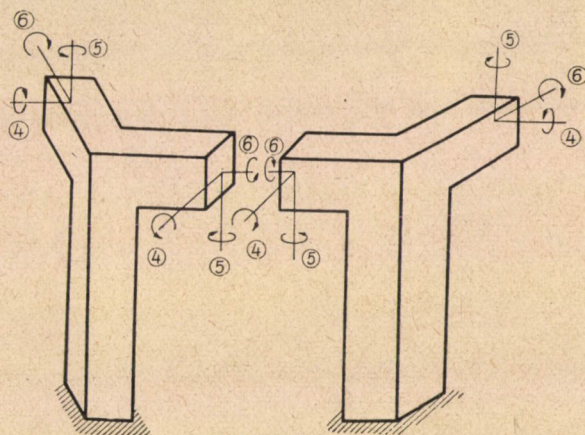
- 4 : hajlítónyomaték az 1—2 erőik síkjában ;  
 5 : hajlítónyomaték az 1—3 erőik síkjában ;  
 6 : csavarónyomaték (lásd a 3/b ábrát).



2. ábra



3/a. ábra



3/b. ábra



Az egyenletrendszer együtthatóit négy számjegyből álló indexszel látjuk el.  $a_{hk}^{ij}$  jelenti a  $h$ -adik helyen működő  $X_{hk}$ -val ellentett értelmű egységerő (nyomaték) által az  $i$ -edik átvágási helyen okozott elmozdulásnak (elfordulásnak) az ott működő  $X_{ij}$ -vel ellentett értelmű egységerő (nyomaték) irányába eső összetevőjét.

A keret centrálszimmetriájából következik, hogy

$$a_{hk}^{ij} = a_{h-i+1,k}^{1j}, \quad \text{ha } i \leq h$$

$$a_{hk}^{ij} = a_{k-i+1+m,k}^{1j}, \quad \text{ha } i > h,$$

és

$$|a_{2k}^{1j}| = |a_{mk}^{1j}|.$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy az általunk felvett törzstartó esetében valamely átvágási helyen működő egységerő (nyomaték) csupán azon a helyen és a két szomszédos átvágási helyen okozhat elmozdulást, illetve elfordulást, azaz

$$a_{hk}^{ij} = 0, \quad \text{ha } |h - i| > 1.$$

Figyelembe véve még, hogy  $a_{1k}^{1j} = a_{1j}^{1k}$  és  $a_{2k}^{1j} = a_{2j}^{1k}$ , és hogy  $1 \leq j \leq 6$  és  $1 \leq k \leq 6$ , végül azt nyerjük, hogy a nullától és egymástól abszolút értékben különböző együtthatók száma nem lehet nagyobb, mint 42. Ezen 42 együttható vizsgálata során azonban még ezek egy részéről is kimutatható, hogy minden esetben nullával egyenlők. Így nyerjük végül, hogy bármely konkrét példában csupán 25 együttható kiszámítása szükséges, függetlenül attól, hogy a centrálszimmetrikus keret vízszintes gerendái hány oldalú szabályos sokszöget alkotnak. A speciális esetekben néhány még ezek közül is 0 értékűvé válik.

Az egyenletrendszer jobboldalát képező állandók pedig:  $b_{ik}$  jelenti az  $i$ -edik átvágással keletkező lapok külső terhelés hatására bekövetkező elmozdulásának (elfordulásának) az  $X_{ik}$  erő (nyomaték) irányába eső összetevőjét.

Az ismeretlen erőket és nyomatékokat szolgáltatató matrixegyenlet

$$Ax = b,$$

melynek megoldása  $x = A^{-1}b$ .

Az egyenletben szereplő matrixok a következők:

Az egyenletrendszer együttható-matrixa  $m$ -edrendű ciklikus blokkokból álló hipermatrix:  $A = [A_{ij}]$ ,  $1 \leq i \leq 6$ ,  $1 \leq j \leq 6$ , és

$$\begin{aligned} A_{11} &= C(a_{11}^{11}, a_{21}^{11}, 0, \dots, 0, a_{21}^{11}) \\ A_{12} &= -A_{21} = C(0, a_{22}^{11}, 0, \dots, 0, -a_{22}^{11}) \\ A_{13} &= -A_{31} = C(0, a_{23}^{11}, 0, \dots, 0, -a_{23}^{11}) \\ A_{14} &= A_{41} = C(a_{14}^{11}, a_{24}^{11}, 0, \dots, 0, a_{24}^{11}) \\ A_{15} &= A_{51} = 0 \\ A_{16} &= -A_{61} = C(0, a_{26}^{11}, 0, \dots, 0, -a_{26}^{11}) \\ A_{22} &= C(a_{12}^{12}, a_{22}^{12}, 0, \dots, 0, a_{22}^{12}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
A_{23} &= A_{32} = C(0, a_{23}^{12}, 0, \dots, 0, a_{23}^{12}) \\
A_{24} &= A_{42} = C(0, a_{24}^{12}, 0, \dots, 0, a_{24}^{12}) \\
A_{25} &= A_{52} = 0 \\
A_{26} &= A_{62} = C(0, a_{26}^{12}, 0, \dots, 0, a_{26}^{12}) \\
A_{33} &= C(a_{13}^{13}, a_{23}^{13}, 0, \dots, 0, a_{23}^{13}) \\
A_{34} &= -A_{43} = C(0, a_{24}^{13}, 0, \dots, 0, -a_{24}^{13}) \\
A_{35} &= -A_{53} = C(0, a_{25}^{13}, 0, \dots, 0, -a_{25}^{13}) \\
A_{36} &= A_{63} = C(a_{16}^{13}, a_{26}^{13}, 0, \dots, 0, a_{26}^{13}) \\
A_{44} &= C(a_{14}^{14}, a_{24}^{14}, 0, \dots, 0, a_{24}^{14}) \\
A_{45} &= A_{54} = 0 \\
A_{46} &= -A_{64} = C(0, a_{26}^{14}, 0, \dots, 0, -a_{26}^{14}) \\
A_{55} &= C(a_{15}^{15}, a_{25}^{15}, 0, \dots, 0, a_{25}^{15}) \\
A_{56} &= A_{65} = 0 \\
A_{66} &= C(a_{16}^{16}, a_{26}^{16}, 0, \dots, 0, a_{26}^{16})
\end{aligned}$$

valamennyien  $m$ -edrendű ciklikus matrixok.

Az ismeretlen erőkből és nyomatékokból alkotott oszlopvektor (transzponált alakban):

$$\mathbf{x}^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*]$$

ahol

$$\mathbf{x}_k^* = [X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{mk}] \quad k = 1, 2, \dots, 6.$$

Az egyenletrendszer állandóiból alkotott oszlopmatrix pedig (szintén transzponált alakban):

$$\mathbf{b}^* = [b_1^*, b_2^*, b_3^*, b_4^*, b_5^*, b_6^*]$$

ahol

$$\mathbf{b}_k^* = [b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{mk}] \quad k = 1, 2, \dots, 6.$$

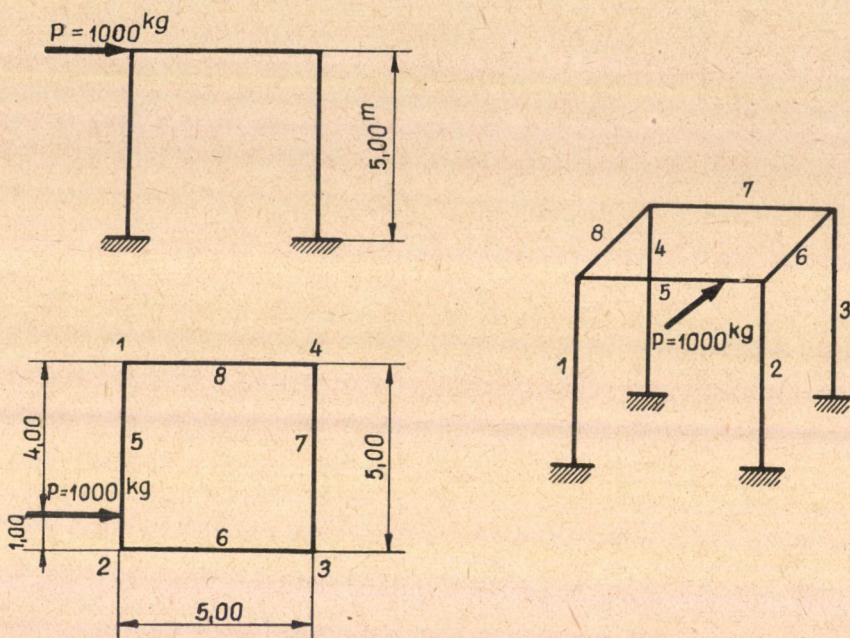
Nyilvánvaló, hogy az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  egyenlet együtthatómatrixa a terheléstől független, csupán a tartó anyagától és geometriai méreteitől függ. A terhelés csupán a jobboldalon szereplő  $\mathbf{b}$  oszlopmatrixra van hatással. Ezt az oszlopmatrixot azonban akkor is könnyen fel tudjuk írni, ha nem egy állóterhelésről van szó, hanem egy mozgó egységnyi erő hatásáról (természetesen ebben az esetben úgy, mint a mozgó egységnyi erő helyzetének a függvényét). Így az  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  egyenletből egyszerűen nyerhetjük az átvágási helyeken keletkező erőket és nyomatékokat mint a terhelő egységnyi erő helyzetének a függvényét, azaz az ezekre a keresztmetszetekre vonatkozó hatásfüggvényeket. Ezeket az egyes szakaszokra értelmezett függvényeket megfelelően egymáshoz fűzve és ábrázolva nyerjük a keret egyik keresztmetszetéhez tartozó hatásábráját. Ezen keresztmetszet természetesen megegyezik a keret azon



keresztmetszeteinek egyikével, melyek segítségével a keretet statikailag határozottá tettük. Ezek segítségével azonban más keresztmetszetre vonatkozó hatásfüggvényt is meg tudunk határozni.

## 2. §. Példák

1°. Meghatározandók a 4. ábrán feltüntetett keretben fellépő nyomatékok és erők. Az ábrázolt vasbetonkeret négy függőleges — alul teljesen befogott — oszlopból és négy vízszintes — négyzetet alkotó — gerendából áll. Mind a gerendák, mind az oszlopok hossza 5 m és keresztmetszetük is egyaránt 50—50 cm. A keretre egyetlen vízszintes erő hat az ábrán feltüntetett módon, melynek nagysága  $P = 1000$  kg.



4. ábra

Jelen példában az oszlopok és gerendák keresztmetszete ugyanakkora négyzet, így ezek inercianyomatéka mindkét tengelyre egyaránt  $I = 520833 \text{ cm}^4$ , csavarási inercianyomatéka  $I_{cs} = 881250 \text{ cm}^4$ . A nyírási rugalmassági modulus  $G = 0,428 E$  kg/cm<sup>2</sup>, ahol  $E$  a rugalmassági modulus.

A továbbiakban a matrixok elemeinek számítását mellőzve azoknak kiszámított értékét közöljük, tekintettel arra, hogy azok meghatározása a statika elemeiből közismert. (Lásd: [2], II. kötet 40—46. oldalak.) Megjegyezzük azonban, hogy a számítások egyszerűbbé tétele végett mind az **A**, mind a **b** matrixokat megszoroztuk  $EI/10$ -zel. A továbbiakban már ezeket az értékeket közöljük. Az összes közölt adatok 4 tizedesig pontosak.



Jelen példában az  $A$  együttható-matrix a következő negyedrendű ciklikus blokkokból van felépítve:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= C(8,3, 0, 0, 0) \\
 A_{12} &= A_{21} = 0 \\
 A_{13} &= A_{31} = C(0, 4,16, 0, -4,16) \\
 A_{14} &= A_{41} = C(2,5, 0, 0, 0) \\
 A_{15} &= A_{51} = 0 \\
 A_{16} &= A_{61} = C(0, 1,25, 0, -1,25) \\
 A_{22} &= C(7,2916, 0, 0, 0) \\
 A_{23} &= A_{32} = C(0, -3,125, 0, -3,125) \\
 A_{24} &= A_{42} = 0 \\
 A_{25} &= A_{52} = 0 \\
 A_{26} &= A_{62} = C(0, -1,25, 0, -1,25) \\
 A_{33} &= C(18,0156, 4,3202, 0, 4,3203) \\
 A_{34} &= A_{43} = C(0, -1,25, 0, 1,25) \\
 A_{35} &= A_{53} = C(0, 1,7281, 0, -1,7281) \\
 A_{36} &= A_{63} = C(2,5, 0, 0, 0) \\
 A_{44} &= C(1,5, 0, 0, 0) \\
 A_{45} &= A_{54} = 0 \\
 A_{46} &= A_{64} = C(0, 0,5, 0, -0,5) \\
 A_{55} &= C(1,8825, -0,6912, 0, -0,6912) \\
 A_{56} &= A_{65} = 0 \\
 A_{66} &= C(1,6912, 0, 0, 0)
 \end{aligned}$$

A sajátértékmatrixok:

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} 8,3333 & 0 & 0 & 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 7,2916 & -6,25 & 0 & 0 & -2,5 \\ 0 & -6,25 & 26,6562 & 0 & 0 & 2,5 \\ 2,5 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & -2,5 & 2,5 & 0 & 0 & 1,6912 \end{bmatrix}$$



$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 8,3333 & 0 & 8,3333i & 2,5 & 0 & 2,5i \\ 0 & 7,2916 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8,3333i & 0 & 18,0156 & -2,5i & 3,4562i & 2,5 \\ 2,5 & 0 & 2,5i & 1,5 & 0 & i \\ 0 & 0 & -3,4562i & 0 & 1,8825 & 0 \\ -2,5i & 0 & 2,5 & -i & 0 & 1,6912 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 8,3333 & 0 & 0 & 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 7,2916 & 6,25 & 0 & 0 & 2,5 \\ 0 & 6,25 & 9,3750 & 0 & 0 & 2,5 \\ 2,5 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,265 & 0 \\ 0 & 2,5 & 2,5 & 0 & 0 & 1,6912 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 8,3333 & 0 & -8,3333i & 2,5 & 0 & -2,5i \\ 0 & 7,2916 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8,3333i & 0 & 18,0156 & 2,5i & -3,4562i & 2,5 \\ 2,5 & 0 & -2,5i & 1,5 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 3,4562i & 0 & 1,8825 & 0 \\ 2,5i & 0 & 2,5 & i & 0 & 1,6912 \end{bmatrix}$$

A további számítást nagymértékben megkönnyíti, hogy a sajátérték-matrixok hermitikusak (illetve valós szimmetrikusak), és hogy — mint látható —,  $\Lambda_3 = \Lambda_1^*$ .

A sajátértékmatrixok reciprokai :

$$\Lambda_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0,24 & 0 & 0 & -0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3019 & 0,0336 & 0 & 0 & 0,3966 \\ 0 & 0,0336 & 0,0473 & 0 & 0 & -0,0202 \\ -0,4 & 0 & 0 & 1,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0,3966 & -0,0202 & 0 & 0 & 1,2075 \end{bmatrix}$$



$$\Lambda_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5863 & 0 & -0,2997i & -0,3223 & -0,5502 & -0,2331i \\ 0 & 0,1371 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2997i & 0 & 0,2997 & 0 & -0,5502i & 0 \\ -0,3223 & 0 & 0 & 1,4628 & 0 & -0,3885i \\ -0,5502 & 0 & 0,5502i & 0 & 1,5415 & 0 \\ 0,2331i & 0 & 0 & 0,3885i & 0 & 1,1656 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0,24 & 0 & 0 & -0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4086 & -0,1838 & 0 & 0 & -0,3324 \\ 0 & -0,1838 & 0,2587 & 0 & 0 & -0,1108 \\ -0,4 & 0 & 0 & 1,3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3062 & 0 \\ 0 & -0,3324 & -0,1108 & 0 & 0 & 1,2463 \end{bmatrix}$$

Végül pedig

$$\Lambda_3^{-1} = (\Lambda_1^{-1})^* .$$

Negyedrendű ciklikus matrixok esetén :

$$u_0 u_0^* = C(1, 1, 1, 1) \quad u_2 u^* = C(1, -1, 1, -1)$$

$$u_1 u_1^* = C(1, -i, -1, i) \quad u_3 u_3^* = C(1, i, -1, -i) .$$

Ezek ismeretében az

$$A^{-1} = \frac{1}{4} [\Lambda_0^{-1} \times u_0 u_0^* + \Lambda_1^{-1} \times u_1 u_1^* + \Lambda_2^{-1} \times u_2 u_2^* + \Lambda_3^{-1} \times u_3 u_3^*]$$

képlettel számolva nyerjük, hogy

$$A^{-1} = [B_{ij}] \quad i, j = 1, 2, \dots, 6,$$

ahol

$$B_{11} = C(0,4131, 0, -0,1731, 0)$$

$$B_{13} = -B_{31} = C(0, -0,1498, 0, 0,1498)$$

$$B_{14} = B_{41} = C(-0,3612, 0, -0,0388, 0)$$

$$B_{15} = B_{51} = C(-0,2751, 0, 0,2751, 0)$$

$$B_{16} = -B_{61} = C(0, -0,1165, 0, 0,1165)$$

$$B_{22} = C(0,2462, -0,0267, 0,1091, -0,0267)$$

$$B_{23} = B_{32} = C(-0,0375, 0,0543, -0,0375, 0,0543)$$



$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{26} &= \mathbf{B}_{62} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} 0,0161 & 0,1822 & 0,0161 & 0,1822 \end{pmatrix} \\
\mathbf{B}_{33} &= \mathbf{C} \begin{pmatrix} 0,2263 & -0,0528 & -0,0733 & -0,0528 \end{pmatrix} \\
\mathbf{B}_{35} &= -\mathbf{B}_{53} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} 0 & -0,2751 & 0 & 0,2751 \end{pmatrix} \\
\mathbf{B}_{36} &= \mathbf{B}_{63} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} -0,0321 & 0,0226 & -0,0327 & 0,0226 \end{pmatrix} \\
\mathbf{B}_{44} &= \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1,3981 & 0 & -0,0647 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{B}_{46} &= -\mathbf{B}_{64} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} 0 & -0,1942 & 0 & 0,1942 \end{pmatrix} \\
\mathbf{B}_{55} &= \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1,3473 & 0,4234 & -0,1942 & 0,4234 \end{pmatrix} \\
\mathbf{B}_{66} &= \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1,1963 & -0,0097 & 0,0306 & -0,0097 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

a többi blokkok pedig mind 0-matrixok.

Az adott terhelés mellett

$$\mathbf{b}^* = [\mathbf{b}_1^*, \mathbf{b}_2^*, \mathbf{b}_3^*, \mathbf{b}_4^*, \mathbf{b}_5^*, \mathbf{b}_6^*],$$

ahol

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -4,16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{b}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -3,125 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{b}_3 &= \begin{bmatrix} 6,0031 \\ 1,7281 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{b}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1,25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{b}_5 &= \begin{bmatrix} -0,7412 \\ 0,6912 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{b}_6 &= \begin{bmatrix} 1,25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásai szolgáltatják a keret vízszintes gerendáinak felelő síkjában fellépő erőket és nyomatékokat, melyekre a következő értékeket nyerjük (az erők kg-ban, a nyomatékok mkg-ban értendők).

Normálerők :

$$X_{11} = -55 \quad X_{21} = -414,9 \quad X_{31} = 55 \quad X_{41} = -85.$$

Függőleges nyíróerők :

$$X_{12} = -28 \quad X_{22} = -280 \quad X_{32} = -28 \quad X_{42} = 148,3.$$

Vízszintes nyíróerők :

$$X_{13} = 242,2 \quad X_{23} = 15,6 \quad X_{33} = 72 \quad X_{43} = -94,4,$$

Függőleges síkban ható nyomatékok nincsenek.



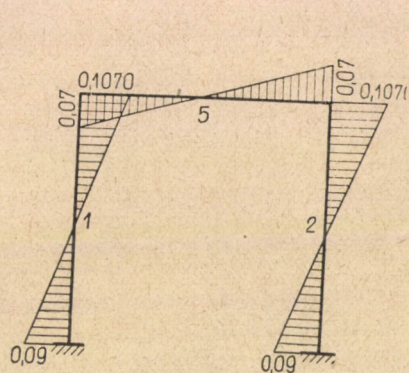
Vízszintes síkban ható nyomatékok :

$$X_{15} = -230,5 \quad X_{25} = 112,2 \quad X_{35} = -38,7 \quad X_{45} = 57,1$$

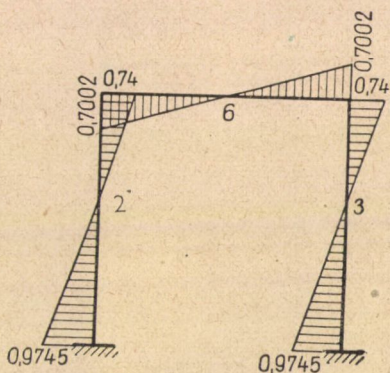
Csavarónyomatékok :

$$X_{16} = 39,8 \quad X_{26} = 37 \quad X_{36} = -39,8 \quad X_{46} = 37$$

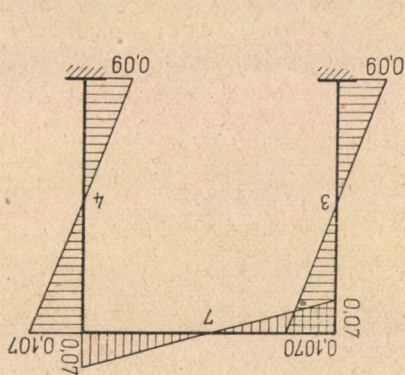
Ezek segítségével a keret bármely keresztmetszetében fellépő erők, illetve nyomatékok meghatározhatók, és az erők, illetve nyomatékok ábrája felrajzolható. A továbbiakban mint végeredményeket közöljük a keret nyomatékai ábráit (lásd az 5. ábrát). A számítás során nyert nyomatékok értékét sem írjuk fel külön, azokat az ábrán tüntetjük fel. Az áttekinthetőség kedvéért a függőleges és a vízszintes síkban ható nyomatékokat, illetve a csavarónyomatékokat külön-külön ábrán adjuk meg. A függőleges síkban ható nyomatékok ábrái az 5/a, b, c, d, a vízszintes síkban ható nyomatékok ábrája az 5/e, míg a csavarónyomatékok ábrája az 5/f. Az erők meghatározása és az erő-ábrák elkészítése ugyanolyan módon történik, éppen azért azok közlését mellőzzük.



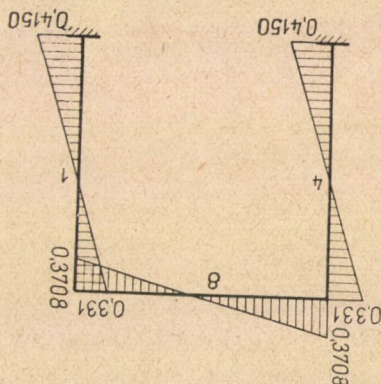
5/a. ábra



5/b. ábra

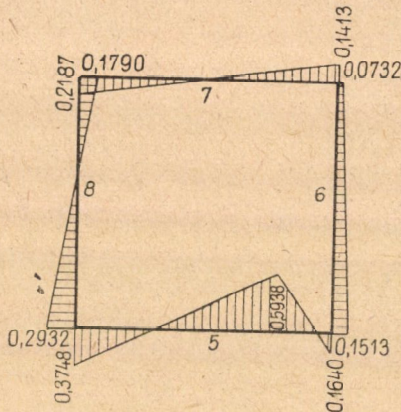


5/c. ábra

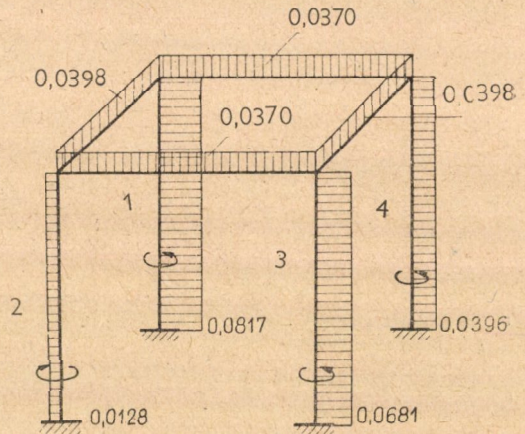


5/d. ábra



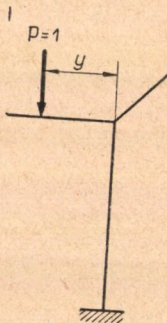


5/e. ábra



5/f. ábra

2°. Meghatározandók az előző példában megadott keret 5-tel jelölt gerendájának középső keresztmetszetére vonatkozó hatásfüggvényei és hatásábrái, ha a keret vízszintes gerendáin egy függőleges egységnyi nagyságú erő halad végig. A feladat megoldása szempontjából teljesen kielégítő, ha az erő csupán a jelzett keresztmetszet és a 2-es oszlop közötti szakaszán halad végig. Az 5-ös gerendának és a vízszintes gerendák középső keresztmetszeteinek erre a szakaszra vonatkozó hatásfüggvényeit határozzuk meg. Ezekből a függvényekből aztán az 5-ös gerenda középső keresztmetszetére vonatkozó hatásfüggvény felépíthető (pl. midőn a teher a 8-as gerendán, annak középső keresztmetszete és az 1-es oszlop között mozog, az általa a jelzett keresztmetszetben kifejtett hatás ugyanolyan, mint a 6-os gerenda középső keresztmetszetében keletkező hatások, midőn a teher az 5-ös gerenda középső keresztmetszete és a 2-es oszlop között halad). Midőn pedig a vízszintes gerendák középső keresztmetszetei hatásfüggvényeinek azon szakaszát keressük, mely az 5-ös gerenda középső keresztmetszete és a 2-es oszlop között van, nem kell más tennünk, mint a  $\mathbf{b}$  oszlopmatrixot felírni, mint az erő helyzetének függvényét, s az  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$  egyenletből azonnal nyerhetjük a középső keresztmetszetekben fellépő erőket és nyomatékokat mint a terhelő egységnyi erő helyének a függvényét. Adjuk meg az egységnyi erő helyzetét a 2-es oszloptól mért  $y$  távolságával (lásd a 6. ábrát). Ebben az esetben a terhelési tényezőkből felépített  $\mathbf{b}$  oszlopmatrix (transzponált alakban) a következő:



6. ábra

$$\mathbf{b}^* = [\mathbf{b}_1^*, \mathbf{b}_2^*, \mathbf{b}_3^*, \mathbf{b}_4^*, \mathbf{b}_5^*, \mathbf{b}_6^*],$$

ahol

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1,25y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1,25y + 0,125y^2 - 0,016y^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,25y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} -0,5y - 0,05y^2 \\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_5 = 0$$

$$\mathbf{b}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,5y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Így a gerendák középső keresztmetszetében ható erők a következőképpen adhatók meg:

$$X_{11} = 0,0180y^2 - 0,0903y \qquad X_{21} = X_{41} = 0$$

$$X_{31} = 0,0019y^2 - 0,0097y$$

$$X_{12} = 0,1487y + 0,0307y^2 - 0,041y^3$$

$$X_{22} = X_{42} = 0,0055y - 0,0033y^2 + 0,0004y^3$$

$$X_{32} = -0,0227y + 0,0136y^2 - 0,0018y^3$$

$$X_{13} = X_{33} = 0,0078y - 0,0047y^2 + 0,0006y^3$$

$$X_{23} = X_{43} = -0,0113y + 0,0068y^2 - 0,0009y^3$$

$$X_{14} = -0,1505y - 0,0699y^2 \qquad X_{24} = X_{44} = 0$$

$$X_{34} = -0,0162y + 0,0032y^2$$

$$X_{15} = X_{25} = X_{35} = X_{45} = 0 \quad (\text{azaz függőleges terhelés esetén a gerendák közepén vízszintes nyomaték nem lép fel})$$

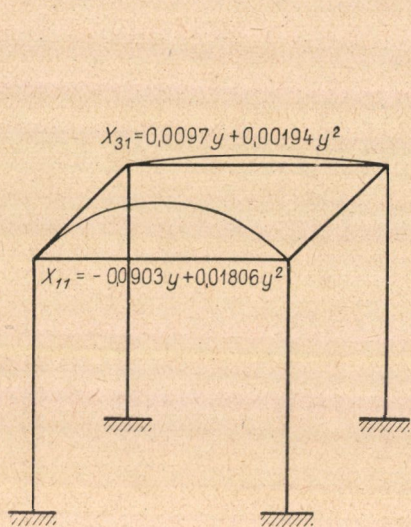
$$X_{16} = X_{36} = -0,0034y + 0,0020y^2 - 0,00027y^3$$

$$X_{26} = -0,0866y + 0,0325y^2 - 0,0030y^3$$

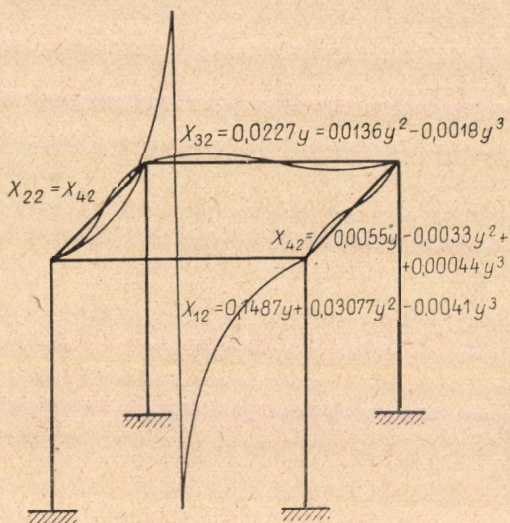
$$X_{46} = 0,0106y + 0,0130y^2 - 0,0030y^3$$



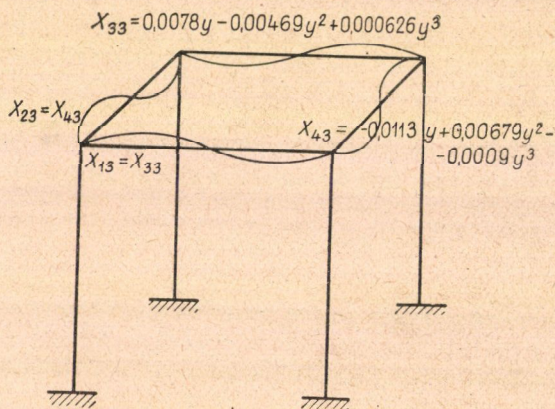
Végül közöljük a keret 5-ös gerendájának középső keresztmetszetére vonatkozó *hatásábrákat* (7, —11, ábrák).



7. ábra  
Normálerő hatásábrája

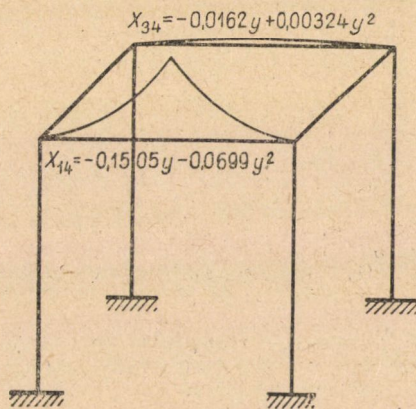


8. ábra  
Függőleges nyíróerő hatásábrája



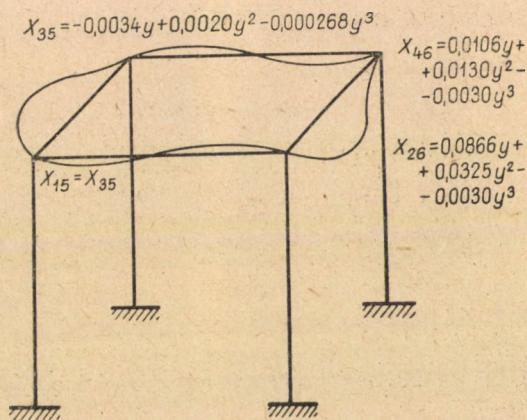
9. ábra  
Függőleges síkban ható nyomaték hatásábrája





10. ábra

Vízszintes nyíróerő hatásábrája



11. ábra

Csavarónyomaték hatásábrája

(Beérkezett: 1956. VII. 16.)

## IRODALOM

- [1] BÉRES E.—LOVASS-NAGY V.—SZABÓ J.: „Ciklikus szimmetriával bíró térbeli rácsos tartók rúderőinek meghatározása hipermatrixok alkalmazásával.” *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 1 (1956) 559—576 (az előző cikk).
- [2] KORÁNYI I.: *Tartók statikája*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.



# ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМ С ПРИМЕНЕНИЕМ ГИПЕРМАТРИЦ

E. BÉRES

## Резюме

Известно, что математическое исследование технических проблем теории упругости на основании закона Гука, вообще говоря, приводит к линейной системе уравнений. Многие авторы заметили, что матрица коэффициентов пространственных решетчатых конструкций, обладающих циклической симметрией, показывает циклическую симметрию; так, например, H. REISSNER, L. MANN и W. KAUFMANN пытаются использовать эту циклическую симметрию, но не используют выгоды, которые может дать матричное исчисление.

Настоящая работа занимается исследованием таких центральносимметричных рам, горизонтальные балки которых во всех отношениях равны и образуют правильный  $m$ -угольник, вертикальные колонны также во всех отношениях равны, в вершинах многоугольника жестко присоединяются к балкам и на другом конце также жестко закреплены. (См. рис. 1.)

Автор показывает, что математическое исследование таких рам значительно упрощается, если использовать несколько свойств гиперматриц, состоящих из циклических блоков. Выведенные результаты пригодны и для машинного вычисления.

# ÜBER EINE ANWENDUNG DER HYPERMATRIZEN ZUR BERECHNUNG VON RÄUMLICHEN STABWERKEN MIT ZYKLISCHER SYMMETRIE

E. BÉRES

## Zusammenfassung

Es ist bekannt, dass die mathematische Untersuchung von Problemen der technischen Festigkeitslehre auf Grund des Hookeschen Gesetzes auf lineare Gleichungssysteme führen. Hat ein räumliches Stabwerk eine Aufbau von zyklischer Symmetrie, dann zeigt auch die Koeffizienten-Matrix des Gleichung-Systems eine zyklische Regelmässigkeit: d. h. sie ist in zyklische Blöcke zerlegbar. Es ist von mehreren Verfassern versucht, um diese zyklische Regelmässigkeit auszunützen (zum Beispiel: H. REISSNER, L. MANN und W. KAUFMANN), aber diese Verfasser benützen nicht die Möglichkeiten der Matrizenrechnung.

Verfasser zeigt, dass falls die Koeffizienten-Matrix in zyklische Blöcke zerlegt ist, mit Hilfe der Hypermatrizen-Theorie einheitliche und übersichtliche Lösungsformeln zu gewinnen sind. Diese Lösungsformeln sind auch zur maschinelle Berechnung gut anwendbar.



# A MATRIX-SZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA RUDAK ÉS LEMEZEK SZTATIKÁJÁBAN

RÓZSA PÁL

## Jelölések :

$a, b, \dots$	skalárok
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	oszlopvektorok
$\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \dots$	sorvektorok
$\mathbf{e}_i$	$i$ -edik oszlop-egységvektor
$\mathbf{f}_j^*$	$j$ -edik sor-egységvektor
$\mathbf{A}, [a_{ij}], \dots$	matrixok
$\mathbf{A}_n$	$n$ -edrendű kvadratikus matrix
$\mathbf{A}^*$	$\mathbf{A}$ transzponáltja
$ \mathbf{A} $	$\mathbf{A}$ determinánsa
$\mathbf{A}_{\beta_1 \dots \beta_\nu}^{\alpha_1 \dots \alpha_\mu}$	$\alpha_1 \dots \alpha_\mu$ sorok és $\beta_1 \dots \beta_\nu$ oszlopok által meghatározott minor-matrix
$\langle c_1 \dots c_n \rangle$	diagonálmatrix
$\mathbf{E}$	egységmatrix
$[\mathbf{A}_{ij}] = [a_{pq}^{(ij)}] \dots$	$a_{pq}^{(ij)}$ skalár-elemekből, illetve $\mathbf{A}_{ij}$ matrix-elemekből felépített hiper-matrix
$\langle \mathbf{A}_{ij} \rangle$	diagonális hipermatrix
$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = [\mathbf{A}b_{ij}] \dots$	direkt szorzat

## Bevezetés

A dolgozat egy- és kétdimenziós rugalmas kontinuumok (rudak és téglalapalakú lemezek) tetszőleges transzverzális terhelés hatására elfoglalt egyensúlyi helyzetének meghatározásával foglalkozik. A probléma — mint ismertes — rudak esetén az  $y^{(4)} = p(x)/EJ$  közönséges, lemezek esetén a  $\Delta \Delta w = t(x, y)/N$  inhomogén biharmonikus differenciálegyenletre vezet. Ezek közelítő megoldására az úgynevezett rács-módszert alkalmazzuk, melynek lényege abban áll, hogy a differenciálegyenletet differenciaegyenlettel közelítjük. Ennek megoldása olyan lineáris algebrai egyenletrendszerre vezet, melynek együttható-matrixa a kerületi feltételeket automatikusan kielégíti, reciproka pedig közelítően megadja a probléma Green-függvényét. Az 1. §-ban a két végén alátámasztott rúd, a mindkét végén befogott rúd, valamint a konzol esetében oldjuk meg a feladatot, s határátmenettel előállítjuk a Green-függvényt. A módszer egyben útmutatást ad a bonyolultabb, kétdimenziós problémákra vonatkozó feladatok megoldására. Ezekkel foglalkozik a 2. §. A négy oldalán alátámasztott, valamint a két-két szembenfekvő oldalán alátámasztott, illetve befogott lemez esetén a rács-módszerrel felírt differenciaegyenlethez tartozó együttható-matrixok páronként felcserélhető blokkokból



állnak. Reciprokok tetszőleges eleme az Egerváry-féle hipermatrix algoritmus [5] segítségével explicite felírható, és a határátmenet — mellyel a feladathoz tartozó Green-függvényhez jutunk — szintén elvégezhető. A négy oldalán befogott lemez esetén az együtthatómatrix nem-felcserélhető blokkokból áll. Reciprokának kiszámítására J. SHERMAN és W. J. MORRISON egy, a módosított matrixok reciprokának meghatározására szolgáló tételének [15] a szerzőtől származó általánosítását [13] alkalmazzuk. A vizsgált esetekben megmutatkozik az a lényeges különbség, mely a felcserélhető és a nem-felcserélhető blokkokból álló hipermatrixok alkalmazása között fennáll.

### 1. §. Rudak sztatikája

Tekintsünk egy  $l$  hosszúságú állandó keresztmetszetű, homogén rudat. Tengelyére merőlegesen  $p(x)$  megoszló terhelés hat. A rúd rugalmas szálának differenciálegyenlete

$$(1.1) \quad y^{(4)} = \frac{p(x)}{EJ},$$

ahol  $J$  a keresztmetszetnek, a súlyponton átmenő és a terhelésre merőleges tengelyre vett inercianyomatéka,  $E$  a Young-féle modulus.<sup>1)</sup>

A rugalmas szál egyenletét a kerületi feltételek figyelembevételével számítjuk. Aszerint, hogy a rúd vége alátámasztott<sup>2)</sup>, befogott vagy szabad, az (1.1) egyenlet megoldását a következő három esetben határozzuk meg:

a) *A két végén alátámasztott rúd.* Kerületi feltételek:

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0,$$

$$y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0.$$

b) *Mindkét végén befogott rúd.* Kerületi feltételek:

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0,$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

<sup>1)</sup> Az (1.1) egyenlet a következő feltételek mellett érvényes (lásd pl.: [8], 85–88. oldalak):

a) A rúd keresztirányú méretei kicsinyek a hosszához képest (ekkor a nyírásból eredő alakváltozás elhanyagolható a hajlításból eredő alakváltozás mellett);

b) A hajlításból eredő alakváltozásra, vagyis a rúd szálainak hosszváltozására érvényes a Hooke-törvény;

c) A rúd-tengelyre merőleges síkkeresztmetszetek az alakváltozás után a rugalmas szála merőleges síkok maradnak;

d) A rúd szimmetrikus a súlyponti szálon átmenő egyik síkra és a hajlítás ebben a síkban történik.

<sup>2)</sup> „Alátámasztáson” azt értjük, hogy a rúd vége csuklóval van rögzítve, tehát nem mozdulhat el, és nyomatékot sem képes átadni.



c) *Befogott rúd (konzol)*. Kerületi feltételek:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, & y''(l) &= 0, \\ y'(0) &= 0, & y'''(l) &= 0. \end{aligned}$$

Amint a bevezetőben említettük, a feladatokat úgy oldjuk meg, hogy az (1.1) differenciáegyenletet differenciaegyenlettel közelítjük. E célból a rudat  $n-1$  osztásponttal  $n$  egyenlő részre osztjuk, és a megoszló terhelést az osztáspontokban ható

$$(1.2) \quad q_k = p \left( \frac{k}{n} l \right) \frac{l}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

nagyságú koncentrált erőkkkel helyettesítjük. Az egyes osztáspontok elmozdulása legyen  $y_k$ . A továbbiakban tehát<sup>3)</sup> a

$$(1.3) \quad \Delta^4 y_k \equiv y_{k-2} - 4y_{k-1} + 6y_k - 4y_{k+1} + y_{k+2} = \frac{q_k}{EJ} \left( \frac{l}{n} \right)^3$$

negyedrendű állandó együtthatójú lineáris differenciaegyenletnek különféle kerületi feltételeket kielégítő megoldását keressük. Ezeket a kerületi feltételeket a következőképpen vesszük figyelembe.

*Áltámasztott rúd* esetén

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \Delta^2 y_0 &\equiv y_{-1} - 2y_0 + y_1 = 0, \\ y_0 &= 0. \end{aligned}$$

Mivel

$$\Delta^4 y_1 \equiv y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3,$$

azaz

$$\Delta^4 y_1 \equiv \Delta^2 y_0 - 2y_0 + 5y_1 - 4y_2 + y_3,$$

tehát az (1.4) kerületi feltételek figyelembevételével a rendszer első egyenlete:

$$5y_1 - 4y_2 + y_3 = \frac{q_1}{EJ} \left( \frac{l}{n} \right)^3,$$

a többi pedig (1.3) alapján közvetlenül felírható.

*Befogott rúd* esetén feltehetjük, hogy az a befogáson túl is vízszintesen folytatódik, vagyis  $y_0 = y_{-1} = 0$ , az egyenletrendszer tehát (1.2) segítségével könnyen felírható.

<sup>3)</sup> Lásd pl.: [12], 40. oldal.



Konzol esetén — ha  $n$  indexszel jelöljük a rúd szabad végét —

$$(1.5) \quad \Delta^3 y_n \equiv -y_{n-1} + 3y_n - 3y_{n+1} + y_{n+2} = 0,$$

$$\Delta^2 y_n \equiv y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} = 0.$$

Mivel

$$\Delta^4 y_n \equiv y_{n-2} - 4y_{n-1} + 6y_n - 4y_{n+1} + y_{n+2}$$

azaz

$$\Delta^4 y_n \equiv y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n - \Delta^2 y_n - \Delta^3 y_n,$$

tehát az (1.5) kerületi feltételek figyelembevételével a rendszer  $n$ -edik egyenlete:

$$y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n = \frac{q_n}{EJ} \left( \frac{l}{n} \right)^3.$$

Az  $(n-1)$ -edik egyenlet a

$$\Delta^4 y_{n-1} \equiv y_{n-3} - 4y_{n-2} + 5y_{n-1} - 2y_n + \Delta^2 y_n$$

összefüggés miatt:

$$y_{n-3} - 4y_{n-2} + 5y_{n-1} - 2y_n = \frac{q_{n-1}}{EJ} \left( \frac{l}{n} \right)^3;$$

a többi egyenlet pedig (1.3) segítségével nyerhető.

Fentiek alapján az (1.3) differenciaegyenletet egyetlen matrixegyenletként írhatjuk fel, amely az adott kerületi feltételeket automatikusan kielégíti:

$$\mathbf{C} \mathbf{y} = \frac{l^3}{EJn^3} \mathbf{q}.$$

A kapott egyenletet az együtthatómatrix invertálásával oldjuk meg

$$\mathbf{y} = \frac{1}{EJ} \mathbf{U} \mathbf{q},$$

ahol az

$$\mathbf{U} = [u_{ij}^{(n)}] = \left( \frac{l}{n} \right)^3 \mathbf{C}^{-1}$$

reciprokmatrix a rúd Green-függvényének finit analogonja.

Az (1.3) differenciaegyenlet megoldását tehát

$$(1.6) \quad y_i = \frac{1}{EJ} \sum_j u_{ij}^{(n)} q_j$$

alakban kapjuk.



A  $\mathbf{C}$  együttható-matrix szerkezetét — a különféle kerületi feltételeknek megfelelően — alább tüntetjük fel.

a) *A két végén alátámasztott rúd esetén :*

$$\mathbf{C}_{n-1}^{(a)} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & . & . & . & . \\ 1 & -4 & 6 & -4 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1. \\ (2. \\ \\ \\ \\ \\ \\ (n-1. \end{matrix}$$

b) *Mindkét végén befogott rúd esetén :*

$$\mathbf{C}_{n-1}^{(b)} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & . & . & . & . & . \\ 1 & -4 & 6 & -4 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ -4 & 6 & -4 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1. \\ (2. \\ \\ \\ \\ \\ \\ (n-1. \end{matrix}$$

c) *Konzol esetén :*

$$\mathbf{C}_n^{(c)} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ -4 & 6 & -4 & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & -4 & 5 & -2 & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1. \\ (2. \\ \\ \\ \\ \\ \\ (n-1. \\ (n. \end{matrix}$$

A reciprokmatrix elemeit az egyes esetekben a következőképpen határozzuk meg.



a) Könnyen belátható, hogy  $C^{(a)}$  az

$$(1.7) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

kontinuáns matrix négyzete. Reciprokát tehát  $A$  reciprokának a négyzete adja. Ennek közvetlen matrix-szorzással való kiszámítása hosszadalmas, és kevésbé áttekinthető eredményre vezet, ezért célszerűbbnek látszik az alábbi módszer szerint számítani.

Az

$$[(A - \lambda E)^{-1} - A^{-1} = \lambda(A - \lambda E)^{-1} A^{-1}]$$

matrix-azonosságból — ez finit analogonja annak a már D. HILBERT által megadott azonosságnak, mely az iterált Green-függvény kiszámítását különbségi hányados kiszámítására vezeti vissza<sup>4)</sup> — következik, hogy

$$(1.8) \quad \left\{ \frac{d}{d\lambda} (A - \lambda E)^{-1} \right\}_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \{ (A - \lambda E)^{-1} - A^{-1} \} = A^{-2} = (C^{(a)})^{-1}.$$

Az  $A - \lambda E$  karakterisztikus matrix reciprokának deriváltját a  $\lambda = 0$  helyen legegyszerűbben úgy kapjuk meg, hogy  $(A - \lambda E)^{-1} = [r_{ij}]$  elemeit  $\lambda$  szerint hatványsorba fejtjük. Az elsőfokú tagok együtthatói adják a keresett matrixelemeket.

Bevezetve a  $2 \cos \theta = 2 - \lambda$  transzformációt,

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{\sin i\theta}{\sin \theta} \frac{\sin(n-j)\theta}{\sin n\theta}, & \text{ha } i \leq j \\ \frac{\sin j\theta}{\sin \theta} \frac{\sin(n-i)\theta}{\sin n\theta}, & \text{ha } i \geq j \end{cases}$$

adódik.<sup>5)</sup> Itt a  $\lambda$  szerinti sorfejtés elsőfokú tagjának,  $\lambda = 4 \sin^2 \theta/2$  miatt — közelítőleg — a  $\theta$  szerinti sorfejtés másodfokú tagja felel meg, tehát az

<sup>4)</sup> Lásd : [10], 21. oldal.

<sup>5)</sup> Lásd pl. : [4], 457. oldal.



$$\begin{aligned}
 r_{ij} &= \frac{\left( i\theta - \frac{i^3\theta^3}{3!} + \dots \right) \left( (n-j)\theta - \frac{(n-j)^3\theta^3}{3!} + \dots \right)}{\left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) \left( n\theta - \frac{n^3\theta^3}{3!} + \dots \right)} = \\
 &= \frac{\left( j\theta - \frac{j^3\theta^3}{3!} + \dots \right) \left( (n-i)\theta - \frac{(n-i)^3\theta^3}{3!} + \dots \right)}{\left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) \left( n\theta - \frac{n^3\theta^3}{3!} + \dots \right)} = \\
 &= \frac{i(n-j)}{n} \left\{ 1 + \frac{1}{3!} (n^2 - (i^2 - 1) - (n-j)^2) \theta^2 + \dots \right\}, \quad \text{ha } i \leq j \\
 &= \frac{j(n-i)}{n} \left\{ 1 + \frac{1}{3!} (n^2 - (j^2 - 1) - (n-i)^2) \theta^2 + \dots \right\}, \quad \text{ha } i \geq j
 \end{aligned}$$

kifejezésekből az

$$U^{(a)} = \left( \frac{l}{n} \right)^3 (C^{(a)})^{-1}$$

reciprokmatrux keresett elemeire azt kapjuk, hogy

$$(1.9) \quad (u_a^{(n)})_{ij} = \begin{cases} \frac{l^3}{3!} \frac{i}{n} \left( 1 - \frac{j}{n} \right) \left( 1 - \frac{i^2 - 1}{n^2} - \left( 1 - \frac{j}{n} \right)^2 \right), & \text{ha } i \leq j \\ \frac{l^3}{3!} \frac{j}{n} \left( 1 - \frac{i}{n} \right) \left( 1 - \frac{j^2 - 1}{n^2} - \left( 1 - \frac{i}{n} \right)^2 \right), & \text{ha } i \geq j. \end{cases}$$

Az  $a)$  feladat közelítő megoldását — tehát a mindkét végén alátámasztott rúd tetszőleges, transzverzális terhelés hatására elfoglalt egyensúlyi helyzetének közelítő meghatározására szolgáló (1.3) differenciaegyenlet megoldását — megkapjuk, ha (1.6)-ba az (1.9) kifejezést behelyettesítjük.

Ha  $n \rightarrow \infty$ , és egyidejűleg  $il/n \rightarrow x$  és  $jl/n \rightarrow \xi$ , a reciprokmatruxok sorozatának  $(u_a^{(n)})_{ij}$  eleme, a két végén alátámasztott rúd  $G^{(a)}(x, \xi)$  Green-függvényéhez<sup>6)</sup> konvergál:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ il/n \rightarrow x \\ jl/n \rightarrow \xi}} (u_a^{(n)})_{ij} &= G^{(a)}(x, \xi) = \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{3!} \frac{x(l-\xi)}{l} (2l\xi - x^2 - \xi^2), & \text{ha } x \leq \xi \\ \frac{1}{3!} \frac{\xi(l-x)}{l} (2lx - \xi^2 - x^2), & \text{ha } x \geq \xi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

<sup>6)</sup> Lásd pl.: [6], I. kötet, 478. oldal.



Az (1.3) differenciaegyenlet (1.6) megoldása pedig (tekintetbe véve az (1.2) összefüggést) olyan közelítő összeg, melyből határátmenettel — ha még egyidejűleg az egyes összegekben szereplő  $i$  úgy változik, hogy  $il/n \rightarrow x$  — éppen az

$$y(x) = \frac{1}{EJ} \int_0^l G^{(a)}(x, \xi) p(\xi) d\xi$$

integrál adódik, ami az (1.1) differenciálegyenletnek az  $a$ ) kerületi feltételeket kielégítő megoldását adja.

b) *A mindkét végén befogott rúd* esetén fellépő  $C^{(b)}$  matrix reciproknak az elemeit lényegében a

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \Delta^4 f(x, y) &= f(x+4, y) - 4f(x+3, y) + 6f(x+2, y) - \\ &- 4f(x+1, y) + f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x+2=y \\ 0, & \text{ha } x+2 \neq y \end{cases} \end{aligned}$$

állandó együtthatójú negyedrendű inhomogén lineáris differenciaegyenletnek az

$$f(0, y) = f(1, y) = f(n+1, y) = f(n+2, y) = 0$$

feltételeket kielégítő megoldása szolgáltatja.

Ismeretes<sup>7)</sup>, hogy a

$$(1.11) \quad \Delta^k f(x) = Q(x)$$

$k$ -adrendű differenciaegyenletnek a szokásos

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \dots = \varphi(k-1) = 0$$

kezdeti feltételeket kielégítő megoldását

$$(1.12) \quad \hat{\varphi}(x) = \sum_{t=0}^{x-1} \binom{x-t-1}{k-1} Q(t)$$

adja. Ha az  $\binom{x-t-1}{k-1}$  kifejezést az  $x_p$  ( $p=1, \dots, k$ ) helyeken felvett értékeivel és az  $e$  helyeken interpoláló  $L_p(x)$  Lagrange-féle alappolinomok segítségével

$$\binom{x-t-1}{k-1} = \sum_{p=1}^k \binom{x_p-t-1}{k-1} L_p(x)$$

<sup>7)</sup> Lásd pl. : [9], 315. oldal.



alakban állítjuk elő, és az (1.12) megoldásból levonjuk a homogén egyenletnek azt a megoldását, amelyik az  $x_v$  helyeken éppen a  $\varphi(x_v)$  értékeket veszi fel, akkor az (1.11) egyenletnek az

$$f(x_v) = 0, \quad v = 1, \dots, k$$

feltételeket kielégítő megoldását

$$(1.13) \quad f(x) = \sum_{v=1}^k L_v(x) \sum_{t=x_v}^{x-1} \binom{x_v - t - 1}{k-1} Q(t)$$

alakban kapjuk.<sup>8)</sup> Megjegyezzük hogy a különbség képzéséből kifolyólag  $x < x_v$  esetén a második összeget a következőképpen értelmezzük:

$$\sum_{t=x_v}^{x-1} \binom{x_v - t - 1}{k-1} Q(t) = - \sum_{t=x}^{x_v-1} \binom{x_v - t - 1}{k-1} Q(t).$$

Az (1.13) összefüggést alkalmazva, az (1.10) differenciaegyenletnek az adott feltételeket kielégítő megoldását a következő alakban nyerjük:

$$f(x, y) = \begin{cases} L_1(x) \binom{-y+1}{3} + L_2(x) \binom{-y+2}{3}, & \text{ha } y \leq x, \\ -L_3(x) \binom{n-y+2}{3} - L_4(x) \binom{n-y+3}{3}, & \text{ha } y \geq x. \end{cases}$$

Behelyettesítve  $L_v(x)$  kifejezéseit, valamint figyelembe véve, hogy a keresett reciprokmatrix elemeinek indexét és az (1.10) differenciaegyenletben szereplő  $x, y$  változókat az  $x = i + 1, y = j + 1$  összefüggések kapcsolják össze, végül mivel az invertálandó matrix szimmetrikus, az

$$\mathbf{U}^{(b)} = \left( \frac{l}{n} \right)^3 (\mathbf{C}^{(b)})^{-1}$$

reciprokmatrix keresett elemeire

$$(1.14) \quad (u_b^{(n)})_{ij} = \begin{cases} \frac{l^3}{3!} \frac{i}{n} \frac{i+1}{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \left(\frac{2j}{n} \frac{i+2}{n+2} - \frac{3j-i+1}{n}\right), & \text{ha } i \leq j \\ \frac{l^3}{3!} \frac{j}{n} \frac{j+1}{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \left(\frac{2i}{n} \frac{j+2}{n+2} - \frac{3i-j+1}{n}\right), & \text{ha } i \geq j \end{cases}$$

<sup>8)</sup> Itt lényegében K. TH. VAHLEN-nek differenciaegyenletek Lagrange-féle feltételeket kielégítő megoldásának meghatározására szolgáló módszerét differenciaegyenletre alkalmaztuk. (Lásd: [17], 285. oldal.)



adódik. Ha  $n \rightarrow \infty$ , és egyidejűleg  $il/n \rightarrow x$  és  $jl/n \rightarrow \xi$ , ezúttal a két végén befogott rúd  $G^{(b)}(x, \xi)$  Green-függvényéhez<sup>9)</sup> jutunk:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ il/n \rightarrow x \\ jl/n \rightarrow \xi}} (u_b^{(n)})_{ij} = G^{(b)}(x, \xi) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3!} \frac{x^2(l-\xi)^2}{l^2} \left( \frac{2x\xi}{l} - 3\xi + x \right), & \text{ha } x \leq \xi \\ \frac{1}{3!} \frac{\xi^2(l-x)^2}{l^2} \left( \frac{2x\xi}{l} - 3x + \xi \right), & \text{ha } x \geq \xi. \end{cases}$$

c) A konzol esetén fellépő  $C^{(c)}$  matrix reciprokát legcélszerűbb úgy meghatározni, hogy azt az alábbiak szerint blokkokra particionáljuk:

$$C^{(c)} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 6 & -4 & 1 & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & & & & & \\ & & & & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \hline & & & & & & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & & & & & & 1 & & -2 & 1 \end{array} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^* & \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

és alkalmazzuk a szimmetrikusan négy blokkra particionált hipermatrixok kiszámítására szolgáló<sup>10)</sup>

$$(1.15) \quad (C^{(c)})^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{H} - \mathbf{F}^*\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^*\mathbf{D}^{-1} & -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{H} - \mathbf{F}^*\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F})^{-1} \\ -(\mathbf{H} - \mathbf{F}^*\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^*\mathbf{D}^{-1} & (\mathbf{H} - \mathbf{F}^*\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F})^{-1} \end{bmatrix}$$

képletet. A fenti kifejezésben szereplő  $\mathbf{F}$  matrix egyszerű szerkezete folytán, a  $\mathbf{H} - \mathbf{F}^*\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}$  matrix elemeinek meghatározásához, az  $((n-2)$ -edrendű)  $\mathbf{D}^{-1}$  reciprokmatrix másodrendű bal felső sarokblokkjának elemeit kell csak felhasználni. Az (1.14) összefüggések alapján

<sup>9)</sup> Lásd pl.: [2], 26. §. (93)

<sup>10)</sup> Lásd pl.: [3], 31. oldal.



$$(1.16) \quad (\mathbf{H} - \mathbf{F}^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F})^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (n-1)(n-\frac{1}{2})n & (n-1)n(n+1) \\ (n-1)n(n+1) & n(n+\frac{1}{2})(n+1) \end{bmatrix}$$

adódik. Ennek segítségével az (1.15) reciprokmatrix többi blokkjának az elemei is kiszámíthatók. A  $-\mathbf{D}^{-1} \mathbf{F} (\mathbf{H} - \mathbf{F}^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F})^{-1}$  (kétoszlopos) blokk  $i$ -edik sorának elemei:

$$(1.17) \quad \frac{1}{3!} i(i+1) \{3(n-1) - (i+1)\}; \quad \frac{1}{3!} i(i+1) \{3n - (i-1)\};$$

végül a  $\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{F}^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^* \mathbf{D}^{-1}$  blokk általános eleme:

$$(1.18) \quad \begin{cases} \frac{1}{3!} i(i+1) \{3j - (i-1)\}, & \text{ha } i \leq j \\ \frac{1}{3!} j(j+1) \{3i - (j-1)\}, & \text{ha } i \geq j. \end{cases}$$

A kapott (1.16), (1.17) és (1.18) összefüggések egyidejű figyelembevételével, az

$$\mathbf{U}^{(c)} = \left(\frac{l}{n}\right)^3 (\mathbf{C}^{(a)})^{-1}$$

reciprokmatrix keresett elemei:

$$(u_c^{(n)})_{ij} = \begin{cases} \frac{l^3}{3!} \frac{i}{n} \frac{i+1}{n} \left(\frac{3j}{n} - \frac{i-1}{n}\right), & \text{ha } i \leq j \\ \frac{l^3}{3!} \frac{j}{n} \frac{j+1}{n} \left(\frac{3i}{n} - \frac{j-1}{n}\right), & \text{ha } i \geq j. \end{cases}$$

Innen — ismét határátmenettel — megkapjuk a konzol  $G^{(c)}(x, \xi)$  Green-függvényét:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ i/n \rightarrow x \\ j/n \rightarrow \xi}} (u_c^{(n)})_{ij} = G^{(c)}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{3!} x^2 (3\xi - x), & \text{ha } x \leq \xi \\ \frac{1}{3!} \xi^2 (3x - \xi), & \text{ha } x \geq \xi. \end{cases}$$

## 2. §. Lemezek sztatikája

Tekintsünk egy  $a$  és  $b$  oldalú, téglalapalakú, állandó vastagságú, homogén izotrop lemezt, melyre  $t(x, y)$  transzverzális megoszló terhelés hat. A lemez rugalmas felületének egyenletét a

$$(2.1) \quad \Delta \Delta w = \frac{t(x, y)}{N}$$



inhomogén biharmonikus differenciálegyenlet megoldása határozza meg, ahol  $N = E\delta^3/12(1-\nu^2)$ ;  $E$  a Young-féle modulus,  $\delta$  a lemez vastagsága,  $\nu$  a Poisson-féle szám<sup>11)</sup>. A lemez rugalmas felületének egyenletét a (2.1) egyenletből a kerületi feltételek figyelembevételével határozhatjuk meg. Aszerint, hogy a lemez a szélein alátámasztott vagy befogott, a (2.1) egyenlet megoldását a következő két esetben kívánjuk meghatározni:

a) *Mind a négy oldalán alátámasztott lemez.* Kerületi feltételek:<sup>12)</sup>

$$\begin{aligned} w(0, y) = w(a, y) = 0, & \quad w(x, 0) = w(x, b) = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0, & \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = 0. \end{aligned}$$

b) *Két-két szembenfekvő oldalán alátámasztott, illetve befogott lemez.* Kerületi feltételek:

$$\begin{aligned} w(0, y) = w(a, y) = 0, & \quad w(x, 0) = w(x, b) = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0, & \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0. \end{aligned}$$

c) *Mind a négy oldalán befogott lemez.* Kerületi feltételek:

$$\begin{aligned} w(0, y) = w(a, y) = 0, & \quad w(x, 0) = w(x, b) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0, & \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0. \end{aligned}$$

A (2.1) parciális differenciálegyenletet differenciaegyenlettel közelítjük, és — amint az 1. §-ban is tettük — a kerületi feltételek figyelembevételével felírt matrixegyenletet az együtthatómatrix invertálásával oldjuk meg. Egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a téglalap oldalainak aránya racionális,

<sup>11)</sup> A (2.1) egyenlet a következő feltételek mellett érvényes (lásd pl.: [8], 88–91. oldal és [16], 85–95. oldal):

a) A nyírásból eredő alakváltozás elhanyagolható a hajlításból és csavarásból eredő alakváltozás mellett (vagyis a lemez vastagsága kicsiny a másik két irányú méretehöz képest);

b) A tekintetbe vett alakváltozásokra nézve a lemez anyaga a Hooke-törvényt követi;

c) A lemez középsíkjára merőleges egyenesek az alakváltozás után a rugalmas felületre merőleges egyenesek maradnak.

<sup>12)</sup> Teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy az alátámasztott oldal pontjaira, ha annak egyenlete  $x = \text{konst.}$ , az

$$m_x \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

feltételnek kell teljesülnie, azonban  $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$  miatt  $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$  (lásd pl.: [16], 89. oldal).



és a téglalapot úgy borítjuk be négyzetekkel, hogy  $a = mh$  és  $b = nh$  legyen, ahol  $h$  a négyzetek oldalhossza. A megoszló terhelést a rácspontokban ható

$$t_{ip} = h^2 t \left( \frac{p}{m} a, \frac{i}{n} b \right)$$

nagyságú koncentrált erőkkel helyettesítjük. Az egyes rácspontok elmozdulása legyen  $w_{ip}$ . Vezessük be a  $\Delta_h \Delta_h$  „biharmonikus differenciaoperátort”, ahol<sup>13)</sup>

$$\begin{aligned} \Delta_h \Delta_h w_{ip} = & \\ & = 20 w_{ip} - 8(w_{i-1,p} + w_{i+1,p} + w_{i,p-1} + w_{i,p+1}) + \\ & + 2(w_{i-1,p-1} + w_{i-1,p+1} + w_{i+1,p-1} + w_{i+1,p+1}) + \\ & + w_{i,p-2} + w_{i,p+2} + w_{i-2,p} + w_{i+2,p} . \end{aligned}$$

A továbbiakban tehát a

$$(2.2) \quad \Delta_h \Delta_h w_{ip} = \frac{h^2}{N} t_{ip} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1, p = 1, 2, \dots, m-1)$$

inhomogén „biharmonikus” differenciaegyenletnek különböző kerületi feltételeket kielégítő megoldását keressük. A differenciaegyenletnek differenciaegyenlettel való közelítéséből következik, hogy a kerületi feltételekben szereplő parciális deriváltakat differenciahányadosokkal helyettesítjük, és a kerülettel szomszédos pontokra vonatkozó (2.2) egyenleteket úgy alakítjuk át, hogy azokban, a  $-1$  és  $n+1$ , illetve  $m+1$  indexű „fiktív” pontok elmozdulásai helyett ezek a differenciahányadosok szerepeljenek. Ennek során hasonlóképpen járunk el, mint a rúd esetén tettük (lásd: 595. oldal). Ezek alapján a (2.2) differenciaegyenletet

$$(2.3) \quad \mathbf{M} \mathbf{w} = \frac{h^2}{N} \mathbf{t}$$

matrixegyenlet alakjában írhatjuk fel, amely — az eddig tárgyalt esetekhez hasonlóan — a kerületi feltételeket automatikusan kielégíti. Az  $\mathbf{M}$  együttható-matrix igen egyszerűen particionálható blokkokra.

<sup>13)</sup> Lásd pl.: [11], 20. oldal és [12], 120. oldal.



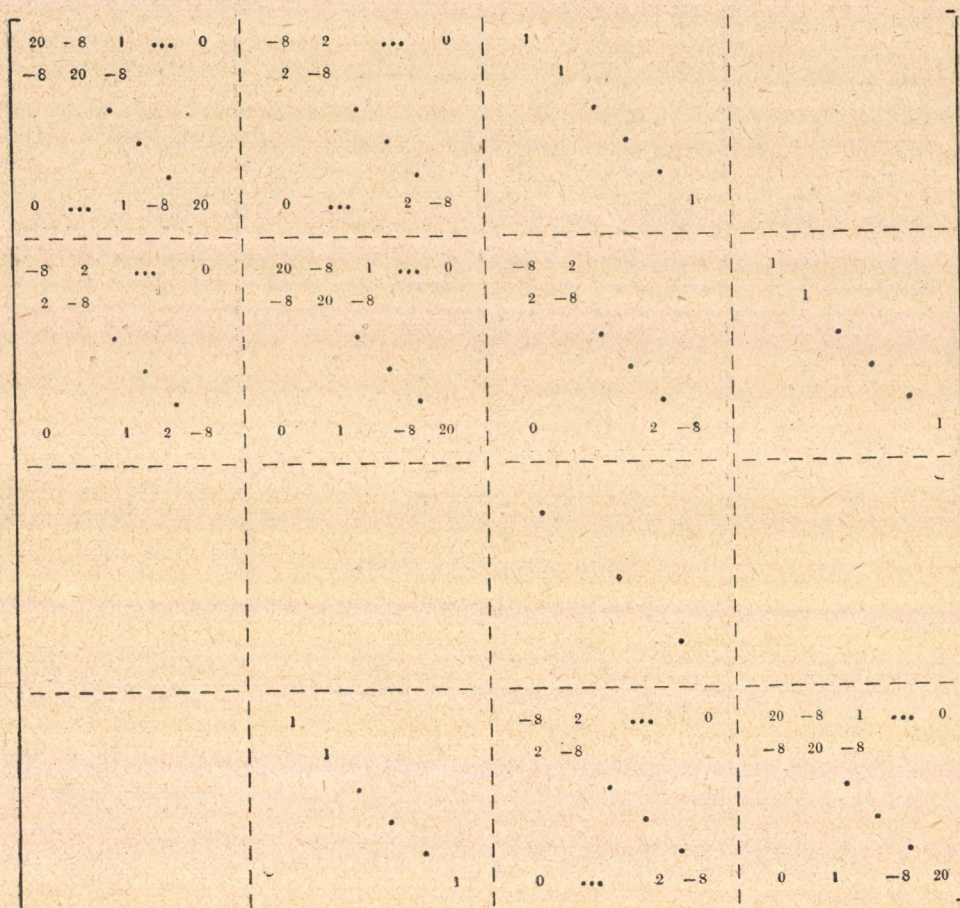








c) Mind a négy oldalán befogott lemez esetén :





A (2.3) matrixegyenlet megoldása :

$$(2.4) \quad w = \frac{1}{N} \mathbf{G} \mathbf{t} ,$$

ahol a

$$\mathbf{G} = [g_{p,q}^{(i,j)}(m, n)] = h^2 \mathbf{M}^{-1}$$

reciprok hipermatrix a lemez Green-függvényének finit analogonja. Tehát a (2.2) differenciaegyenlet megoldása :

$$(2.5) \quad w_{ip} = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} g_{pq}^{(ij)}(m, n) t_{jq} .$$

Az a körülmény, hogy a hipermatrix elemei két-két sor- és oszlop-indexről függenek, utal arra, hogy a lemez Green-függvénye két változó és két paraméter függvénye.

a) A négy oldalán alátámasztott lemez esetén fellépő  $\mathbf{M}^{(a)}$  matrix a

$$(2.6) \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_{ij}] = \mathbf{A}_{m-1} \cdot \times \mathbf{E}_{n-1} + \mathbf{E}_{m-1} \cdot \times \mathbf{A}_{n-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + 2\mathbf{E} & -\mathbf{E} & 0 & \dots & 0 \\ -\mathbf{E} & \mathbf{A} + 2\mathbf{E} & -\mathbf{E} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & -\mathbf{E} & \mathbf{A} + 2\mathbf{E} \end{bmatrix}$$

hipermatrix négyzete. Reciprokát az (1.8) összefüggés felhasználásával

$$(\mathbf{M}^{(a)})^{-1} = \mathbf{B}^{-2} = \left\{ \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E})^{-1} \right\}_{\lambda=0}$$

alakban nyerjük.

Tekintsük most azt a  $[b_{ij}]$  matrixot, amelynek elemei ugyanolyan módon függenek az  $a$  skalártól, mint a  $[B_{ij}]$  hipermatrix blokkjai az  $(m-1)$ -edrendű  $\mathbf{A}$  matrixtól (lásd : (1.7)).

Bevezetve az

$$(2.7) \quad a + 2 - \lambda = 2 \operatorname{ch} \varphi$$

transzformációt, a karakterisztikus matrix  $[b_{ij} - \delta_{ij}]^{-1} = [c_{ij}]$  reciprokáinak elemeit

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} i\varphi}{\operatorname{sh} \varphi} \frac{\operatorname{sh}(n-j)\varphi}{\operatorname{sh} n\varphi} , & \text{ha } i \leq j \\ \frac{\operatorname{sh} j\varphi}{\operatorname{sh} \varphi} \frac{\operatorname{sh}(n-i)\varphi}{\operatorname{sh} n\varphi} , & \text{ha } i \geq j \end{cases}$$



adja.<sup>14)</sup> Ennek deriváltja a  $\lambda = 0$  helyen a  $[b_{ij}]^{-2} = [v_{ij}]$  matrix elemeit adja ;  $i \leq j$  esetén

$$(2.8) \quad v_{ij} = \frac{\operatorname{sh} i\chi \operatorname{sh} (n-j)\chi}{2 \operatorname{sh}^2 \chi \operatorname{sh} n\chi} \times \\ \times \{n \coth n\chi + \coth \chi - i \coth i\chi - (n-j) \coth (n-j)\chi\} ,$$

(ha  $i > j$ , a szimmetria folytán (2.8) jobboldalán  $i$  és  $j$  szerepet cserélnek) ; itt

$$2 \operatorname{ch} \chi = a + 2 .$$

Tekintettel arra, hogy a (2.8) azonosság jobb oldala, az  $a$  skalár határozatlannak racionális függvénye, (2.8) érvényes marad akkor is, ha  $a$  helyére a (nem-szinguláris)  $\mathbf{A}$  matrixot írjuk. Ekkor a

$$(2.9) \quad 2 \operatorname{ch} \mathbf{X} = \mathbf{A} + 2\mathbf{E}$$

összefüggéssel definiált  $\mathbf{X}$  matrix —  $\mathbf{A}$  spektrálfelbontásának a felhasználásával —

$$(2.10) \quad \mathbf{X} = \mathbf{S} \langle \chi_k \rangle \mathbf{S}^*$$

alakban állítható elő<sup>15)</sup>, ahol az  $\mathbf{S} = \sqrt{2/m} [\sin pk\pi/m]$  ortogonális matrix oszlopvektorai  $\mathbf{A}$  sajátvektorai, a  $\chi_k$  értékeket pedig a (2.9) kifejezés

$$\mathbf{S} \langle 2 \operatorname{ch} \chi \rangle \mathbf{S}^* = \mathbf{S} \left\langle 4 - 2 \cos \frac{k\pi}{m} \right\rangle \mathbf{S}^*$$

alakú kanonikus felbontásából adódó

$$(2.11) \quad \operatorname{sh} \frac{1}{2} \chi_k = \sin \frac{k\pi}{2m} \quad (k = 1, 2, \dots, m-1)$$

összefüggés szolgáltatja. Így a keresett  $\mathbf{B}^{-2} = [\mathbf{V}_{ij}]$  hipermatrix blokkjaira  $i \leq j$  esetén

$$\mathbf{V}_{ij} = \frac{\operatorname{sh} i\mathbf{X} \operatorname{sh} (n-j)\mathbf{X}}{2 \operatorname{sh}^2 \mathbf{X} \operatorname{sh} n\mathbf{X}} \times \\ \times \{n \coth n\mathbf{X} + \coth \mathbf{X} - i \coth i\mathbf{X} - (n-j) \coth (n-j)\mathbf{X}\}$$

adódik. Felhasználva az  $\mathbf{X}$  matrix (2.10) alakú kanonikus felbontását, a  $\mathbf{G}^{(a)} = h^2(\mathbf{M}^{(a)})^{-1}$  reciprokmatrix keresett elemeit  $i \leq j$  esetén

<sup>14)</sup> Lásd: [4], 457. oldal.

<sup>15)</sup> Hasonló előállítás található pl. D. E. RUTHERFORD egyik dolgozatában; lásd: [14], 241. oldal.



$$\begin{aligned}
 & g_{pq}^{(ij)}(m, n) = \\
 (2.12) \quad & = \frac{ab}{m^2} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sin \frac{pk\pi}{m} \sin \frac{qk\pi}{m}}{\operatorname{sh}^2 \chi_k} \frac{\operatorname{sh} i\chi_k \operatorname{sh} (n-j)\chi_k}{\operatorname{sh} n\chi_k} \times \\
 & \times \left\{ \coth n\chi_k + \frac{1}{n} \coth \chi_k - \frac{i}{n} \coth i\chi_k - \left(1 - \frac{j}{n}\right) \coth (n-j)\chi_k \right\}
 \end{aligned}$$

adja ( $i > j$  esetén a szimmetria folytán  $i$  és  $j$  szerepet cserélnek); a  $\chi_k$  értékeket pedig (2.11) alapján számítjuk.

Az  $a$ ) feladat közelítő megoldását, vagyis a mind a négy oldalán alátámasztott lemez tetszőleges transzverzális terhelés hatására elfoglalt egyensúlyi helyzetének közelítő meghatározására szolgáló (2.2) differenciaegyenlet megoldását megkapjuk, ha (2.5)-be a (2.12) kifejezést behelyettesítjük.

Ha  $n \rightarrow \infty$ ,  $m \rightarrow \infty$  és  $n/m \rightarrow b/a$ , valamint egyidejűleg  $pa/m \rightarrow x$ ,  $qa/m \rightarrow \xi$  és  $ib/n \rightarrow y$ ,  $jb/n \rightarrow \eta$ , a reciprokmatrixok sorozatának  $g_{pq}^{(ij)}(m, n)$  eleme a négy oldalán alátámasztott téglalapalakú lemez Green-függvényéhez konvergál:<sup>16)</sup>

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, \frac{n}{m} \rightarrow \frac{b}{a} \\ m \rightarrow \infty, \frac{m}{n} \rightarrow \frac{a}{b} \\ \frac{pa}{m} \rightarrow x, \frac{ib}{n} \rightarrow y \\ \frac{qa}{m} \rightarrow \xi, \frac{jb}{n} \rightarrow \eta}} g_{pq}^{(ij)}(m, n) = G^{(a)}(x, y, \xi, \eta) = \\
 (2.13) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \frac{ab}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{a} \xi}{k^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{a} y \operatorname{sh} \frac{k\pi}{a} (b-\eta)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{a} b} \times \\ & \times \left\{ \frac{a}{k\pi b} + \coth \frac{k\pi}{a} b - \frac{y}{b} \coth \frac{k\pi}{a} y - \left(1 - \frac{\eta}{b}\right) \coth \frac{k\pi}{a} (b-\eta) \right\}, \\ & \text{ha } y \leq \eta \\ & \frac{ab}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{a} \xi}{k^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{a} \eta \operatorname{sh} \frac{k\pi}{a} (b-y)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{a} b} \times \\ & \times \left\{ \frac{a}{k\pi b} + \coth \frac{k\pi}{a} b - \frac{\eta}{b} \coth \frac{k\pi}{a} \eta - \left(1 - \frac{y}{b}\right) \coth \frac{k\pi}{a} (b-y) \right\}, \\ & \text{ha } y \geq \eta. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

<sup>16)</sup> A határátmenet elvégzésénél FREY TAMÁS nyújtott segítséget. A módszert illetően lásd: [7], 138. oldal, 11. feladat.







negyedrendű állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciaegyenlet

$$r(0, y) = r(1, y) = r(n+1, y) = r(n+2, y) = 0$$

feltételeket kielégítő megoldásának megkeresésével.<sup>19)</sup>

Vezessük be az  $a + 2 = 2 \operatorname{ch} \chi$  transzformációt. Ekkor, mint ismeretes,<sup>20)</sup> az

$$(2.18) \quad \begin{aligned} & r(x+4) - 4 \operatorname{ch} \chi \cdot r(x+3) + (4 \operatorname{ch}^2 \chi + 2) r(x+2) \\ & - 4 \operatorname{ch} \chi \cdot r(x+1) + r(x) = Q(x) \end{aligned}$$

egyenlethez tartozó homogén lineáris differenciaegyenlet lineárisan független partikuláris megoldásait a

$$(\lambda^3 - 2 \operatorname{ch} \chi \cdot \lambda + 1)^2 = 0$$

karakterisztikus egyenlet segítségével

$$(2.19) \quad r_1(x) = e^{xx}, \quad r_2(x) = e^{-xx}, \quad r_3(x) = x e^{xx}, \quad r_4(x) = x e^{-xx}$$

alakban nyerjük. Szükségünk lesz a

$$D(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} r_1(x_1) & r_1(x_2) & r_1(x_3) & r_1(x_4) \\ r_2(x_1) & r_2(x_2) & r_2(x_3) & r_2(x_4) \\ r_3(x_1) & r_3(x_2) & r_3(x_3) & r_3(x_4) \\ r_4(x_1) & r_4(x_2) & r_4(x_3) & r_4(x_4) \end{bmatrix}$$

matrix  $D(x_1, x_2, x_3, x_4)$  determinánsának az értékére. A (2.19) függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} D(x_1, x_2, x_3, x_4) = & (x_1 - x_4)(x_3 - x_2) \operatorname{ch}((x_1 + x_4 - x_2 - x_3)\chi) + \\ & + (x_2 - x_4)(x_1 - x_3) \operatorname{ch}((x_2 + x_4 - x_1 - x_3)\chi) + \\ & + (x_3 - x_4)(x_2 - x_1) \operatorname{ch}((x_3 + x_4 - x_2 - x_1)\chi). \end{aligned}$$

A (2.18) egyenletnek a szokásos

$$\varrho(0) = \varrho(1) = \varrho(2) = \varrho(3) = 0$$

<sup>19)</sup> E feladat tulajdonképpen a 601. oldal<sup>8)</sup> lábjegyzetében említett VAHLEN-féle probléma általánosításának egy speciális esete. Az általánosított problémára vonatkozóan lásd a szerző „Lineáris differenciál- és differenciaegyenletek általános kezdeti feltételeket kielégítő explicit megoldásáról” című dolgozatát a *Közlemények* következő [2 (1957)] kötetében.

<sup>20)</sup> Lásd pl.: [9], 320. oldal.



kezdeti feltételeket kielégítő megoldását<sup>21)</sup>

$$(2.21) \quad \varrho(x) = \sum_{t=0}^{x-1} \frac{D(t+1, t+2, t+3, x)}{D(t+1, t+2, t+3, t+4)} Q(t)$$

alakban kapjuk. Vezessük be a (2.18) egyenletnek azon  $g_i(x) = g_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$  lineárisan független partikuláris megoldásait, melyek kielégítik a

$$g_i(x_k) = \delta_{ik} \quad i, k = 1, 2, 3, 4$$

összefüggéseket. Ekkor a (2.19) alatti  $r_i(x)$  függvények a következőképpen fejezhetők ki a  $g_i(x)$  függvények segítségével:

$$r_i(x) = \sum_{k=1}^4 r_i(x_k) g_k(x) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Bevezetve az

$$\mathbf{r}(x) = \begin{bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ r_3(x) \\ r_4(x) \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{g}(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \\ g_4(x) \end{bmatrix}$$

vektorokat, ez még így is írható:

$$(2.22) \quad \mathbf{D}(x_1, x_2, x_3, x_4) \mathbf{g}(x) = \mathbf{r}(x)$$

A (2.21) kifejezésben szereplő  $D(t+1, t+2, t+3, x)$  determináns az  $r_i(x)$  függvények lineáris kombinációja, azaz maga is megoldása a (2.18) differenciaegyenletnek, tehát az  $x_v$  ( $v = 1, 2, 3, 4$ ) helyeken felvett értékeivel és a fenti  $g_i(x)$  függvényekkel a következő alakban állítható elő:

$$D(t+1, t+2, t+3, x) \equiv \sum_{v=1}^4 g_v(x) D(t+1, t+2, t+3, x_v)$$

Ha ezt behelyettesítjük a (2.18) egyenlet (2.21) megoldásába, és levonjuk belőle a homogén egyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely az  $x_v$  ( $v = 1, 2, 3, 4$ ) helyeken éppen a  $\varrho(x_v)$  értékeket veszi fel, akkor a (2.18) egyenletnek az

$$r(x_v) = 0 \quad v = 1, 2, 3, 4$$

<sup>21)</sup> Lásd pl.: [9], 313. oldal.



feltételeket kielégítő megoldását

$$(2.23) \quad r(x) = \sum_{v=1}^4 g_v(x) \sum_{t=x_v}^{x-1} \frac{D(t+1, t+2, t+3, x_v)}{D(t+1, t+2, t+3, t+4)} Q(t)$$

alakban kapjuk. A  $g_v(x)$  alapfüggvényekre a (2.22) definiáló egyenletből

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{D(x, 1, n+1, n+2)}{D(0, 1, n+1, n+2)}; & g_2(x) &= \frac{D(0, x, n+1, n+2)}{D(0, 1, n+1, n+2)}; \\ g_3(x) &= \frac{D(0, 1, x, n+2)}{D(0, 1, n+1, n+2)}; & g_4(x) &= \frac{D(0, 1, n+1, x)}{D(0, 1, n+1, n+2)} \end{aligned}$$

adódik. Ezeket behelyettesítve a (2.23) formulába, a (2.17) egyenletnek az adott feltételeket kielégítő megoldására ( $y \leq x$  esetén)

$$r(x, y) =$$

$$= \frac{D(x, 1, n+1, n+2) D(y-1, y, y+1, 0) + D(0, x, n+1, n+2) D(y-1, y, y+1, 1)}{D(0, 1, n+1, n+2) D(y-1, y, y+1, y+2)}$$

adódik. Az itt szereplő determinánsok értéke a (2.20) kifejezésből meghatározva, és tekintetbe véve azt, hogy a keresett reciprokmatrix elemeinek az indexét az itt szereplő változókkal az  $x = i+1, y = j+1$  összefüggések kapcsolják össze, az  $r_{ij}$  elemekre  $i \geq j$  esetén a következő kifejezést nyerjük:

$$\begin{aligned} (2.24) \quad r_{ij} &= \frac{1}{2 \{ (n+1)^2 \operatorname{sh}^2 \chi - \operatorname{sh}^2 (n+1) \chi \}} \times \\ &\times \left\{ \left( (n+1)(n-i) \frac{\operatorname{sh} i \chi}{\operatorname{sh} \chi} - i \frac{\operatorname{sh} (n-i) \chi}{\operatorname{sh} \chi} \frac{\operatorname{sh} (n+1) \chi}{\operatorname{sh} \chi} \right) \times \right. \\ &\times \left( (j+2) \operatorname{ch} (j+1) \chi - \frac{\operatorname{sh} (j+2) \chi}{\operatorname{sh} \chi} \right) - \\ &- \left( (n+1)(n+1-i) \frac{\operatorname{sh} (i+1) \chi}{\operatorname{sh} \chi} - (i+1) \frac{\operatorname{sh} (n+1-i) \chi}{\operatorname{sh} \chi} \frac{\operatorname{sh} (n+1) \chi}{\operatorname{sh} \chi} \right) \times \\ &\times \left. \left( (j+1) \operatorname{ch} j \chi - \frac{\operatorname{sh} (j+1) \chi}{\operatorname{sh} \chi} \right) \right\} \end{aligned}$$

( $i < j$  esetén, a szimmetria miatt  $i$  és  $j$  szerepet cserélnek.) Ha az  $a$ ) feladatnál követett eljárást ismét alkalmazzuk, akkor — felhasználva a (2.9) össze-



függéssel definiált  $\mathbf{X}$  matrix (2.10) alakú kanonikus felbontását — a  $\mathbf{G}^{(b)} = \hbar^2(\mathbf{M}^{(b)})^{-1}$  reciprok hipermatrix elemeire

$$\begin{aligned}
 g_{p,q}^{(b)}(m,n) &= \frac{ab}{m^2} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sin \frac{pk\pi}{m} \sin \frac{qk\pi}{m}}{\operatorname{sh}^2 \chi_k - \frac{\operatorname{sh}^2(n+1)\chi_k}{(n+1)^2}} \times \\
 &\times \left\{ \left( \left( 1 - \frac{i}{n} \right) \frac{\operatorname{sh} i \chi_k}{\operatorname{sh} \chi_k} - \frac{i}{n} \frac{\operatorname{sh}(n-i)\chi_k}{\operatorname{sh} \chi_k} \frac{\operatorname{sh}(n+1)\chi_k}{(n+1)\operatorname{sh} \chi_k} \right) \times \right. \\
 (2.25) \quad &\times \left( \frac{j+2}{n+1} \operatorname{ch}(j+1)\chi_k - \frac{\operatorname{sh}(j+2)\chi_k}{(n+1)\operatorname{sh} \chi_k} \right) - \\
 &- \left( \left( 1 - \frac{i}{n+1} \right) \frac{\operatorname{sh}(i+1)\chi_k}{\operatorname{sh} \chi_k} - \frac{i+1}{n+1} \frac{\operatorname{sh}(n+1-i)\chi_k}{\operatorname{sh} \chi_k} \frac{\operatorname{sh}(n+1)\chi_k}{(n+1)\operatorname{sh} \chi_k} \right) \times \\
 &\times \left. \left( \frac{j+1}{n} \operatorname{ch} j \chi_k - \frac{\operatorname{sh}(j+1)\chi_k}{n \operatorname{sh} \chi_k} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

adódik, ahol a  $\chi_k$  értékek a (2.11) összefüggésből számíthatók.

c) A négy oldalán befogott lemez esetén fellépő  $\mathbf{M}^{(c)}$  hipermatrix — az eddigiekkel ellentétben — nem felcserélhető blokkokból áll. Ha azonban a főátlóban álló blokkok fődiagonalizálásának sarokelemeit 1-gyel megváltoztatjuk, akkor éppen az  $\mathbf{M}^{(b)}$  hipermatrixot kapjuk, amelynek a reciprokát már ismerjük. Az invertálandó  $\mathbf{M}^{(c)}$  hipermatrix tehát:

$$\mathbf{M}^{(c)} = \mathbf{M}^{(b)} + \mathbf{Y}_{m-1} \cdot \mathbf{E}_{n-1}$$

alakban írható fel [lásd: (2.16)], amely az  $\mathbf{M}^{(b)}$  hipermatrixtól csak fődiagonális blokkokban különbözik. Ezért első pillanatban arra gondolhatunk, hogy J. SHERMAN és W. J. MORRISON módosított matrixok reciprokának meghatározására szolgáló tételének [15] a szerzőtől származó általánosítása<sup>22)</sup>

<sup>22)</sup> Lásd: [13], 55–56. oldal. Az idézett tétel a következőképpen hangzik: Legyen  $\mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1}$  az adott  $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}]$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) kvadrátikus nem-szinguláris hipermatrix ismert reciproka (itt  $\mathbf{A}_{ij}$   $p_i \times q_j$ -edrendű blokkokat jelent),  $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_{ij}]$  a módosított és az eredeti hipermatrix különbsége, melynek csak  $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ -edik blokkosora és  $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ -edik blokkoszlopa tartalmaz 0-tól különböző blokkokat, és jelöljük ezen blokkosorokhoz és blokkoszlopokhoz tartozó minor-matrixot  $\mathbf{K}_{\beta_1, \dots, \beta_\nu}^{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu} = \mathbf{K}'$ -vel. Ekkor — feltéve, hogy  $|\mathbf{E}_p + \mathbf{K}' \mathbf{R}_{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu}^{\beta_1, \dots, \beta_\nu}| \neq 0$ , ahol

$$P = \sum_{i=1}^{\mu} p_{\alpha_i}$$



felhasználható  $\mathbf{M}^{(c)}$  invertálására. Tekintettel azonban arra, hogy az  $[\mathbf{F}_{ij}]$  hipermatrix fődiagonálisának valamennyi blokkját módosítottuk, az idézett tétel közvetlen alkalmazásával lényegében nem tudjuk egyszerűsíteni az eredeti feladatot: ismét  $n$ -edrendű hipermatrix reciprokát kellene meghatározni. Ha azonban figyelembe vesszük, hogy az egyes blokkokon belül mindössze két elemet, mégpedig „ugyanolyan helyzetű” két elemet változtattunk meg, akkor nem indokolatlanul gondolunk valamilyen egyszerűsítés lehetőségére. Ezt el is érjük, ha bevezetjük az

$$\mathbf{e}_i \mathbf{f}_j^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} [0 \dots \overset{j}{1} \dots 0] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \overset{j}{1} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 \end{bmatrix} \quad (i)$$

illetve  $|\mathbf{E}\mathbf{Q} + \mathbf{R}_{a_1 \dots a_\mu}^{\beta_1 \dots \beta_\nu} \mathbf{K}'| \neq 0$ , ahol

$$Q = \sum_{j=1}^{\nu} q_{\beta_j},$$

— érvényes az

$$(\mathbf{A} + \mathbf{K})^{-1} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_{a_1 \dots a_\mu}^{1 \dots m} (\mathbf{E}_P + \mathbf{K}' \mathbf{R}_{a_1 \dots a_\mu}^{\beta_1 \dots \beta_\nu})^{-1} \mathbf{K}' \mathbf{R}_{1 \dots n}^{\beta_1 \dots \beta_\nu}$$

illetve

$$(\mathbf{A} + \mathbf{K})^{-1} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_{a_1 \dots a_\mu}^{1 \dots m} \mathbf{K}' (\mathbf{E}\mathbf{Q} + \mathbf{R}_{a_1 \dots a_\mu}^{\beta_1 \dots \beta_\nu} \mathbf{K}')^{-1} \mathbf{R}_{1 \dots n}^{\beta_1 \dots \beta_\nu}$$

összefüggés.

Gyakran célszerű kifejezni a módosított és az eredeti matrix reciprokának a hányadosát. Erre vonatkozik a fenti tétel következő korolláriuma: *Legyen  $\mathbf{L} = [\mathbf{L}_{ij}]$  a módosított és az eredeti hipermatrix különbsége, melynek csak  $s \leq \min(m, n)$  olyan  $\mathbf{L}_{a_i \beta_i}$  blokkja nem azonosan 0, melyek mindegyike más-más blokksorban és blokkoszlopban áll. Ekkor a módosított matrix reciprokára érvényes az  $(\mathbf{A} + \mathbf{L})^{-1} = \mathbf{R}\mathbf{Z}_0$  összefüggés, ahol ( $m \leq n$  esetén) a  $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{E} - \mathbf{U}$  hipermatrix „lényeges” blokkjait álló  $\mathbf{U}_{aj}$  ( $i = 1, \dots, s$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) blokkokat az*

$$\mathbf{U}_{1 \dots n}^{a_1 \dots a_s} = \{\mathbf{E}_S + \langle \mathbf{L}_{a_i \beta_i} \rangle \mathbf{R}_{a_1 \dots a_s}^{\beta_1 \dots \beta_s}\}^{-1} \langle \mathbf{L}_{a_i \beta_i} \rangle \mathbf{R}_{1 \dots n}^{\beta_1 \dots \beta_s}$$

hipermatrix blokkjai szolgáltatják, ahol  $\mathbf{L}_{a_i \beta_i}$   $p_i \times q_i$ -edrendű blokk és

$$S = \sum_{i=1}^s p_{a_i}.$$

Ha valamennyi  $\mathbf{L}_{a_i \beta_i}$  blokk nem-szinguláris kvadratikusan, akkor  $\mathbf{U}_{1 \dots n}^{a_1 \dots a_s}$  fenti kifejezése következőképpen egyszerűsödik:

$$(2.26) \quad \mathbf{U}_{1 \dots n}^{a_1 \dots a_s} = \{\langle \mathbf{L}_{a_i \beta_i}^{-1} \rangle + \mathbf{R}_{a_1 \dots a_s}^{\beta_1 \dots \beta_s}\}^{-1} \mathbf{R}_{1 \dots n}^{\beta_1 \dots \beta_s}$$

(Az itt felhasznált úgynevezett  $\mathbf{Z}_0$ -típusú matrixokon olyan kvadratikusan matrixokat értünk, melyeknek  $k < n$  sorában csak a fődiagonális elem — melyek értéke 1 — különbözik 0-tól. A többi  $n - k$  sort nevezzük a  $\mathbf{Z}_0$  matrix „lényeges” sorainak.)



egységdiádok segítségével definiált ortogonális

$$(2.27) \quad \mathbf{P} = [\mathbf{e}_i \mathbf{f}_j^*] \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

permutáló hipermatrixot,<sup>23)</sup> amelynek az a tulajdonsága, hogy a vele végzett hasonlósági transzformáció bármely,  $m$ -edrendű blokkokból álló,  $n$ -edrendű hipermatrix elemeit úgy rendezi át, hogy belőle — egyszerű indexpárcserével —  $n$ -edrendű blokkokból álló  $m$ -edrendű hipermatrix keletkezzék, a direkt szorzat tényezőinek sorrendjét tehát egyszerűen felcseréli. Tehát  $\mathbf{P}[\mathbf{f}_{pq}^{(ij)}]\mathbf{P}^* = [\mathbf{f}_{ij}^{(pq)}]$ , vagy  $\mathbf{P}[\mathbf{F}_{ij}]\mathbf{P}^* = [\mathbf{F}^{(pq)}]$  és  $\mathbf{P}(\mathbf{Y}_{m-1} \times \mathbf{E}_{n-1})\mathbf{P}^* = \mathbf{E}_{n-1} \times \mathbf{Y}_{m-1} = \langle \mathbf{E}_{n-1}, 0, \dots, 0, \mathbf{E}_{n-1} \rangle$ . Alakítsuk most kissé át a (2.3) egyenletet. Ha a  $\mathbf{w} = [\mathbf{w}_i]$  és  $\mathbf{t} = [\mathbf{t}_i]$  ( $i = 1, \dots, n-1$ )  $(n-1)$ -edrendű hipervektorokat a (2.18) permutáló matrixszal szorozzuk, a  $\mathbf{P}[\mathbf{w}_i] = [\mathbf{w}^{(p)}]$ , illetve  $\mathbf{P}[\mathbf{t}_i] = [\mathbf{t}^{(p)}]$  hipervektorokhoz jutunk. Tehát a (2.27) permutáló matrixszal balról megszorozva a (2.3) egyenletet, azt a következő alakban írhatjuk:

$$([\mathbf{F}^{(pq)}] + \mathbf{E}_{n-1} \times \mathbf{Y}_{m-1})[\mathbf{w}^{(p)}] = \frac{h^2}{N} [\mathbf{t}^{(p)}].$$

Az invertálandó  $\mathbf{F}^{(pq)} + \mathbf{E}_{n-1} \times \mathbf{Y}_{m-1}$  most már olyan hipermatrix, amelyre az idézett tétel korolláriuma alkalmazható, tehát [a (2.16) összefüggés felhasználásával]

$$([\mathbf{F}^{(pq)}] + \mathbf{E}_{n-1} \times \mathbf{Y}_{m-1})^{-1} = [\mathbf{R}^{(pq)}](\mathbf{E}_{(m-1)(n-1)} - [\mathbf{U}^{(pq)}])$$

adódik, ahol  $[\mathbf{R}^{(pq)}] = [\mathbf{F}^{(pq)}]^{-1}$  az  $\mathbf{U}^{(pq)}$  ( $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = m-1$ ,  $q = 1, \dots, m-1$ ) blokkokat pedig [(2.26) alapján] az

$$(2.28) \quad \mathbf{U}_{1, \dots, m-1}^{1, m-1} = \{\mathbf{E}_{2(n-1)} + [\mathbf{R}^{(pq)}]_{1, m-1}^{1, m-1}\}^{-1} [\mathbf{R}^{(pq)}]_{1, \dots, m-1}^{1, m-1}$$

hipermatrix blokkjai adják, és  $[\mathbf{U}^{(pq)}] = 0$ , ha  $p = 2, 3, \dots, m-2$ . A (2.28)-ban szereplő invertálandó matrix négy  $(n-1)$ -edrendű kvadratikus blokkból áll. Ha alkalmazzuk a négy blokkra particionált matrixok reciprokának explicit előállítására szolgáló formulákat,<sup>24)</sup> akkor a (2.28) összefüggésből  $\mathbf{U}$  első és utolsó sorának blokkjaira a következő kifejezéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(1,q)} &= [\mathbf{u}_{ij}^{(1,q)}] = \\ &= \{\mathbf{E}_{n-1} + [r_{ij}^{(1,1)}] + [r_{ij}^{(1, m-1)}](\mathbf{E}_{n-1} + [r_{ij}^{(m-1, m-1)}])^{-1} [r_{ij}^{(m-1, 1)}]\}^{-1} \times \\ &\times \{[r_{ij}^{(1,q)}] - [r_{ij}^{(1, m-1)}](\mathbf{E}_{n-1} + [r_{ij}^{(m-1, m-1)}])^{-1} [r_{ij}^{(m-1, q)}]\}, \\ \mathbf{U}^{(m-1,q)} &= [\mathbf{u}_{ij}^{(m-1,q)}] = \{\mathbf{E}_{n-1} + [r_{ij}^{(m-1, m-1)}] - \\ &- [r_{ij}^{(m-1, 1)}](\mathbf{E}_{n-1} + [r_{ij}^{(1, 1)}])^{-1} [r_{ij}^{(1, m-1)}]\}^{-1} \times \\ &\times \{[r_{ij}^{(m-1,q)}] - [r_{ij}^{(m-1, 1)}](\mathbf{E}_{n-1} + [r_{ij}^{(1, 1)}])^{-1} [r_{ij}^{(1, q)}]\}. \end{aligned}$$

<sup>23)</sup> Lásd pl.: [5], 216. oldal.

<sup>24)</sup> Lásd pl.: [1], 139. oldal és [3], 30. oldal.



Ezzel tehát a (2.3) egyenlet megoldása

$$[w^{(p)}] = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} g_{ij}^{(pq)}(m, n) \\ \vdots \\ g_{ij}^{(pq)}(m, n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{(1)} - \sum_{v=1}^{m-1} U^{(1,v)} t^{(v)} \\ t^{(2)} \\ \vdots \\ t^{(m-2)} \\ t^{(m-1)} - \sum_{v=1}^{m-1} U^{(m-1,v)} t^{(v)} \end{bmatrix}$$

alakban adódik, ahol  $g_{ij}^{(pq)}(m, n)$  explicit kifejezését (2.25) szolgáltatja. Innen kiolvasható, hogy ezúttal a (2.3) egyenlet megoldásának a feladatát — a jobb oldalon álló hipervektor némi módosításával — a  $b$ ) feladatra vezettük vissza.

A közölt feladatokból jól látható, hogy a felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokkal szemben a nem-felcserélhető blokkokból álló hipermatrixok alkalmazása lényegesen nagyobb nehézségeket rejt magában.

(Beérkezett : 1956. VII. 31.)

#### IRODALOM

- [1] A. C. AITKEN : *Determinants and matrices*. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1949.
- [2] BARTA J. : *A rugalmas lemez hajlítása*. (Magántanári előadás.) Kézirat, Budapest, 1939.
- [3] Б. В. БУЛГАКОВ : *Колебания*. Гостехиздат, Москва, 1954.
- [4] EGERVÁRY J. : „Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **3** (1953) 417–458.
- [5] E. EGERVÁRY : „On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **15** (1954) 211–222.
- [6] PH. FRANK—R. v. MISES : *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*. Vieweg, Braunschweig, 1930.
- [7] FREY T. : *Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1956.
- [8] H. GEIGER—K. SCHEEL : *Handbuch der Physik, Band VI. Mechanik der elastischen Körper*. Springer, Berlin, 1928.
- [9] A. O. GELFOND : *Differenciászámítás*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
- [10] D. HILBERT : *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*. Teubner, Leipzig, 1912.
- [11] H. MARCUS : *Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten*. Springer, Berlin, 1924.
- [12] Д. Ю. ПАНОВ : *Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных*. Гостехиздат, Москва, 1951.
- [13] RÓZSA P. : *A matrixelmélet néhány új tételéről és azok alkalmazásairól differenciális differenciálegyenletek megoldására*. (Kandidátusi disszertáció.) Budapest, 1956.
- [14] D. E. RUTHERFORD : „Some continuant determinants arising in physics and chemistry, II.” *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **63** (1952) 232–241.
- [15] J. SHERMAN—W. J. MORRISON : „Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix.” *Annals of Mathematical Statistics* **21** (1950) 124–127.



- [16] S. TIMOSHENKO : *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, New York, 1940.  
 [17] K. TH. VAHLEN : „Über den Heaviside-Kalkül.“ *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 13 (1933) 183–198.

## ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В СТАТИКЕ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИНОК

P. RÓZSA

### Резюме

Работа занимается определением положения равновесия одномерных и двумерных упругих континуумов (стержней и прямоугольных пластинок), под действием любой поперечной нагрузки. Проблема, — как известно, — приводит в случае стержня к обыкновенному дифференциальному уравнению  $y^{(4)} = p(x)/EI$  а в случае пластинок к неоднородному бигармоническому дифференциальному уравнению  $\Delta \Delta w = t(x, y)/N$ . Для их приближенного вычисления применяется так называемый метод сеток, сущность которого состоит в том, что дифференциальное уравнение приближается уравнением в конечных разностях. Его решение приводит к такой линейной алгебраической системе уравнений, матрицы коэффициентов которой автоматически удовлетворяют граничным условиям, а обратная ей матрица приближенно дает функцию Грина проблемы. В § 1. задача решается для случая подпертого на обоих концах стержня, для случая закрепленного на обоих концах стержня, а также для случая консоля, и предельным переходом определяется функция Грина. Метод одновременно дает указание к решению задач, относящихся к более сложным двумерным проблемам. Ими занимается § 2. В случае подпертых на четырех сторонах, а также в случае подпертых и соответственно закрепленных в противоположных сторонах пластинок матрицы коэффициентов, относящиеся к уравнению в конечных разностях, записанного с помощью метода сеток, состоят из блоков, которые можно попарно обменивать. Любой элемент обратной им матрицы может быть записан в явном виде и предельный переход, — с помощью которого получается функция Грина задачи, — также может быть проведен. В случае закрепленной на четырех сторонах пластинки матрица состоит из необмениваемых блоков. Для вычисления обратной ей матрицы применяется одна теорема, служащая для определения матрицы, обратной измененной матрице. В исследуемых случаях проявляется существенная разница, которая имеет место при применении гиперматриц, состоящих из обмениваемых и необмениваемых блоков.

## DIE ANWENDUNG DES MATRIZENKALKÜLS AUF DIE STATIK VON BALKEN UND PLATTEN

P. RÓZSA

### Zusammenfassung

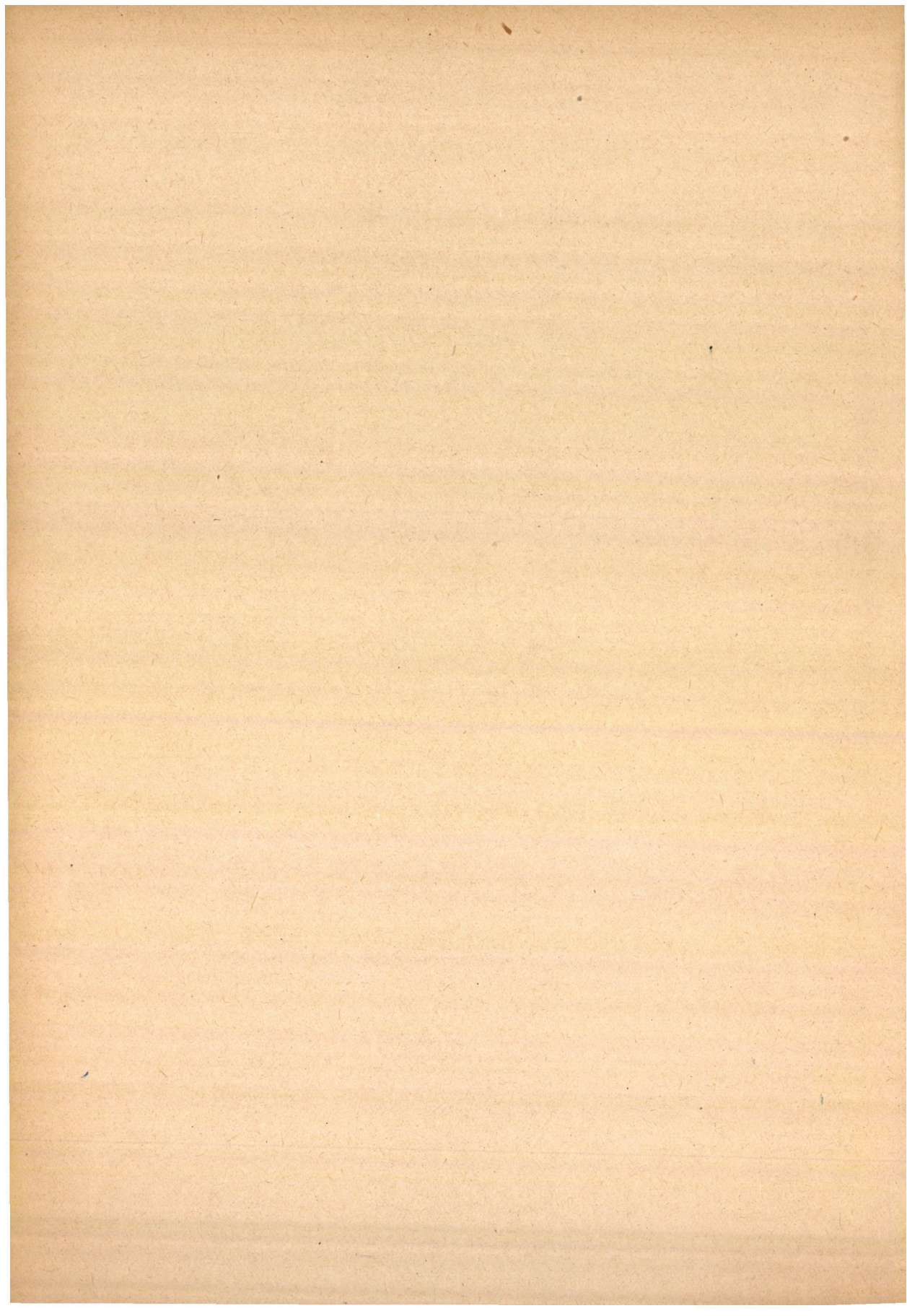
Die Arbeit befasst sich mit der Bestimmung der Gleichgewichtslage von ein- und zweidimensionalen elastischen Kontinuen (Balken und rechteckigen Platten) bei beliebiger transversaler Belastung. Dieses Problem führt — wie bekannt — im Falle von Balken zur gewöhnlichen Differentialgleichung  $y^{(4)} = p(x)/EI$ , im Falle von Platten zur inhomogenen, biharmonischen Differentialgleichung  $\Delta \Delta w = t(x, y)/N$ . Wir wenden zur Näherungslösung dieser Gleichungen das sogenannte Differenzenverfahren an, bei dem die Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung approximiert wird. Die Lösung führt auf solche lineare, algebraische Gleichungssysteme, deren Koeffizientenmatrizen automatisch die Randbedingungen erfüllen und deren Reziprokenmatrizen annähernd die Greensche Funktion des Problems liefern.

In § 1. lösen wir das Problem im Falle des an beiden Enden gelagerten Balkens, des an beiden Enden gestützten Balkens, sowie des Konsols und bestimmen die Greenschen Funktionen durch Grenzübergang. Die Methode gibt gleichzeitig Anleitung zur Lösung komplizierterer zweidimensionaler Probleme. Mit diesen Problemen beschäf-



tigt sich § 2. Im Falle von allseitig gestützten, bzw. an je zwei gegenüberliegenden Seiten gelagerten und eingespannten Platten bestehen die mit Hilfe des Differenzenverfahrens erhaltenen Koeffizientenmatrizen aus vertauschbaren Blöcken. Ein beliebiges Element der Reziprokenmatrix kann explicit bestimmt und der Grenzübergang — wodurch wir zur Greenschen Funktion gelangen — durchgeführt werden. Im Falle der allseitig eingespannten Platte besteht die Koeffizientenmatrix aus nicht vertauschbaren Blöcken. Zur Berechnung der Reziprokenmatrix verwenden wir einen Satz über die Bestimmung des Reziproks modifizierter Matrizen. In den besprochenen Fällen zeigt sich der wesentliche Unterschied zwischen der Anwendung von Hypermatrizen, die aus vertauschbaren Blöcken, bzw. solchen, die aus nicht vertauschbaren Blöcken bestehen.







# A MÁTRIXELMÉLET ALKALMAZÁSA EGYES SZILÁRDSÁGTANI PROBLÉMÁKAT LEÍRÓ PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSÁNÁL

SZABÓ JÁNOS<sup>1)</sup>

Az alábbiakban szerző a rugalmasságtan és a szilárdságtan párosrendű lineáris parciális differenciálegyenleteinek közelítő megoldásával kíván foglalkozni. A közelítő megoldás alapját a függvénydifferenciák segítségével felírható differenciaegyenletrendszer megoldása képezi. Ez az eljárás az alkalmazott matematikában és a szilárdságtanban általánosan ismert, mint az [1], [2], [3], [4], [5] és [6], közkezen forgó irodalom is jelzi. EGERVÁRY JENŐ kezdeményezésére (lásd [7] és [8]) a jól ismert  $m$ -edrendű  $C_m$  kontinuáns mátrix segítségével a második függvénydifferenciák közvetlenül felírhatók, és  $C$  kanonikus alakjának felhasználásával egy párosrendű lineáris differenciaegyenlet rezolvens-mátrixa direkt kifejezhető. Jelen dolgozatban ismertetjük a parciális differenciahányadosok képzését a  $C$  kontinuáns mátrix segítségével, továbbá bemutatjuk parciális differenciaegyenletek megoldásának módját különböző kerületértékek mellett. Az alkalmazás lehetőségeit a dolgozatban tárgyalt példák illusztrálják.

A dolgozat olyan függvényekkel foglalkozik, melyek egy derékszögű-négyszög alaprajzú tartomány  $m \times n$  számú belső pontjában vannak értelmezve és a tartomány kerületén a függvényértékek előírhatók, illetőleg szilárdságtani összefüggések alapján meghatározhatók. A tartomány alaprajzát határoló  $l_x, l_y$  oldalú derékszögű-négyszög  $l_x$  hosszúságú oldalát  $x$ ,  $l_y$  hosszúságú oldalát  $y$  tengelyként választva, és  $l_x$  oldalt  $m + 1$ ,  $l_y$  oldalt  $n + 1$  részre osztva, az osztáspontokhoz mint az  $(x, y)$  sík pontjainak koordinátáihoz tartozó pontokban értelmezett  $F(x, y)$  függvényt a továbbiakban

$$(1) \quad F(aj, bk) = F_{jk}$$

$$\Delta x = a = \frac{l_x}{m+1} ; \quad \Delta y = b = \frac{l_y}{n+1}$$

módon jelölhetjük. Az  $m \times n$  számú belső ponthoz tartozó  $F_{jk}$  függvényértékeket az

$$(2) \quad [F_{jk}] = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{m1} & F_{m2} & \dots & F_{mn} \end{bmatrix}$$

<sup>1)</sup> Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem, Matematikai Tanszék.



téglalap-mátrixban foglalhatjuk össze. Könnyen belátható, hogy ha a kerületértékek nullával egyenlők, azaz

$$(3) \quad \begin{aligned} F_{j,0} = F_{j,n+1} = F_{0,k} = F_{m+1,k} = 0 \\ j=0, 1, \dots, m+1; \quad k=0, 1, \dots, n+1, \end{aligned}$$

akkor az  $F_{jk}$  második differenciahányadosai a  $\mathbf{C}$  kontinuáns mátrix felhasználásával így írhatók:

$$(4) (5) \quad \begin{bmatrix} \frac{\Delta^2 F_{jk}}{\Delta x^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2} \mathbf{C}_m \mathbf{F}; \quad \begin{bmatrix} \frac{\Delta^2 F_{jk}}{\Delta y^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{b^2} \mathbf{F} \mathbf{C}_n,$$

ahol  $\mathbf{C}_m$  egy  $m$ -edrendű kontinuáns mátrix,

$$(6) \quad \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{bmatrix},$$

és  $\mathbf{C}_n$  egy  $n$ -edrendű kontinuáns mátrix.

A  $\mathbf{C}_m$  mátrix sajátértékei:

$$(7) \quad \lambda_{mj} = -4 \sin^2 \frac{j\pi}{2(m+1)} \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

és sajátvektorai az  $\mathbf{u}_{mj}$ , illetve  $\mathbf{u}_{mj}^*$  vektorok (a \* transzponáltat jelent), ahol

$$(8) \quad \mathbf{u}_{mj}^* = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \left[ \sin \frac{j\pi}{m+1}, \sin \frac{2j\pi}{m+1}, \dots, \sin \frac{mj\pi}{m+1} \right],$$

Hasonlóképpen ismertek a  $\mathbf{C}_n$  sajátértékei ( $\lambda_{nk}$ ) és sajátvektorai ( $\mathbf{u}_{nk}$ ,  $\mathbf{u}_{nk}^*$ ) is.<sup>2)</sup> A  $\mathbf{C}$  mátrix sajátvektoraiból képzett  $\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^*$  projektorokat  $\mathbf{U}_j$ -vel szokás jelölni, tehát:

$$(9) \quad \mathbf{C}_m = \sum_{j=1}^m \lambda_{mj} \mathbf{U}_{mj}; \quad \mathbf{C}_n = \sum_{k=1}^n \lambda_{nk} \mathbf{U}_{nk}$$

$$(10) \quad \mathbf{U}_{mh} \cdot \mathbf{U}_{mj} = \delta_{hj} \mathbf{U}_{mj}, \quad \delta_{hj} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h=j \\ 0, & \text{ha } h \neq j \end{cases},$$

ahol

$$(11) \quad \mathbf{U}_{mj} = \mathbf{u}_{mj} \mathbf{u}_{mj}^*, \quad \mathbf{U}_{nk} = \mathbf{u}_{nk} \mathbf{u}_{nk}^*.$$

<sup>2)</sup> Lásd pl. [7], 456–457. oldalak.



Egy valós elemekből álló tetszőszerinti  $\mathbf{P}$  téglalapmátrix — melynek  $m$  sora és  $n$  oszlopa van — előállítható

$$(12) \quad \mathbf{P} = \mathbf{V}_m \mathbf{D}_P \mathbf{V}_n^*$$

alakban, ahol a  $\mathbf{D}_P$  együtthatómátrix elemeit a

$$(13) \quad \mathbf{D}_P = \mathbf{V}_m^* \mathbf{P} \mathbf{V}_n$$

összefüggés szolgáltatja. A (12) és (13) képletekben szereplő  $\mathbf{V}_m$ , illetve  $\mathbf{V}_n$  mátrixok a  $\mathbf{C}_m$ , illetve  $\mathbf{C}_n$  kontinuáns mátrixok oszlopvektoraiból alkotott sor-mátrixokat jelentik:

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathbf{V}_m &= [\mathbf{u}_{m1}, \mathbf{u}_{m2}, \dots, \mathbf{u}_{mm}] \\ \mathbf{V}_n &= [\mathbf{u}_{n1}, \mathbf{u}_{n2}, \dots, \mathbf{u}_{nn}] \end{aligned}$$

Ugyanis, mint könnyen belátható,

$$(15) \quad \mathbf{V}_m \mathbf{V}_m^* = [\mathbf{u}_{m1}, \mathbf{u}_{m2}, \dots, \mathbf{u}_{mm}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{m1}^* \\ \mathbf{u}_{m2}^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{mm}^* \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^m \mathbf{u}_{mj} \mathbf{u}_{mj}^* = \mathbf{E}_m$$

$$(16) \quad \mathbf{V}_m^* \mathbf{V}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{m1}^* \\ \mathbf{u}_{m2}^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{mm}^* \end{bmatrix} [\mathbf{u}_{m1}, \mathbf{u}_{m2}, \dots, \mathbf{u}_{mm}] = \mathbf{E}_m,$$

és hasonlóképpen

$$(17) \quad \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^* = \mathbf{E}_n$$

$$(18) \quad \mathbf{V}_n^* \mathbf{V}_n = \mathbf{E}_n$$

ahol  $\mathbf{E}_m$ , illetve  $\mathbf{E}_n$  az  $m$ -edrendű, illetve  $n$ -edrendű egység mátrixokat jelöli.

A  $\mathbf{C}_m$ , illetve  $\mathbf{C}_n$  kontinuáns mátrixok sajátértékeiből alkotott diagonál-mátrixokat

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_m &= \langle \lambda_{m1}, \lambda_{m2}, \dots, \lambda_{mm} \rangle \\ \mathbf{\Lambda}_n &= \langle \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \dots, \lambda_{nn} \rangle \end{aligned}$$

módon jelölve írhatjuk:

$$(20) \quad \mathbf{C}_m = \mathbf{V}_m \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{V}_m^*$$

$$(21) \quad \mathbf{C}_n = \mathbf{V}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{V}_n^*.$$



Foglalkozunk ezek után a

$$(22) \quad \sum_{\alpha} \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} \mathbf{C}_m^{\alpha} \mathbf{F} \mathbf{C}_n^{\beta} = \mathbf{P}$$

elsőfokú mátrixegyenlet megoldásával (itt  $\mathbf{P}$  az adott,  $\mathbf{F}$  a keresett téglalap-mátrix).<sup>3)</sup>

A (20) és (21) kanonikus alakok felhasználásával írhatjuk:

$$(23) \quad \mathbf{V}_m \left( \sum_{\alpha} \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} \Lambda_m^{\alpha} \mathbf{V}_m^* \mathbf{F} \mathbf{V}_n \Lambda_n^{\beta} \right) \mathbf{V}_n^* = \mathbf{V}_m \mathbf{D}_F \mathbf{V}_n^*.$$

Ebből az egyenletből (12) és (13) figyelembevételével és

$$(24) \quad \mathbf{V}_m^* \mathbf{F} \mathbf{V}_n = \mathbf{D}_F$$

alapján nyilvánvaló, hogy

$$(25) \quad \sum_{\alpha} \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} \Lambda_m^{\alpha} \mathbf{D}_F \Lambda_n^{\beta} = \mathbf{D}_P$$

tehát a

$$(26) \quad \mathbf{D}_P = [d_{Pjk}] \quad \text{és} \quad \mathbf{D}_F = [d_{Fjk}]$$

mátrixok elemei között a

$$(27) \quad d_{Fjk} \left( \sum_{\alpha} \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} \lambda_{mj}^{\alpha} \lambda_{nk}^{\beta} \right) = d_{Pjk}$$

összefüggés áll fenn. Eszerint a  $\mathbf{D}_P$  együtthatómátrix elemeiből a  $\mathbf{D}_F$  mátrix elemei közvetlenül kiszámíthatók.

Egy  $0 \leq x \leq l_x$ ,  $0 \leq y \leq l_y$  derékszögű négyszög alaprajzú tartományon belül értelmezett  $F(x, y)$  függvény — melynek értéke és parciális deriváltjai

<sup>3)</sup> Megjegyzendő, hogy a (22) lineáris mátrixegyenlet megoldását jelentő  $\mathbf{F}$  mátrixot definiálhatjuk úgy, mint a

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} \frac{\partial^{2\alpha+2\beta} f(x, y)}{\partial x^{2\alpha} \partial y^{2\beta}} = q(x, y)$$

párosrendű parciális differenciálegyenletet és a derékszögű négyszög alaprajzú  $G$  tartomány  $\Gamma$  peremén előírt

$$\left\{ \sum_{\mu} \sum_{\nu} b_{\mu\nu} \frac{\partial^{2\mu+2\nu} f(x, y)}{\partial x^{2\mu} \partial y^{2\nu}} \right\} = g(x, y)$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, \alpha - 1; \quad \nu = 1, 2, \dots, \beta - 1)$$

kerületi feltételt kielégítő  $f(x, y)$  függvényt a  $G$  tartomány belső  $m \times n$  számú pontjában közelítőleg megadó

$$\mathbf{F} = [F_{jk}] \approx [f(j \triangle x, k \triangle y)]$$

mátrixot is. A (22) egyenlet jobboldalán álló mátrix ugyanis

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{R}$$

alakú, ahol  $\mathbf{Q} = [Q_{jk}] = [q(j \triangle x, k \triangle y)]$  és  $\mathbf{R}$  a peremfeltételeket magába foglaló mátrix.



nak értéke is a tartomány területén nullával egyenlő — párosrendű parciális differenciálhányadosainak értéke a tartomány  $n \times m$  számú belső pontjában —  $n$  és  $m$  megfelelő megválasztása mellett előírt pontossággal — megközelíthető

$$(28) \quad \frac{\Delta^{2\gamma} F_{jk}}{a^{2\alpha} b^{2\beta}} \quad (2\alpha + 2\beta = 2\gamma)$$

alakú differencia-hányadosokkal, ahol

$$(29) \quad a = \frac{l_x}{m+1}, \quad b = \frac{l_y}{n+1}$$

$$F_{jk} = F(ja, kb); \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Továbbá könnyen ellenőrizhető, hogy a (28) alatti differenciahányadosok értékeit — mint elemeket — tartalmazó mátrix a  $\mathbf{C}_m^a$ , illetve  $\mathbf{C}_n^b$  kontinuáns mátrix-függvényekkel balról, illetve jobbról való szorzással előállítható:

$$(30) \quad \left[ \frac{\Delta^{2\gamma} F_{jk}}{a^{2\alpha} b^{2\beta}} \right] = \frac{1}{a^{2\alpha} b^{2\beta}} \mathbf{C}_m^a \mathbf{F} \mathbf{C}_n^b, \quad \mathbf{F} = [F_{jk}].$$

Az elmondottak alapján most már látható, hogy egy párosrendű kétváltozós lineáris parciális differenciálegyenlet közelíthető megoldása homogén kerületi feltételek mellett direkt úton megadható.

Például a rugalmas lemezek alakváltozását leíró Lagrange-féle differenciálegyenlet

$$(31) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

(ahol  $q$  = a lemez síkjára merőleges megoszló teher intenzitása

$$D = \text{a lemez hajlítómerevsége: } D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

$h$  = a lemez vastagsága

$E$  = a lemez anyagának rugalmassági modulusa

$\mu$  = a harántnyúlási tényező

$w$  = a lemez középsíkjának az eredeti helyzetére merőleges elmozdulása)

közelítő megoldását (kerületén szabadon felfekvő lemez esetében) szolgáltató mátrixegyenlet

$$(32) \quad \frac{1}{a^4} \mathbf{C}_m^2 \mathbf{F} + \frac{2}{a^2 b^2} \mathbf{C}_m \mathbf{F} \mathbf{C}_n + \frac{1}{b^4} \mathbf{F} \mathbf{C}_n = \mathbf{P}$$

alakban írható fel, ahol  $\mathbf{F} = [w_{jk}]$ ,  $\mathbf{P} = [P_{jk}]/abD$  és  $P_{jk}$  a  $(j, k)$  csomópontban koncentráltan ható terhelés. A (32) egyenletből a  $\mathbf{D}_P = [d_{rjk}]$



együtthatómátrix<sup>4)</sup> ismeretében  $\mathbf{F}$  együtthatómátrixa,  $\mathbf{D_F}$ , közvetlenül kiszámítható:

$$(33) \quad \mathbf{D_F} = [d_{Fjk}] = \frac{a^3 b^3}{D} \left[ \frac{d_{Fjk}}{(b^2 \lambda_{mj} + a^2 \lambda_{nk})^2} \right]$$

A párosrendű parciális kétváltozós lineáris differenciálegyenletek fent ismertetett közelítő megoldása, ismert — nullától különböző — kerületi feltételek esetén is alkalmazható. Jelöljük az  $F(x, y)$  függvény — az  $(l_x, l_y)$  tartomány  $m \times n$  számú belső és  $2m + 2n + 4$  számú kerületi pontjában — megadott értékeit tartalmazó  $m + 2$  sorból és  $n + 2$  oszlopból álló mátrixot  $\mathbf{F}_0$ -al, akkor a korábbi jelölések alkalmazásával:

$$(34) \quad \mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} F_{00} & f_f^* & F_{0, n+1} \\ f_b & \mathbf{F} & f_j \\ F_{m+1, 0} & f_a^* & F_{m+1, n+1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (m+2 \text{ sor} \\ \text{és } n+2 \text{ oszlop}). \end{matrix}$$

Feltételezve, hogy a második differenciálhányadosok a peremen nullával egyenlők, az  $m \times n$  számú belső ponthoz tartozó második differenciálhányadosok értékeit tartalmazó mátrixok:

$$(35) \quad \begin{aligned} \left[ \frac{\Delta^2 F_{jk}}{\Delta x^2} \right] &= \left[ \frac{\Delta^2 F_{jk}}{a^2} \right] = \frac{1}{a^2} \mathbf{C}_m \mathbf{F} + \Phi_x \\ \left[ \frac{\Delta^2 F_{jk}}{\Delta y^2} \right] &= \left[ \frac{\Delta^2 F_{jk}}{b^2} \right] = \frac{1}{b^2} \mathbf{F} \mathbf{C}_n + \Phi_y \end{aligned}$$

ahol

$$(36) \quad \Phi_x = \begin{bmatrix} f_f^* \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_a^* \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ \vdots \\ (m) \end{matrix}$$

$$(37) \quad \Phi_y = [\underbrace{f_b}_1, 0, 0, \dots, \underbrace{f_j}_n]$$

<sup>4)</sup>  $\mathbf{P}$  együtthatómátrixa a  $(j, k)$  csomópontban álló egyetlen koncentrált erő ( $P_{jk} = 1$ ) esetén  $\mathbf{P} = e_j e_k^*$  alapján igen egyszerűen kiszámítható:

$$\mathbf{D_P} = \mathbf{V}_m^* e_j e_k^* \mathbf{V}_n$$

azaz  $\mathbf{D_P}$  a  $\mathbf{V}_m^*$   $j$ -edik oszlopából és a  $\mathbf{V}_n$   $k$ -edik sorából komponált diádokból áll. ( $e_j$ , illetve  $e_k$  a  $j$ -edik, illetve  $k$ -edik egységvektor.)



Hasonlóképpen lehet megfogalmazni a derivált függvények kerületérték előírásait is. Például a [9]-ben tárgyalt elliptikus paraboloid alakú héj erő-játékát hőteher hatására egy

$$(38) \quad \alpha \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^2 S_y}{\partial x^2} = 0$$

alakú másodrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenlet írja le. Kerületi feltételek:

$$(39) \quad \begin{aligned} S_y &= \frac{g}{2\beta}, \quad \text{ha } x = 0 \quad \text{és } x = l_x \\ S_y &= 0, \quad \text{ha } y = 0 \quad \text{és } y = l_y. \end{aligned}$$

A (38) egyenlet közelítő megoldása tehát az

$$(40) \quad \begin{aligned} \mathbf{F} &= [S_{yjk}] \\ f_a^* &= f_f^* = \frac{g}{2\beta} [1, 1, \dots, 1] \end{aligned}$$

rövidítések bevezetésével

$$(41) \quad \frac{\alpha}{b^2} \mathbf{F} \mathbf{C}_n + \frac{\beta}{a^2} \mathbf{C}_m \mathbf{F} = - \frac{\beta}{a^2} \boldsymbol{\Phi}_x = \mathbf{P}.$$

A (41) egyenlet megoldásának menete — összefoglalva a korábban elmondottakat:

- 1°. Ismerteknek tételezhetők fel a  $\mathbf{C}_m$ , illetve  $\mathbf{C}_n$  kontinuáns mátrixok sajátvektoraiból, illetve sajátértékeiből alkotható  $\mathbf{V}_m$ ,  $\mathbf{V}_m^*$ ,  $\mathbf{V}_n$ ,  $\mathbf{V}_n^*$  transzformáló mátrixok, illetve  $\boldsymbol{\Lambda}_m$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_n$  diagonálmátrixok;
- 2°. A  $\mathbf{P} = -\boldsymbol{\Phi}_x$  téglalap-mátrixhoz tartozó együtthatómátrix kiszámítható a

$$\mathbf{D}_P = \mathbf{V}_m^* \mathbf{P} \mathbf{V}_n$$

képlettel;

- 3°. Az ismeretlen  $\mathbf{F}$  mátrix  $\mathbf{D}_F$  együtthatómátrixának elemei kifejezhetők  $\mathbf{D}_P$  elemeinek függvényében, például a (41) egyenletből:

$$(42) \quad \begin{aligned} \mathbf{D}_F &= [d_{Fjk}] = \left[ \frac{a^2 b^2 d_{Pjk}}{b^2 \beta \lambda_{mj} + a^2 \alpha \lambda_{nk}} \right] \\ \mathbf{D}_P &= [d_{Pjk}] ; \end{aligned}$$

- 4°. A  $\mathbf{D}_F$  együtthatómátrix birtokában a transzformáló mátrixok segítségével  $\mathbf{F}$  kiszámítható:

$$(43) \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}_m \mathbf{D}_F \mathbf{V}_n^*.$$



Befejezésül megemlítjük, hogy az egyszersmindenkorra táblázatba foglalható különböző rendszámú  $V$  transzformáló mátrixok kiszámítása, egyes numerikus feladatok megoldása esetén, feleslegessé válik. A számítás — mivel valószínűleg előnyösen programozható — nagyteljesítményű elektronikus számológép segítségével rendkívül gyorsan elvégezhető.

## IRODALOM

- [1] K. BEYER: *Die Statik im Eisenbetonbau*. Springer, Berlin, 1934.
- [2] F. BLEICH—E. MELAN: *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik*. Springer, Berlin, 1927.
- [3] L. COLLATZ: *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*. Springer, Berlin, 1955.
- [4] F. SCHWANK: *Randwertprobleme*. Teubner, Leipzig, 1951.
- [5] L. V. KANTOROVICS—V. I. KRÜLOV: *A felsőbb analízis közelítő módszerei*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
- [6] PALOTÁS L.: *Mérnöki Kézikönyv (I. kötet)*. Műszaki Kiadó, Budapest, 1955.
- [7] EGERVÁRY JENŐ: „Mátrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 3 (1953) 417—458.
- [8] EGERVÁRY JENŐ: „A mátrix-elmélet alkalmazása lánchidak számítására.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 9—23.
- [9] MENYHÁRD I.: „Budapest Székesfővárosi Közlekedési Rt. kelenföldi autóbussz-kocsisínjének héj-szerkezetei.” *Technika* (1943) 80—90.

## ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ОПИСЫВАЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

J. SZABÓ

### Резюме

Работа рассматривает приближенное решение линейных дифференциальных уравнений четного порядка с двумя переменными с помощью системы уравнений в конечных разностях в случае, когда известны граничные значения. По инициативе J. EGERVÁRY конечные разности четного порядка можно образовывать с помощью хорошо известной континуантной матрицы  $C$ . Пусть функция  $F(x, y)$  определена в некотором прямоугольнике, прямоугольная матрица  $F = [F_{jk}]$  состоящая из  $m$  рядов и  $n$  столбцов, дает ее значения в  $m \times n$  внутренних точках. Автор показывает, что умножая ее слева на степени континуантной матрицы  $m$ -го порядка  $C_m$  и, соответственно, справа на степени континуантной матрицы  $C_n$  в случае однородных граничных условий — могут быть образованы относящиеся к  $m \times n$  внутренним точкам области конечные разности четного порядка на основании формулы

$$\left[ \frac{\Delta^{2\gamma} F_{jk}}{\Delta x^{2\alpha} \Delta y^{2(\gamma-\alpha)}} \right] = \frac{1}{(\Delta x)^{2\alpha} (\Delta y)^{2(\gamma-\alpha)}} C_m^{\alpha} F C_n^{\gamma-\alpha}.$$

В настоящей работе автор на двух примерах показывает, что между элементами матриц коэффициентов  $D_F$  и  $D_P$  относящихся к матрицам  $F_P$  и соответственно  $P$ , содержащих  $m \times n$  значений неизвестной функции и соответственно возмущающей функции, фигурирующих в уравнениях в конечных разностях, описывающих известные граничные задачи теории упругости, может быть дано пригодное для численных вычислений соотношение. Между матрицей  $F$  и относящейся к ней матрице коэффициентов  $D$  преобра-



зующие матрицы  $V_m V_n$  и образуемые из собственных векторов континуантных матриц  $C_m$  и соотв.  $C_n$  создает связь в форме  $F V_m D V_n^*$  и соотв.  $D = V_m^* F V_n$  так, что  $C_m = V_m \Lambda_m V_m^*$  и  $C_n = V_n \Lambda_n V_n^*$ , где  $\Lambda_m$  и  $\Lambda_n$  диагональные матрицы, образованные из собственных значений  $C_m$  и соотв.  $C_n$ .

## ÜBER EINE ANWENDUNG DER MATRIZENRECHNUNG ZUR NÄHERUNGS- LÖSUNG VON GEWISSEN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER FESTIGKEITSLEHRE

J. SZABÓ

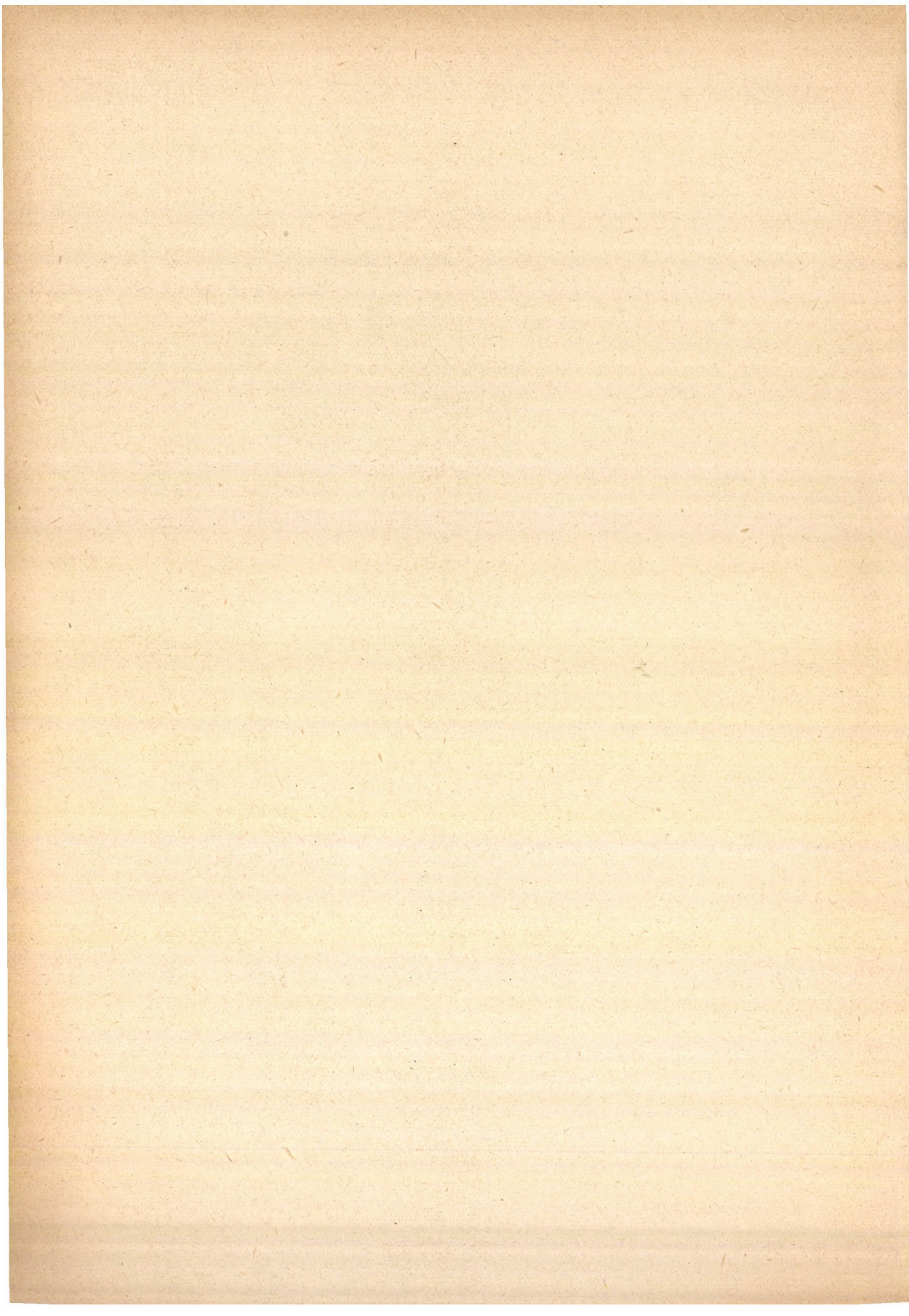
### Zusammenfassung

Verfasser bemerkt, dass in dem Falle, wenn die Unbekannten eines zweidimensionalen Problems in einem quadratischen bzw. rechteckigen Matrix zusammengefasst werden, die zweiten partiellen Differenzenquotienten nach den zwei unabhängigen Veränderlichen  $(x, y)$  mit gleichzeitiger Berücksichtigung der Randbedingungen durch rechtsbzw. links-seitige Multiplikation mit einer Kontinuanten-Matrix ( $C$ ) herstellbar sind. Es sei zum Beispiel die Funktion  $F(x, y)$  durch eine Matrix  $F = [F_{jk}]$  von  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten angenähert, deren Elemente in den  $m \times n$  Punkten eines rechteckigen Netzes den Werten der Funktion  $F$  gleich sind, d. h.:  $F_{jk} = F(x_j, y_k)$ , dann gilt die Formel

$$\left[ \frac{\Delta^{2\gamma} F(x_i, y_j)}{\Delta x^{2\alpha} \Delta y^{2(\gamma-\alpha)}} \right] = \frac{1}{(\Delta x)^{2\alpha} (\Delta y)^{2(\gamma-\alpha)}} C_m^a F C_n^{\gamma-a}.$$

Auf diese Weise erhält Verfasser eine allgemeine lineare Matrizengleichung; zur Lösung von derartigen Gleichungen wird in der Literatur meistens die Anwendung der Nivellateur vorgeschlagen. Im Gegensatz hierzu entwickelt Verfasser eine, auch zur maschinelle Rechnung gut anwendbare, Lösungsmethode, welche die bekannten Projektoren (Idempotente-Komponenten) der Kontinuanten-Matrix  $C$  verwendet. Die auf diese Weise erhaltene Lösung kann als die endliche Fouriersche Entwicklung der gesuchten Grössen gedeutet werden.







## A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET SZEMINÁRIUMAIBAN 1956-BAN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK KIVONATAI

### Intézeti szeminárium

1. EGERVÁRY JENŐ: *Régi és új módszerek lineáris egyenletrendszerek megoldására.* (Január 18.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát e *Közlemények* jelen kötetének 109—123. oldalain.

2. ERDŐS PÁL: *Megoldott és megoldatlan problémák polinomokkal kapcsolatban.* (Március 1.)

3. FREUD GÉZA: *Ortogonalis polinomok.* (Március 31.)

Az előadó doktori disszertációjának intézeten belüli megvitatása.

4. L. ILIEFF<sup>1)</sup>: *Über einige Klassen schlichter Funktionen.* (Május 12.)

5. EGERVÁRY JENŐ: *Az inverz matrix általánosítása.* (Június 26.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát e *Közlemények* jelen kötetének 315—324. oldalain.

6. T. GANELIUS<sup>2)</sup>: *On the remainders in certain Tauberian theorems.* (Október 10.)

7. RÓZSA PÁL: *Lineáris differenciál- és differenciaegyenletek általános kezdeti feltételeket kielégítő explicit megoldásáról.* (Szeptember 4.)

Az előadó hasonló címen írt dolgozata e *Közlemények* következő [2 (1957)] kötetében jelenik meg.

### A valószínűségszámítás és a matematikai statisztikai osztály közös szeminárium

1. K. URBANIK<sup>3)</sup>: *Általánosított stacionér folyamatokról.* (Január 2.)

2. ARATÓ MÁTYÁS: *Neutronok lassításáról.* (Január 6.)

Ismertető előadás.

3. BALATONI JÁNOS és RÉNYI ALFRÉD: *Az entrópia fogalmáról.* (Január 9., illetőleg január 23. és február 17.)

<sup>1)</sup> Szófia

<sup>2)</sup> Lund (Svédország).

<sup>3)</sup> A Lengyel Tudományos Akadémia Matematikai Intézete, Wroclaw.



Lásd az előadók hasonló című dolgozatát e *Közlemények* jelen kötetének 9—40. oldalain.

Az előadás kapcsán KÖVÁRI TAMÁS példát adott olyan eloszlásra, melynek nincsen dimenziója.

4. K. URBANIK: *Topológikus csoportokon értelmezett független valószínűségi változók összegeinek határeloszlására vonatkozó vizsgálatok.* (Január 13.)

Lásd: PRÉKOPA, A.—RÉNYI, A.—URBANIK, K. „О предельном распределении для сумм независимых случайных величин на бикомпактных коммутативных группах” című dolgozatát [*Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 7 (1956) 11—16.]

5. TAKÁCS LAJOS: *Beszámoló lengyelországi útiról.* (Január 16.)

6. PÁL LÉNÁRD<sup>4)</sup>: *A neutronok lelassításának néhány kérdéséről.* (Január 20.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát e *Közlemények* jelen kötetének 41—55. oldalain.

7. ARATÓ MÁTYÁS: *Az ergodikus elméletről.* (Február 20., 27. és március 5.)

Ismertető előadás.

8. ERDŐS PÁL: *Egy bolyongási feladatról.* (Február 24.)

Ismertető előadás.

9. TAKÁCS LAJOS: *Rekurrens folyamatokról.* (Március 2.)

Ismertető előadás az Intézetben gyakorlatot végző alkalmazott matematikus hallgatók részére.

10. PRÉKOPA ANDRÁS: *A sztochasztikus folyamatok alkalmazásairól.* (Március 7.)

Ismertető előadás az Intézetben gyakorlatukat végző alkalmazott matematikus hallgatók részére.

11. ERDŐS PÁL: *Valószínűségszámítási módszerek alkalmazása az analízisben és a számelméletben.* (Március 9.)

Ismertető előadás.

12. BÉLL BÉLA<sup>5)</sup>: *Csapadékképződés előrejelzése.* (Március 26.)

Ismertető előadás.

13. SARKADI KÁROLY: *A túllépések számának eloszlásáról.* (Április 9. és május 7.)

Az előadó bebizonyította, hogy a GUMBEL és VON SCHELLING által bevezetett túllépések számának eloszlása [lásd pl.: E. J. GUMBEL and H. VON SCHELLING: „The distribution of the number of exceedances” *Annals of Mathematical Statistics* 21 (1950) 247—262.], valamint a Laplace-féle következési szabály a Pólya-féle eloszlás speciális esete. A szóbanforgó problémák ekvivalenciájára több egyszerű modellen alapuló bizonyítást is adott. [Lásd az előadó „On the distribution of the number of exceedances” című dolgozatát (sajtó alatt az *Annals of Mathematical Statistics*-ban).]

14. RÉVÉSZ PÁL<sup>6)</sup>: *H. B. Mann „Analysis and design of experiments” című könyvének* (Dover, New York, 1949) ismertetése. (Április 13., 20. és 27.)

<sup>4)</sup> Központi Fizikai Kutató Intézet.

<sup>5)</sup> Meteorológiai Intézet.

<sup>6)</sup> Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet.



**15. PRÉKOPA ANDRÁS:** *Absztrakt Poisson- és összetett Poisson-folyamatokról.* (Április 23. és május 7.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát (sajtó alatt az *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*-ben).

**16. MOGYORÓDI JÓZSEF — NÉMETH GÉZA<sup>7)</sup>:** *Atommagreaktorokban végbe-menő neutronlassítás-folyamattal kapcsolatos valószínűségszámítási problémákról.* (Április 28.)

Lásd az előadók hasonló című cikkét e *Közlemények* jelen kötetének 337—348. oldalain.

**17. MÁRKUS EMILIA:** *Е. Б. Дынкин—В. А. Успенский „Математические беседы” című könyvéből* (Гостехиздат, Москва, 1954) *a bolyongási feladatok ismertetése.* (Május 4.)

**18. ARATÓ MÁTYÁS:** *A Bernstein polinomok általánosításáról.* (Május 21.)

Lásd: ARATÓ M.—RÉNYI A.: „Probabilistic proof of a theorem on the approximation of continuous functions by means of generalized Bernstein polynomials” című dolgozatát (sajtó alatt az *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*-ben).

**19. TAKÁCS LAJOS:** *Bizonyos várakozási idő problémával kapcsolatos sztochasztikus folyamatról.* (Június 25.)

Lásd az előadó hasonló című cikkét [sajtó alatt a *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményeiben* és a *Теория Вероятностей и её Применения*-ban].

**20. JAROSLAV HÁJEK<sup>8)</sup>:** *Véges sokaságokból való mintavételről.* (Október 1.)

Tekintsük az első  $N$  természetes számból álló  $\pi = \{1, 2, \dots, N\}$  sokaságot, s nevezzük mintáknak a  $\pi$  halmaz  $\omega \subset \pi$  részhalmazait; a mintavételt véletlenszerűnek mondjuk, ha minden  $\omega \subset \pi$  részhalmazhoz egy  $P(\omega)$  valószínűség tartozik. Legyenek  $y, x, \dots$  a  $\pi$ -n értelmezett változók, melyek az  $y_i = y(i), x_i = x(i), \dots (i \in \pi)$  értékeket veszik fel. Meg akarjuk becsülni pl. az

$$Y = \sum_{i \in \pi} y_i, \quad X = \sum_{i \in \pi} x_i, \quad N = \sum_{i \in \pi} 1$$

összegeket, illetőleg ezek

$$\bar{x} = X/N, \quad R = Y/X$$

hányadosait. Az  $\hat{Y} = \hat{Y}(\omega)$  változót ( $\omega \subset \pi$ )  $Y$  lineáris becslésének nevezzük, ha

$$\hat{Y} = \hat{Y}(\omega) = \sum_{i \in \pi} y_i U_i(\omega),$$

ahol az  $U_i(\omega)$  súlyok általában  $\omega \subset \pi$  függvényei, és kielégítik a következő feltételt:

$$U_i(\omega) = 0, \quad \text{ha } i \in \pi - \omega.$$

<sup>7)</sup> Központi Fizikai Kutató Intézet.

<sup>8)</sup> Csehszlovák Tudományos Akadémia Matematikai Intézete.



Ha  $\mathbf{M}U_i = 1$ , akkor  $\mathbf{M}\hat{Y} = Y$ .  $\hat{Y}$  négyzetes középhibája :

$$(1) \quad \mathbf{M}(\hat{Y} - Y)^2 = \sum_{i \in \pi} \sum_{j \in \pi} y_i y_j \mathbf{M}(U_i - 1)(U_j - 1).$$

Lineáris torzítatlan becslés akkor létezik, ha  $\mathbf{P}(i \in \omega) > 0$  minden  $i \in \pi$  esetén ; (1)-nek akkor van lineáris torzítatlan becslése, ha  $\mathbf{P}(i \in \omega, j \in \omega) > 0$  minden  $i, j \in \pi$  esetén. Ha a  $\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{P}(\omega | \vartheta_1, \dots, \vartheta_h)$  valószínűségek és az  $U_i(\omega) = U_i(\omega | \vartheta_1, \dots, \vartheta_h)$  súlyok  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_h$  paraméterektől is függenek, mégpedig úgy, hogy

$$\mathbf{M}(\hat{Y} - Y)^2 = d_0 + \frac{d_1}{\theta_1} + \dots + \frac{d_h}{\theta_h} \quad d_i \geq 0,$$

és a költség-függvény (*cost function*):

$$c = c_0 + c_1 \theta_1 + \dots + c_h \theta_h,$$

akkor a Bunyakovszkij—Schwarz egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(c - c_0) \{ \mathbf{M}(\hat{Y} - Y)^2 - d_0 \} \geq \left( \sum_{i=1}^h \sqrt{c_i d_i} \right)^2$$

és így a legjobb tervet a mintavételhez a

$$\theta_i = \lambda \sqrt{\frac{d_i}{c_i}}$$

kifejezés adja.

A  $\lambda$  konstans értékét  $\mathbf{M}(\hat{Y} - Y)^2$  vagy  $c$  előírt értékéből kaphatjuk meg.

**21. JAROSLAV HÁJEK:** *A szignifikancia-próbák elméletének néhány kérdéséről.* (Október 8. és 11).

1°. *Általánosított Student-féle hányados.* Ha  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$  függetlenek és standardizált normális eloszlásúak, akkor az előadó által bevezetett

$$\frac{\xi_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \lambda_i \xi_i^2}}$$

általánosított Student-féle hányados  $S(t | \lambda_1, \dots, \lambda_m)$  eloszlásfüggvénye eleget tesz a következő egyenlőtlenségeknek :

$$S_\nu(t) \leq S(t | \lambda_1, \dots, \lambda_m) \leq S_m(t),$$

ahol  $S_\nu(t)$  és  $S_m(t)$  a szokásos Student-féle eloszlásfüggvények,  $\nu$  és  $m$  szabadságfokkal, ahol

$$\nu \leq \min \left( \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_m} \right)$$



2°.  $2 \times 2$ -es kontingencia-tábla analízise. Ha  $A$  és  $B$  két nem-független esemény, ezt úgy foghatjuk fel, hogy létezik három független esemény,  $E, F, G$ , amelyekre  $A = E + F$  és  $B = E + G$ . A  $P(E)$  valószínűség az  $A$  és  $B$  függésének mértéke. Az

	$A$	$\bar{A}$
$B$	$a$	$b$
$\bar{B}$	$c$	$d$

$2 \times 2$ -es kontingencia-táblából  $P(E)$ -re a következő becslés adható:

$$P(E) \sim \frac{ad - bc}{nd}.$$

3°. Sorrend-próba párokból álló mintákra. Ha  $(x_i, y_i)$   $n$  független megfigyelés-pár ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), akkor annak a hipotézisnek ellenőrzésére, hogy a  $d_i = x_i - y_i$  különbségek eloszlásai nullára nézve szimmetrikusak, a következő próbát adhatjuk: Legyen  $(d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(n)})$  a  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  számok azon permutációja, melyre

$$|d^{(1)}| < |d^{(2)}| < \dots < |d^{(n)}|,$$

és vizsgáljuk, hogy

$$\alpha_+ = \sum_{d^{(i)} > 0} i \quad \text{illetve} \quad \alpha_- = \sum_{d^{(i)} < 0} i$$

értékek kisebbek-e a kritikus értéknél (mely értékekre táblázat adható meg). A próba aszimptotikus hatásfoka 0,955.

**22. TAKÁCS LAJOS:** *A Borel—Cantelli tételekről és azok alkalmazásairól.* (Október 22.)

Ismertető előadás.

**23. RÉNYI ALFRÉD:** *Sorok részösszegeiről.* (December 6. és 13.)

Legyen  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  egy valós számokból álló számsorozat. Definíáljuk az  $\{s_n\}$  számsorozatot a következőképpen: ha az  $n$  szám előállítása a 2-es alapú számrendszerben

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_l} \quad (k_1 < k_2 < \dots < k_l),$$

akkor legyen

$$s_n = a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_l} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Az  $s_n$  számsorozat tehát az  $a_0 + a_1 + \dots$  sor összes véges részösszegeiből áll, és azok lexikografikus sorrendben vannak elrendezve. (Pl.  $s_1 = a_0, s_2 = a_1$ ,



$s_3 = a_0 + a_1, \dots, s_{15} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \dots, s_{28} = a_2 + a_3 + a_4, \dots$ ). Az előadó bebizonyította, hogy a

$$\lambda_r = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N s_n^r}{N} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

határértékek akkor és csak akkor léteznek mind, ha az  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  és  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$  sorok konvergálnak. Az előadó a  $\lambda_r$  határértékeket is meghatározta. Jelölje  $V_n(x)$  az  $s_1, s_2, \dots, s_n$  számok közül az  $x$ -nél kisebbek számát. Az előadó bebizonyította, hogy ha a  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  és  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$  sorok konvergálnak, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n(x)}{n} = F(x)$$

fennáll az  $F(x)$  összes folytonossági pontjaiban, ahol  $F(x)$  egy eloszlásfüggvény. Meghatározta az  $F(x)$  eloszlásfüggvényt is. (Lásd az előadó „On the sequence of generalized partial sums of a series” című dolgozatát a *Publications Mathematicae (Debrecen)* című folyóiratban, sajtó alatt.)

**24. TAKÁCS LAJOS:** „Bizonyos többdimenziós véletlen halmaz mértékének eloszlásáról. (December 13. és 20.)

Tekintsük az  $m$  dimenziós euklidesi tér mérhető  $H$  részhalmazát és ezen  $\lambda$  sűrűséggel Poisson-folyamat szerint elhelyezkedő véletlen pontokat. Jelölje a pontok számát  $\xi(H)$  valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy minden egyes véletlen ponthoz hozzárendelünk egy  $m$ -dimenziós mérhető pont-halmazt, amelynek struktúráját és helyzetét véletlen paraméterek szabják meg. Feltesszük, hogy a különböző véletlen pontokhoz tartozó véletlen paraméterek egymástól független egyforma eloszlású valószínűségi változók. Legyen  $\xi(x, H) = 1$ , ha a  $H$  halmaz  $x$  pontja hozzátartozik leg-  
alább egy véletlen halmazhoz és  $\xi(x, H) = 0$  egyébként. Legyen

$$\theta(H) = \int_H \xi(x, H) dx.$$

Az előadó meghatározta az

$$\mathbf{M}\{\theta(H)^s\} \text{ és } \mathbf{M}\{\theta(H)^s | \xi(H) = n\}$$

momentumokat. Ezek ismeretében a  $\mathbf{P}\{\theta(H) < x\}$  és  $\mathbf{P}\{\theta(H) < x | \xi(H) = n\}$  eloszlásfüggvények egyértelműen meghatározhatók.

### Az elektrotechnikai és automatizálási osztály szemináriuma

**1. BOGNÁR LÁSZLÓ:** *Indukciósan fűtött presszerszámok méretezése.* (Április 21.)

Az előadó egy külső megbízásból származó problémát ismertetett.



**2. FÉNYES TAMÁS:** *S. A. Schelkunoff „Advanced antenna theory” című könyve* (Wiley, New-York, 1952.) I—III. fejezeteinek ismertetése. (Augusztus 16. és október 2.)

**3. ALFÁR LÁSZLÓ:** *Elliptikus inverzió és a Poisson integrál.* (Október 15.)  
Az előadó

$$\sum_{i,k}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

állandó együtthatós, elliptikus parciális differenciálegyenletek megoldását közvetlen eljárással határozza meg. A nyert fundamentális megoldás analóg a Laplace-egyenletre talált ismert kifejezésekkel.

Jelölje  $x$  a  $P$  pontba és  $y$  a  $Q$  ( $\neq P$ , de különben tetszőleges) pontba mutató vektort; legyen  $A = [a_{ik}]$  pozitív definit szimmetrikus matrix,  $A^{-1}$  ennek inverze és

$$\sigma_{PQ}^2 = (x - y)^* A^{-1} (x - y) .$$

E jelölések mellett a fenti elliptikus differenciálegyenlet fundamentális megoldása

$$u(P, Q) = \frac{1}{\sigma_{PQ}^{n-2}} \quad (\text{ha } n > 2), \quad \text{illetve} \quad u(P, Q) = \log \frac{1}{\sigma_{PQ}} \quad (\text{ha } n = 2) .$$

Bevezetve a  $\sigma_{PQ}$  kifejezést, mint a  $P$  és  $Q$  pontok elliptikus távolságát, megoldható a Dirichlet-feladattal analóg peremértékprobléma az

$$y^* A^{-1} y = k^2 \quad (k \neq 0 \text{ állandó})$$

egyenlettel meghatározott ellipszoidra (ellipszisre) nézve, ahol  $Q(y)$  most a határ futópontja. Az elliptikus távolság fogalma lehetővé teszi az elliptikus inverzió fogalmának bevezetését és ennek segítségével a Dirichlet-feladat megoldása a Poisson-integrállal analóg kifejezéssel állítható elő.

**4. PÁL SÁNDOR:** *Ferromágneses vezetők szkin-effektus problémájáról.* (Október 22.)

### A numerikus és grafikus módszerek osztályának szemináriuma

**1. TÓTH KÁROLY:** *Mozgólapos nomogrammok elve és gyakorlati alkalmazásai.* (Január 14. és 21.)

**2. BÉKÉSSY ANDRÁS és KEMPELEN MÁRTA:** *B. H. Фаддеева „Вычислительные методы линейной алгебры” című könyvének* [Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1950.] ismertetése. (Január 28., február 18., április 7., 14., május 5., 19. és június 23.)

**3. TARNAY GYULA:** *Egerváry Jenő „Mátrixfüggvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról” című dolgozatának* [A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei **3** (1953) 417—458] ismertetése. (Február 25. és március 24.)



4. PÁL SÁNDOR: *Grafikus-numerikus módszer pontsoros és pontmezős nomogrammok tervezésére.* (Március 3., 10. és 17.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát a *Közlemények* jelen kötetének 223—268. oldalain.

5. TÓTH KÁROLY: *Elektrotechnikai csillag-háromszög kapcsolás megoldása mozgólapos nomogrammal.* (Május 26.)

6. RÓZSA PÁL: *Mátrix invertálása R. Souriau és Д. К. Фаддеев módszerével.* (Június 9.)

7. TARNAY GYULA: *A Laplace-módszer általánosítása.* (Július 14.)  
Az előadó szakdolgozatát ismertette.

8. BÉKÉSSY ANDRÁS: *A stacionárius fázis módszeréről.* (Szeptember 8.)

J. G. VAN DER CORPUT: „Sur la méthode de points décisifs” [*Proceedings of the Netherlandish Academy of Sciences* 42 (1939) 3—10.] című cikkének ismertetése.

9. SÁNDOR FERENC: *Digitális számológépek programmozása.* (Október 19. és december 18.)

1956-ban indult s azóta is folytatódó szeminárium.

### A valós függvénytani osztály szemináriuma

1. CSÁSZÁR ÁKOS folytatta „A halmazelméleti topológia alapvonalai” c. heti két órás előadásait. Az év folyamán összesen 23 előadás hangzott el.

2. FREUD GÉZA: *Függvény deriváltjainak approximációja a függvényt approximáló polinom deriváltjaival.* (Április 17.)

Az előadó bebizonyítja a következő tételt: legyen  $f(x)$   $2\pi$  szerint periodikus,  $r$ -szer folytonosan differenciálható függvény és  $P_n(x)$  olyan  $n$ -edfokú trigonometrikus polinom, amelyre fennáll az

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenség. Akkor

$$|f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)| \leq 3 \cdot 2^k n^k \varepsilon + 4 E_n(f^{(k)}) \quad (0 < k \leq r)$$

és

$$|\tilde{f}^{(k)}(x) - \tilde{P}_n^{(k)}(x)| \leq 3 \cdot 2^k n^k \varepsilon + 4 E_n(\tilde{f}^{(k)}) \quad (0 < k < r).$$

3. CZIPSZER JÁNOS: *A Baire-féle nulla-tér egy topológiai jellemzése.* (December 7.)

Az előadó szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy egy topologikus tér homeomorf legyen a Baire-féle nulla-térrel. Ezen feltétel birtokában általánosítja MAZURKIEWICZ egyik tételét, amely teljes, szeparábilis és null-dimenziós metrikus terekben fekvő halmazoknak a Baire-féle nulla-térrel való homeomorfiájára vonatkozik. [Lásd C. KURATOWSKI: *Topologie*, I. (3. kiadás) 349. oldal, Théorème 3.]



## A differenciálegyenletek osztályának szemináriuma

1. ADLER GYÖRGY: *A hővezetés differenciálegyenletének maximum-  
elvéről.* (Január 18.)

Lásd e *Közlemények* jelen kötetének 157—165. oldalain az előadó-  
nak FREUD GÉZÁVAL közösen írt dolgozatát.

2. BIHARI IMRE<sup>9)</sup>: *Vizsgálatok nemlineáris differenciálegyenletek stabi-  
litására vonatkozólag.* (Január 25.)

Lásd az előadó dolgozatát: „A generalization of a lemma of Bellman  
and its application to uniqueness problems of differential equations” [*Acta  
Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 7 (1956) 81—94].

3. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA—KORÁNYI ÁDÁM: *Sajátértékfeladatok per-  
turbációszámítása.* (Február 3., március 1., 15. és 29., április 12. és 26.)

A Bolyai János Matematikai Társulattal közösen rendezett előadás-  
sorozat.

4. SZILVAY GÉZÁNÉ — BIHARI IMRE: *R. Bellman „Stability theory of  
differential equations” című könyvének* [International Series in Pure and  
Applied Mathematics, New York, 1953] ismertetése. (Február 8. és 22.)

5. BIHARI IMRE: *Újabb, másodrendű differenciálegyenletekre vonatkozó  
oscillációs tételek.* (Március 7.)

Az előadó a következő tételeket bizonyította be az

$$(1) \quad u'' + \varphi(t) f(u) h(u') = 0$$

differenciálegyenletre vonatkozóan: ha

$$1^\circ \quad \varphi(t) \geq \delta > 0,$$

$$2^\circ \quad \int_0^{\pm \infty} f(t) dt = \pm \infty$$

$$3^\circ \quad h(t) > 0$$

$$4^\circ \quad \int_0^{\infty} |\varphi'(t)| dt < \infty,$$

akkor (1) minden *megoldása* korlátos. Ha

$$1^\circ \quad \operatorname{sgn} f(u) = \operatorname{sgn} u$$

$$2^\circ \quad \varphi(t) > 0 \text{ és nemcsökkenő, korlátos függvény: } \varphi(t) < K,$$

$$3^\circ \quad \int_0^{\infty} \frac{t dt}{h(t)} = \infty,$$

akkor (1) minden megoldásának *deriváltja* korlátos.

<sup>9)</sup> Budapesti Műszaki Egyetem, I. Matematikai tanszék.



Legyen

$$(2) \quad \begin{aligned} u'' + a(t) \varphi(u) &= 0, \\ u'' + \omega(t) \varphi(u) &= 0. \end{aligned}$$

Ha

$$1^\circ \quad \int_c^\infty t|a(t)| dt < \infty \quad \text{valamely } c\text{-re,}$$

$$2^\circ \quad \frac{|\varphi(u)|}{t} \leq \omega\left(\frac{|u|}{t}\right) \quad (t \geq 1)$$

minden  $u$  megoldásra, ahol  $\omega(u)$  pozitív és növekedő, akkor

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t)$$

létezik (2) minden megoldására és van olyan megoldás, amelyre  $A \neq 0$ .

6. CZÁCH LÁSZLÓ<sup>10)</sup>: С. Л. Соболев „Некоторые применения функционального анализа в математической физике” című könyvének [Ленинград, 1950.] ismertetése. (Március 28.)

7. CZÁCH LÁSZLÓ: Egy variációs módszer másodrendű önadjungált elliptikus differenciálegyenletek megoldására. (Április 11. és 18.)

Az előadó 1955-ben Moszkvában megvédett kandidátusi disszertációját ismertette. [Sajtó alatt az *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*-ben.]

8. FENYŐ ISTVÁN: A disztribúcióelmélet alkalmazása függvényegyenletek megoldására. (Május 4.)

Az előadó egy új módszert közöl függvényegyenletek megoldására, melynek lényege az, hogy a függvényegyenletet differenciálegyenletre vezeti vissza. A nemdifferenciálható függvények esetén a függvényt mint Laurent—Schwartz-féle disztribúciót fogja fel, és ilyen módon disztribúció-differenciálegyenletet nyer. Ezek megoldási módszere pedig már kidolgozott. Több konkrét példán mutatja be az előadó az eljárást.

Az előadás cikk alakjában sajtó alatt van az *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*-ben.

9. ADLER GYÖRGY—SALLAY MELÁNIA: S. Bergman—M. Schiffer „Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics” című könyve (Academic Press, New York, 1953.) 1—3. fejezeteinek ismertetése. (Október 10., 17. és december 18.)

### A komplex függvénytan oszta ly szeminá riuma

1. TURÁN PÁL: H ézag os hatv ány sorokról. (Április 14.)

Meg jelenik az 1956-os buka resti ma tem a ti kai kongresszus kiadványában.

2. RÉNYI ALFRÉD: Ana litikus függvények szukcesszív deriváltjai gyökeinek a számáról. (Április 17.)

<sup>10)</sup> Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematika i Intézet.



Lásd az előadónak ERDŐS PÁL-lal közösen írt dolgozatát [*Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 7 (1956) 125—144].

3. KÖVÁRI TAMÁS: *H. Wittich kétszeresen összefüggő tartományok konform modulusára vonatkozó eredményei.* (Szeptember 8.)

4. TURÁN PÁL: *Komplex számok hatványösszegeiről.* (December 12.)  
Az előadó régebben felvetette azon kérdést, vajon igaz-e, hogy

$$M_n \equiv \min_{(z_1, \dots, z_{n-1})} [\max(|s_1|, |s_2|, \dots, |s_n|)] \geq C$$

ahol  $s_p = z_1^p + \dots + z_{n-1}^p + 1$  és  $C$  egy  $n$ -től független állandó. Ez irányban a legjobb eredmény eddig DE BRUIJN becslése:

$$M_n > \frac{1}{4} \frac{\log \frac{1 + \log n}{2}}{1 + \log n}.$$

Az előadásban ezzel kapcsolatban az

$$M_n^* = \min_{(z_1, \dots, z_{n-1})} \sum_{p=1}^n \frac{|s_p|^2}{p}$$

kifejezést vizsgálta. Alkalmas példán (lényegileg a

$$z^{2k} - \frac{1}{k+1} z^{k-1} - \frac{1}{k+2} z^{k-2} - \dots - \frac{1}{2k-1} z - \frac{1}{2k} = 0$$

egyenlet gyökrendszerén,  $k = [n/2]$ ) kimutatta, hogy

$$M_n^* \leq C_1,$$

ahol  $C_1$   $n$ -től független numerikus állandó. Ha  $(z'_1, \dots, z'_{n-1})$  egy, a

$$\sum_{p=1}^n \frac{|s_p|^2}{p}$$

kifejezést minimizáló értékrendszer és

$$h(z) = \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \bar{z}'_j z) (1 - z),$$

akkor  $h(z)$  kielégíti a következő differenciál-függvényegyenletet:

$$\lambda h'(z) + \frac{z^n}{z-1} h(z) \bar{h} \left( \frac{1}{z} \right) = \bar{\lambda} z^{2n-1} \bar{h}' \left( \frac{1}{z} \right)$$

ahol  $h(1) = 0$ , és  $\lambda$  alkalmas komplex szám.



10. KÖVÁRI TAMÁS—SERES IVÁN—SZÜSZ PÉTER—VINCZE ISTVÁN : Pólya György—Szegő Gábor „*Isoperimetrical inequalities*” című könyvének [Princeton University Press, Princeton, 1951. „*Annals of Mathematics Studies*” No 27.] ismertetése.

11. KÖVÁRI TAMÁS—RÉNYI KATÓ<sup>11)</sup> : Голузин „*Геометрическая теория функций комплексного переменного*” című könyvének [Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1952.] ismertetése.

12. ADLER GYÖRGY—FREUD GÉZA—SZÜSZ PÉTER : S. Bergman „*Kernel functions*” című könyvének [American Mathematical Society, New York, 1951.] ismertetése.

[A fenti 10.—11.—12. alatti ismertetések az év folyamán mintegy 40 előadás keretében hangzottak el.]

---

<sup>11)</sup> Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Tanszék.



**AZ INTÉZET MUNKATÁRSAINAK AZ INTÉZET MUNKÁJÁNAK  
EREDMÉNYEIT TARTALMAZÓ, 1956. JANUÁR 1. ÓTA MÁSUTT MEGJELENT  
VAGY SAJTÓ ALATT LEVŐ DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE**

**Matrixelmélet és alkalmazásai**

- [1] EGERVÁRY, E.: „Begründung und Darstellung einer allgemeine Theorie der Hängebrücken mit Hilfe der Matrizenrechnung.” *Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brücken- und Hochbau (Zürich)* (sajtó alatt).
- [2] LOVASS-NAGY V. (SZENDY K.-lyal együtt): „Application of the matrix calculus to the mathematical investigation of polyphase transformers of arbitrary connection.” *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* **16** (1957) (sajtó alatt).
- [3] LOVASS-NAGY V. (BAJCSAY P.-lal együtt): „On a generalization of the four terminal theory by use of hypermatrices.” *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [4] RÓZSA P.: „A matrixelmélet néhány új tételéről és azok alkalmazásáról differenciális differenciálegyenletek megoldására.” *Kandidátusi disszertáció* (1956).
- [5] SZŐKEFALVI-NAGY B.: „Remark on S. N. Roy's paper »A useful theorem in matrix theory«” *Proceedings of the American Mathematical Society* **7** (1956) 1.

**Valószínűségszámítás és matematikai statisztika**

- [6] ARATÓ M.—RÉNYI A.: „Probabilistic proof of a theorem on the approximation of continuous functions by means of generalized Bernstein polynomials.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [7] CSÁSZÁR Á.: „Sur la structure des espaces de probabilité conditionnelle.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 337—361.
- [8] MEDGYESSY P.: „Anwendungsmöglichkeiten der Analyse der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bei der Auswertung von Messungsergebnissen.” *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **37** (1957) 128—139.
- [9] MEDGYESSY P.—TAKÁCS L.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1957. (Műszaki Matematikai Gyakorlatok, C. sorozat V.)
- [10] PRÉKOPA A.: „Független valószínűségi változók végtelen sorainak konvergenciájáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei* **6** (1956) 191—198.
- [11] PRÉKOPA A.: „On the convergence of series of independent random variables.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **4** (1955—56) 410—417.
- [12] PRÉKOPA A.: „On the independence in the limit of sums depending on the same sequence of independent random variables.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **7** (1956) 319—321.
- [13] PRÉKOPA A.: *Bevezetés a valószínűségszámításba*. Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest, 1956. (A Mérnöki Továbbképző Intézet 3593. sz. kiadványa.)
- [14] PRÉKOPA A.—RÉNYI A.: „On the joint limiting distribution of sums of independent random variables.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).



- [15] RÉNYI A. : „Megjegyzés F. N. David és N. L. Johnson : Some tests of significance with ordered variables c. dolgozatához.” (angolul) *Journal of the Royal Statistical Society Ser. B.* **18** (1956) 29.
- [16] RÉNYI A. (ERDŐS P.-lal együtt) : „Probabilistic approach to some problems of diophantine analysis.” *Illinois Mathematical Journal* (sajtó alatt).
- [17] RÉNYI A. : „Mathematical notes, II. On the sequence of generalized partial sums of a series.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* (sajtó alatt).
- [18] RÉNYI A. : „Remark on the theorem of Simmons.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* (sajtó alatt).
- [19] RÉNYI A. : „On the asymptotic distribution of sums of a random number of independent random variables.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [20] SARKADI K. : „On the distribution of the number of exceedances.” *Annals of Mathematical Statistics* (sajtó alatt).
- [21] TAKÁCS L. (OROSZ G.-ral együtt) : „Some probability problems concerning the marking of codes into the superimposition field.” *Journal of Documentation* **12** (1956) 231–234.
- [22] TAKÁCS L. : „Bizonyos várakozási idő problémával kapcsolatos sztochasztikus folyamatról.” *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **7** (1957) (sajtó alatt).
- [23] TAKÁCS L. : „On some problems concerning the theory of counters.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **8** (1957) (sajtó alatt).
- [24] TAKÁCS L. : „On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **8** (1957) (sajtó alatt).

#### Komplex függvénytan

- [25] KÓVÁRI T. : „Egy Turán-féle problémáról.” *Matematikai Lapok* **7** (1956) 106–107.
- [26] RÉNYI A. (ERDŐS P.-lal együtt) : „On the number of zeros of successive derivatives of analytic functions.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **7** (1956) 125–144.
- [27] TURÁN P. : „Über lakunären Potenzreihen.” *A Bukaresti Matematikai Kongresszus Közleményei* (sajtó alatt).
- [28] VINCZE I. : „Transzcendens egész függvények maximum modulusáról.” *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **6** (1956) 451–459.

#### Valós függvénytan és konstruktív függvénytan

- [29] BALÁZS J. – TURÁN P. : „Notes on interpolation, II. (Explicit formulae).” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [30] BALÁZS J. – TURÁN P. : „Notes on interpolation, III. (Inequalities and convergence).” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [31] CSÁSZÁR Á. : „Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à une variable.” *Colloquium Mathematicum* **4** (1956) 13–29.
- [32] CSÁSZÁR Á. : „Sur une caracterisation de la répartition normale de probabilités.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **7** (1956) (sajtó alatt).
- [33] CSÁSZÁR Á. : „A topologikus tér fogalmáról.” *Matematikai Lapok* **8** (1957) (sajtó alatt).
- [34] CSÁSZÁR Á. : „Quelques remarques sur une ouvrage de M. V. Pták.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **5** (1957–58) (sajtó alatt).
- [35] FENYŐ I. : „A disztribúcióelmélet alapjai.” *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **6** (1956) 231–249.
- [36] FREUD G. : „Über gleichzeitige Approximation einer Funktion und ihrer Derivierten.” *IV. Österreichisches Mathematiker-Kongress, Wien, 1956.*



- [37] FREUD G.: „Untersuchungen über orthogonale Polynome.” *A Bukaresti Matematikai Kongresszus Közleményei (1956)* (sajtó alatt).
- [38] FREUD G.: „Ortogonalis polinomokról.” *Doktori disszertáció (1956)*.

#### Funkcionálanalízis

- [39] SZŐKEFALVI-NAGY B.: „Remarks to the preceding paper of A. Korányi.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **17** (1956) 71–75.
- [40] SZŐKEFALVI-NAGY B. (KORÁNYI Á.-mal együtt): „Sur les relations d'un problème de Nevanlinna et Pick avec la théorie des operateurs de l'espace hilbertien.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).

#### Differenciál- és integrálegenletek

- [41] FENYŐ I.: „Über eine Lösungsmethode gewisser Funktionalgleichungen.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [42] FENYŐ I.: *Integrálegenletek (Feladattár)*. Tankönyvkiadó, Budapest (sajtó alatt).
- [43] FREUD G. (KRÁLIK D.-vel együtt): „Über die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips für den Kreis.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **7** (1957) 411–416.
- [44] FREUD G.: „Körkeresztmetszetű vezetőkben mutatkozó áramkiszorításról.” *Magyar Tudományos Akadémia VI. (Műszaki) Osztályának Közleményei* **18** (1956) 7–8.

#### Algebra és számelmélet

- [45] ALPÁR L.: „Egy számelméleti probléma”. *Matematikai Lapok* **6** (1955) 309–322.
- [46] RÉNYI A. – TURÁN P.: „On a theorem of Erdős and Kac.” *Acta Arithmetica* (sajtó alatt).
- [47] RÉNYI A.: „A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle előállításában.” *Matematikai Lapok* **7** (1956) 77–100.
- [48] SERES I.: „Lösung und Verallgemeinerung eines Schurschen Irreduzibilitäts problems für Polynome.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **7** (1956) 151–157.
- [49] STEINFELD O.: „Megjegyzés Szele Tibor egyik dolgozatához.” *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **6** (1956) 229.
- [50] STEINFELD O.: „Über die Quasiideale von Halbgruppen.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **4** (1955–56) 262–275.
- [51] STEINFELD O.: „Über die Quasiideale von Ringen.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **17** (1956) 170–180.
- [52] SZÜSZ P.: „Beweis eines zahlentheoretischen Satzes von G. Szekeres.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **7** (1956) 75–81.
- [53] SZÜSZ P.: „Bemerkungen zur Verteilung der Ziffern in der Cantorsche Reihe reeller Zahlen.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [54] SZÜSZ P.: „Megjegyzések a számjegyek eloszlásáról valós számok Cantor-sorában.” *Matematikai Lapok* (sajtó alatt).
- [55] TURÁN P.: „Remarks on the zeros of characteristic equations.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **4** (1955–56) 406–409.
- [56] TURÁN P.: „On the zeros of the zeta function of Riemann.” *Bombay-i zeta-kollokvium* (sajtó alatt).
- [57] TURÁN P.: *Über eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*. (Kínai nyelvű fordításban, sajtó alatt).
- [58] TURÁN P.: „On the so-called density-hypothesis in the theory of the zeta function of Riemann.” *Acta Arithmetica* (sajtó alatt).
- [59] TURÁN P.: „Faktoriálisos” számrendszerbeli „számjegyek” eloszlásáról. *Matematikai Lapok* **7** (1956) 71–76.



## Egyéb

- [60] HEPPEs A. (RÉVÉsz P.-lal együtt): „Zum Borsukschen Zerteilungsproblem.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 7 (1956) 159–162.
- [61] HEPPEs A. (RÉVÉsz P.-lal együtt): „A Borsuk-féle feldarabolási problémához.” *Matematikai Lapok* 7 (1956) 108–111.
- [62] SÁNDOR F.: „Mágneses gyűrűsmagok digitális számológép céljaira.” *Magyar Tudományos Akadémia Méréstechnikai és Műszerügyi Intézetének Közleményei* 1 (1956) 108–137.
- [63] SZŐKEFALVI-NAGY B.: „Riesz Frigyes 1880–1956.” *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 6 (1956) 143–156.
- [64] TURÁN P.: „Remark on the previous paper of Mr. Cassels.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [65] VINCZE I. (ERDŐS P.-lal együtt): „Konvex, zárt síkgörbék lefedéséről.” *Matematikai Lapok* (sajtó alatt).
- [66] VINCZE I.: „A biztosítási matematikus feladatáról, I. és II.” *Biztosítási tájékoztató* 1956. No. 5. 2–5. és 1956. No. 9. 1–5.

A KORÁBBI DOLGOZATJEGYZÉKEEN HIÁNYOS BIBLIOGRÁFIAI  
ADATOKKAL SZEREPLŐ DOLGOZATOK KIEGÉSZÍTETT ADATOKKAL\*

- [2\*] EGERVÁRY J.: „Auflösung eines homogenen linearen diophantischen Gleichungssystems mit Hilfe von Projektormatrizen.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* 4 (1955–56) 481–483.
- [7\*] LOVASS-NAGY V.: „Mathematical investigation of the stability against lateral buckling of a beam which is freely suspended at both ends.” *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* 13 (1955) 281–297.
- [8\*] LOVASS-NAGY V.: „On an application of Egerváry's hypermatrix-algorithm to the mathematical investigation of polyphse transformers.” *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* 15 (1956) 261–286.
- [10\*] FISCHER J. (INKE G.-ral együtt): „Magvolumen mérések metodikája.” *Acta Morphologica* 7 (1957) 141–146.
- [14\*] PRÉKOPA A. (LENGYEL B.-val és TÖRÖK F.-cel együtt): „Über Kinetik und Gleichgewicht der Equilibrierungsreaktion von linearen Methylpolysiloxanen, I.” *Zeitschrift für Physik und Chemie* 206 (1956) 161–168.
- [15\*] PRÉKOPA A.: „On stochastic set functions, I.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 7 (1956) 215–263.
- [16\*] PRÉKOPA A.: „Extension of multiplicative set functions with values in a Banach algebra.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 7 (1956) 201–213.
- [18\*] PRÉKOPA A.: „Banach algebrából vett értékű multiplikatív halmazfüggvények kiterjesztése.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 6 (1956) 339–351.
- [19\*] PRÉKOPA A.: „Sztochasztikus halmazfüggvények, I.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 6 (1956) 289–337.
- [22\*] RÉNYI A.—ZERGENYI E.: „On an inequality concerning uncorrelated random variables.” *Czechoslovak Mathematical Journal* 6 (81) (1956) 415–419.
- [27\*] RÉNYI A. (ERDŐS P.-lal együtt): „On some combinatorical problems.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* 4 (1955–56) 398–405.
- [29\*] RÉNYI A.: „On conditional probability spaces generated by a dimensionally ordered set of measures.” *Теория Вероятностей и её Применения* 1 (1956) 61–71.

\* A \*-gal megjelölt sorszáмок jelen kötet 1–2. füzetének 311–314. oldalain szereplő dolgozatjegyzék sorszámainra utalnak.



- [40\*] TAKÁCS L. : „On the sequence of events selected by a counter from a recurrent process of events.” *Теория Вероятностей и её Применения* **1** (1956) 90–102.
- [44\*] TAKÁCS L. : „Részecseszámlálók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatokról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **6** (1956) 369–421.
- [49\*] TAKÁCS L. : „On the generalization of Erlang's formula.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **7** (1956) 419–433.
- [55\*] CSÁSZÁR Á. : „Sur les fonctions localement monotones au sens généralisé.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 451–461.
- [61\*] FREUD G. : „Über differenzierte Folgen der Lagrangeschen Interpolation.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 467–474.
- [66\*] FREUD G. : *A hidrodinamika matematikai módszerei*. Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest, 1955. (Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványai 3534. sz.).
- [73\*] SZÜSZ P. : „A sorelmélet egy problémájáról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **6** (1956) 461–467.



A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki felelős: Szöllősy Károly

A kézirat beérkezett: 1956. X. 5. Terjedelem: 165(A/5) ív

---

40815/57 — Akadémiai Nyomda, V., Gerlóczy u. 2. — Felelős vezető: Bernát György

MAGYAR  
AKADÉMIAI KIADÓ  
KÖNYVTÁR



## CONTENTS

NICOLESCU, M.: La structure des solutions des équations aux dérivées partielles du type elliptique ou du type parabolique.....	465
TURÁN, P.: Remark on the theory of quasianalytic function-classes .....	481
MEDGYESSY, P.: Partial differential equations for stable density functions and their applications .....	489
RÉNYI, A.: A characterization of Poisson processes.....	519
PALÁSTI, I.—RÉNYI, A.: Monte-Carlo methods as minimax strategies.....	529
L. ZIERMANN, M.: Wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchung einiger landwirtschaftlicher Probleme .....	547
BÉRES, E.—LOVASS-NAGY, V.—SZABÓ, J.: Über eine Anwendung der Hypermatrizen bei der Berechnung von räumlichen Fachwerken mit zyklischer Symmetrie .....	559
BÉRES, E.: Über eine Anwendung der Hypermatrizen zur Berechnung von räumlichen Stabwerken mit zyklischer Symmetrie.....	577
RÓZSA, P.: Die Anwendung des Matrizenkalküls auf die Statik von Balken und Platten .....	593
SZABÓ, J.: Über eine Anwendung der Matrizenrechnung zur Näherungslösung von gewissen partiellen Differentialgleichungen der Festigkeitslehre .....	623
Abstracts of lectures delivered in the seminars of the Institute.....	633
List of papers of the members of the Institute published or in print in another periodical.....	645



## СОДЕРЖАНИЕ

NICOLESCU, M.: Структура решений дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического или гиперболического типа .....	465
TURÁN, P.: Замечание к теории классов квазианалитических функций .....	481
MEDGYESSY, P.: Дифференциальные уравнения с частными производными, связанные с плотностью устойчивого распределения и их применения .....	489
RÉNYI, A.: Одна характеристика процесса Poisson .....	519
PALÁSTI, I.—RÉNYI, A.: Методы «Monte-Carlo» как минимаксные стратегии .....	529
L. ZIERMANN, M.: Теоретико-вероятностное исследование некоторых сельскохозяйственных вопросов .....	547
BÉRES, E.—LOVASS-NAGY, V.—SZABÓ J.: Определение стержневых сил пространственных решетчатых опор с циклической симметрией с помощью гиперматриц .....	559
BÉRES, E.: Вычисление центрально-симметричных пространственных рам с применением гиперматриц .....	577
RÓZSA, P.: Применение матричного исчисления в статике стержней и пластинок .....	593
SZABÓ, J.: Применение матричного исчисления к приближенному решению дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих некоторые проблемы теории упругости .....	623
Резюме докладов произнесенных на семинарах отделений Института .....	633
Список работ сотрудников Института, опубликованных в других журналах или находящихся в печати .....	645